数理解析研究所講究録
第 1840 巻 2013 年 122-138

グリーン関手と有限群のドリンフェルトダブルの表現環

山形大学・理学部　小田文仁 (Fumihito Oda)
Faculty of Science, Yamagata University

1 はじめに

有限群の表現論で考察されたさまざまな誘導定理等を統一的に取り扱うために Green は，有限群 G の部分群上で定義された加群の圏への関手を G-functor と呼び [Gr71] で考察した．G-functor は Dress により，ある条件を満たす圏からの二つの関手の組として一般化され Mackey functor と呼ばれた ([Dr72])．対応する加群たちが環の構造をもち，ある条件をみたす G-functor は ring G-functor と呼ばれた．Mackey functor における ring G-functor に対応するものは Green functor と呼ばれている ([Bo97])．バーンサイド環 $\Omega(G)$ と環 k 上の表現環 $R_k(G)$ は Green functor の基本的な例 Ω, R_k を与える．それらは，基本的な自然変換 $\theta: \Omega \to R_k$ で結ばれている．

与えられた Mackey functor M と G-集合 X から新たな Mackey functor M_X を構成する手法は Dress が加群の射影性を示すために考察した [Dr72]．その手法は現在 Dress 構成と呼ばれている．任意の Green functor A に G-monoid S が与える Dress 構成から得られる Mackey functor A_S は自然に Green functor の構造をもつ．

斜バーンサイド環 (crossed Burnside ring) は [OY01] で紹介された．共役の作用で G 自身を G-monoid とみなしたものを G^c と書く．Burnside Green functor Ω の Dress 構成 Ω_{G^c} から斜バーンサイド環が与えられる．同様に体 k 上の表現環 Green functor R_k の Dress 構成から得られる R_{kG^c} から群ホップ代数 kG の Drinfel'd double$D(G)$ の表現環が与えられる．$\theta: \Omega \to R_k$ に Dress 構成を施すことにより，斜バーンサイド環と Drinfel'd double の表現環が結ばれる．

本稿では Mackey functor, Green functor に関する基本的事項をまとめた上で，それらの応用の一例として，[Od07], [Od10] の概要を与えたい．Mackey functor については [TW95], [We00], Green functor については [Bo97], Burnside ring については [Bo00] がわかりやすくまとめられている．

G は有限群，$\mathcal{O}$ は単位元をもつ可換環とする．G-集合は有限とする．G-集合と G-map の圏を G-**set**，集合と写像の圏を **Set** と書く．G-集合 X に対し $[X]$ で X を含む G-集合の同型類とする．要素を一つだけもつ集合を $\bullet$ と書く．単位元をもつ monoid は G-集合であるとき G-monoid と呼ぶ．二つの G-集合 X, Y の disjoin union を $X+Y$ と書く．有限集

合 X の要素の個数を $|X|$ と書く．$H \leq G$ に対し G-集合 X の H-固定点全体の集合を X^H と書く．部分群 $H \leq G$ と要素 $g \in G$ に対し，${}^gH = gHg^{-1}$ と書く．

2 バーンサイド環

G のバーンサイド環 $\Omega(G)$ は，G-集合と G-写像の圏の直和（非交和）に関する Grothendieck 群であり，その環構造は G-集合のデカルト積により誘導される積で与えられるものである．単位元は一点集合の同型類 $[\bullet]$ である．s_G で G のすべての部分群の集合とする．$\Omega(G)$ はアーベル群として基底

$$\{[G/H] \mid H \in [s_G]\},$$

ただし $[s_G]$ は s_G の G-共役類の完全代表系，をもつ．

Theorem 2.1 (Burnside). *X and Y be finite G-sets. The following conditions are equivalent:*

1. *The G-sets X and Y are isomorphic.*
2. *For any subgroup H of G, the sets of fixed points X^H and Y^H have the same cardinality.*

部分群 $H \leq G$ について，任意の G-集合 X に対し $\varphi_H^G([X]) = |X^H|$ と定め，線形に拡張することにより定義される準同型 $\varphi_H^G : \Omega(G) \to \mathbb{Z}$ が存在する．また，φ_H^G は環準同型であり，Burnside の定理 2.1 は，**ghost map**

$$\varphi^G := \prod_{H\in[s_G]} \varphi_H^G : \Omega(G) \to \prod_{H\in[s_G]} \mathbb{Z}$$

が単射であることを示す．

3 Mackey functor

以下は，[Gr71] で Green が定義した G-functor である。

Definition 3.1. A **Mackey functor** for G over $\mathcal{O}$ is a function

$$M : \{\text{subgroups of}\, G\} \longrightarrow \mathcal{O}\text{-mod}$$

with $\mathcal{O}$-homomorphisms

$$\begin{aligned} t_K^H &: M(K) \longrightarrow M(H), \\ r_K^H &: M(H) \longrightarrow M(K), \\ c_g^H &: M(H) \longrightarrow M({}^gH), \end{aligned}$$

whenever $K \leq H$ are subgroups of G and $g \in G$, such that

1. $t_H^H, r_H^H, c_h^H : M(H) \to M(H)$ are the identity morphisms for all subgroups H and $h \in H$,

2. $r_L^K r_K^H = r_L^H$, $t_K^H t_L^K = t_L^H$ for all subgroups $L \leq K \leq H$,

3. $c_g^{hH} c_h^H = c_{gh}^H$ for all subgroups $H \leq G$ and $g, h \in G$,

4. $r_{^gK}^{^gH} c_g^H = c_g^K r_K^H$, $t_{^gK}^{^gH} c_g^K = c_g^H t_K^H$ for all subgroups $K \leq H$ and $g \in G$,

5. $r_L^H t_K^H = \sum_{x \in [L \backslash H/K]} t_{L \cap {^xK}}^L c_x^{L^x \cap K} r_{L^x \cap K}^K$ for all subgroups $K, L \leq H$.

G の部分群 H のバーンサイド環 $\Omega(H)$ 全体は次の 3 種類の写像により G の Mackey functor の例を与える.

$$\begin{array}{lllll} t_K^H & : & \Omega(K) \longrightarrow \Omega(H) & : & [K/D] \longmapsto [H/D], \\ r_K^H & : & \Omega(H) \longrightarrow \Omega(K) & : & [H/D] \longmapsto \sum_{g \in [K \backslash H/D]} [K/K \cap {^gD}], \\ c_g^K & : & \Omega(K) \longrightarrow \Omega(^gK) & : & [K/D] \longmapsto [^gK/^gD], \end{array}$$

where $D \subseteq K \subseteq H \subseteq G$ and $g \in G$.

以下は, [Dr72] で Dress が与えた定義である.

Definition 3.2. A **Mackey functor** is a bivariant functor $M := (M_*, M^*) : G\text{-set} \to \mathcal{O}\text{-Mod}$, $(M(X) := M_*(X) = M^*(X)$, $f_* := M_*(f) : M_*(X) \to M_*(Y)$, $f^* := M^*(f) : M^*(X) \to M^*(Y)$ for a G-map $X \xrightarrow{f} Y)$ such that

1. If X and Y are finite G-sets, then

$$M(X) \times M(Y) \xrightarrow{((i_X)_*, (i_Y)_*)} M(X \coprod Y) \xrightarrow{\begin{pmatrix} (i_X)^* \\ (i_Y)^* \end{pmatrix}} M(X) \times M(Y)$$

gives an isomorphism $M(X \coprod Y) \cong M(X) \times M(Y)$.

2. If

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & Y \arrow[d, "c"] \\ Z \arrow[r, "d"'] & W \end{tikzcd}$$

is a cartesian (pullback) square of G-sets, then

$$\begin{tikzcd} M(X) \arrow[d, "M_*(b)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M(Y) \arrow[l, "M^*(a)"'] \arrow[d, "M_*(c)"] \\ M(Z) & M(W). \arrow[l, "M^*(d)"] \end{tikzcd}$$

Example

G-集合 X に対し，対象が X への G-写像 $A \xrightarrow{\alpha} X$，$A \xrightarrow{\alpha} X$ から $A' \xrightarrow{\alpha'} X$ への射を G-写像 $A \xrightarrow{f} A'$ で

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \circlearrowleft & A' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

を満たすものとして定義される圏を X 上の G-集合の圏とよび G-**set**$/X$ で表す．G-**set**$/X$ のふたつの対象 $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} X$，$A_2 \xrightarrow{\alpha_2} X$ の和と積

$$\begin{aligned} (A_1 \xrightarrow{\alpha_1} X) \amalg (A_2 \xrightarrow{\alpha_2} X) &= (A_1 \amalg A_2 \xrightarrow{\alpha_1 \cup \alpha_2} X), \\ (A_1 \xrightarrow{\alpha_1} X) \times (A_2 \xrightarrow{\alpha_2} X) &= (A_1 \times_X A_2 \xrightarrow{\alpha} X), \end{aligned}$$

ただし，α は α_1 と α_2 の pullback，が誘導する圏 G-**set**$/X$ の Grothendieck ring を $\Omega(X)$ と書く．G-写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し G-**set**$/X$ と G-**set**$/Y$ の間の関手を

$$\begin{aligned} \Omega^*(f) \;:\; G\text{-}\mathbf{set}/Y &\longrightarrow G\text{-}\mathbf{set}/X \\ (B \longrightarrow Y) &\longmapsto (X \times_Y B \xrightarrow{\mathrm{pr}} X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_*(f) \;:\; G\text{-}\mathbf{set}/X &\longrightarrow G\text{-}\mathbf{set}/Y \\ (A \xrightarrow{\alpha} X) &\longmapsto (A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y) \end{aligned}$$

とすると，これらは G の Mackey functor $\Omega : X \mapsto \Omega(X)$ を誘導する．Ω は Burnside Mackey functor と呼ばれる．

Green による定義 3.1 と Dress による定義 3.2 の Mackey functor の定義が同値であることを示す．

(Green → Dress) M を Mackey functor，X を G-set とする．$\widetilde{M}$ を

$$\widetilde{M}(X) = \left(\bigoplus_{x \in X} M(G_x)\right)^G,$$

ただし，$\left(\bigoplus_{x \in X} M(G_x)\right)^G$ は G が誘導する置換の G-固定点全体の加群とする．G-写像 $f : X \to Y$ と $u = (u_x)_{x \in X} \in \widetilde{M}(X)$ に対し要素 $M_*(f)(u) \in M(Y)$ を

$$\forall y \in Y, \quad M_*(f)(u)_y = \sum_{x \in G_y \backslash f^{-1}(y)} t_{G_x}^{G_y} u_x$$

で定める．逆に $v = (v_y)_{y \in Y} \in M(Y)$ に対し要素 $M^*(f)(v) \in M(X)$ を

$$\forall x \in X, \quad M^*(f)(v)_x = r_{G_x}^{G_{f(x)}} v_{f(x)}$$

で定める．このとき $\widetilde{M}$ は Dress が定義した Mackey functor となる．

(Dress → Green) $\widetilde{M}$ が Mackey functor，H が G の部分群のとき，$\widetilde{M}$ を

$$M(H) = \widetilde{M}(G/H)$$

で定義する．$H \subseteq K$ を G の部分群, $p_H^K : G/H \to G/K$ を自然な射影とする．このとき，

$$t_H^K = \widetilde{M}_*(p_H^K), \quad r_H^K = \widetilde{M}^*(p_H^K)$$

とする．要素 $x \in G$ と部分群 $H \leq G$ に対し，$\gamma_x^H : G/H \to G/{}^xH$ を $\gamma_x^H(gH) = gx^{-1x}H$ で定まる G-写像とする．このとき，

$$c_x^H = \widetilde{M}_*(\gamma_x^H)$$

とすると M は Green が定義した Mackey functor となる．特に，部分群 $J, K \subseteq H \subseteq G$ について

$$r_J^H \circ t_K^H = M^*(p_J^H) \circ M_*(p_K^H)$$

であるが，図式

$$\begin{tikzcd} & G/J \arrow[d, "p_J^K"] \\ G/K \arrow[r, "p_K^H"'] & G/H, \end{tikzcd}$$

のプルバック図式

$$\begin{tikzcd} \coprod_h G/J^h \cap K \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & G/J \arrow[d, "p_J^K"] \\ G/K \arrow[r, "p_K^H"'] & G/H, \end{tikzcd}$$

ただし，$h \in [J\backslash H/K]$, $q := \sqcup_h p_{J^h\cap K}^K$, $p := \sqcup_h p_{J\cap^h K}^J \circ \gamma_h^{J^h\cap K}$, に Mackey functor を施してえられる図式

$$\begin{tikzcd} M(\coprod_h G/J^h \cap K) \arrow[r, "p_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M(G/J) \\ M(G/K) \arrow[r, "(p_K^H)_*"'] \arrow[u, "q^*"] & M(G/H) \arrow[u, "(p_J^H)^*"'] \end{tikzcd}$$

から定義 3.2 により導かれる図式

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_h M(G/J^h \cap K) \arrow[r, "p_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M(G/J) \\ M(G/K) \arrow[r, "t_K^H"'] \arrow[u, "q^*"] & M(G/H) \arrow[u, "r_J^H"'] \end{tikzcd}$$

を用いて Mackey 分解に関する等式

$$\begin{aligned} r_J^H \circ t_K^H &= M^*(p_J^H) \circ M_*(p_K^H) \\ &= M_*(p) \circ M^*(q) \\ &= \sum_{h\in[J\backslash H/K]} ((p_{J\cap^h K}^J)_* \circ (\gamma_h^{J^h\cap K})_*) \circ (p_{J^h\cap K}^K)^* \\ &= \sum_{h\in[J\backslash H/K]} (t_{J\cap^h K}^J \circ c_h^{J^h\cap K}) \circ r_{J^h\cap K}^K . \end{aligned}$$

が示されることを注意する．

4 Green functors

Green が [Gr71] で ring G-functor と呼んだものの定義が以下である．

Definition 4.1. G の $\mathcal{O}$ 上の Mackey functor$A$ は任意の部分群 $H \leq G$ に対し $A(H)$ が $\mathcal{O}$-代数の構造をもち，以下の条件を満たすとき，**Green functor** という．

- If $H \subseteq K$ are subgroups of G, and if $x \in G$, the maps r_H^K and c_x^H are $\mathcal{O}$-algebra homomorphisms.
- (Frobenius relations) If $H \subseteq K$ are subgroups of G, and if $a \in A(H)$ and $b \in A(K)$, then
$$b(t_H^K a) = t_H^K\big((r_H^K b)a\big), \quad (t_H^K a)b = t_H^K\big(a(r_H^K b)\big).$$

Green functor は Mackey functors (とそれらの間の自然変換) の圏の monoid 対象 [ML98, p.75] として定義される．以下は Bouc が [Bo97] で考察した G-set を用いた Green functor の定義である．

Definition 4.2. G の $\mathcal{O}$ 上の **Green functor** A は，G の $\mathcal{O}$ 上の Mackey functor であり，任意の G-sets X，Y に関する bilinear maps

$$A(X) \times A(Y) \to A(X \times Y) : (a, b) \mapsto a \times b$$

が以下の条件をみたすものである．

- 二つの G-maps $f : X \to X'$，$g : Y \to Y'$ に対し以下の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} A(X) \times A(Y) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "A_*(f)\times A_*(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A(X \times Y) \arrow[d, "A_*(f\times g)"] \\ A(X') \times A(Y') \arrow[r, "\times"'] & A(X' \times Y'), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A(X) \times A(Y) \arrow[r, "\times"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A(X \times Y) \\ A(X') \times A(Y') \arrow[r, "\times"'] \arrow[u, "A_*(f)\times A_*(g)"] & A(X' \times Y'). \arrow[u, "A_*(f\times g)"'] \end{tikzcd}$$

- 三つの G-sets X，Y，Z に対し以下の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} A(X) \times A(Y) \times A(Z) \arrow[r, "Id\times(\times)"] \arrow[d, "(\times)\times Id"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A(X) \times A(Y \times Z) \arrow[d, "\times"] \\ A(X \times Y) \times A(Z) \arrow[r, "\times"'] & A(X \times Y \times Z) \end{tikzcd}$$

- $\bullet$ を 1 点集合とする．任意の G-set X と任意の $a \in A(X)$ に対し，$\varepsilon_A \in A(\bullet)$ が存在し以下の条件をみたす．
$$A_*(p_X)(a \times \varepsilon_A) = a = A_*(q_X)(\varepsilon_A \times a),$$
ただし，$X \times \bullet \xrightarrow{p_X} X$，$\bullet \times X \xrightarrow{q_X} X$ は全単射な射影とする．

5 Crossed Burnside rings

S を G-monoid，X を G-set とする．

- 圏 G-**xset**$/S\times X$ の対象は，$S\times X$ 上の *crossed G-map* (斜 G-写像) $A \overset{\|\cdot\|\times\alpha}{\longrightarrow} S\times X$ (ただし，$\|\cdot\|$ は weight function と呼ばれる G-map $A \overset{\|\cdot\|}{\to} S$，$\alpha$ は G-map $A \overset{\alpha}{\to} X$)．$\|\cdot\|\times\alpha$ を省略して $A \overset{\alpha}{\longrightarrow} S\times X$ と書く．
- $A \overset{\alpha}{\longrightarrow} S\times X$ から $B \overset{\beta}{\longrightarrow} S\times X$ への射 f は G-写像 $f: A\longrightarrow B$ で $\beta f=\alpha$ と $\|f(a)\|=\|a\|$ を満たすものである．

任意の二つの対象 $A\overset{\alpha}{\longrightarrow}S\times X$ と $B\overset{\beta}{\longrightarrow}S\times X$ に対し和と積を以下のように定める．

- $(A\overset{\alpha}{\longrightarrow}S\times X)+(B\overset{\beta}{\longrightarrow}S\times X)=(A\coprod B\overset{\alpha\cup\beta}{\longrightarrow}S\times X)$,
- $(A\overset{\alpha}{\longrightarrow}S\times X)\cdot(B\overset{\beta}{\longrightarrow}S\times X)=(A\times_X B\overset{p}{\longrightarrow}S\times X)$，ただし，$p$ はファイバー積，weight function は $\|(a,b)\|=\|a\|\cdot\|b\|$ で定義する．

斜バーンサイド環 (crossed Burnside ring, 以下 CBR と書く) $X\Omega(G,S,X)$ は圏 G-**xset**$/S\times X$ の Grothendieck 環として定義する．X が1点集合のとき $X\Omega(G,S,X)$ は CBR $X\Omega(G,S)$ ([OY01]) と同型である．

Dress 構成を用いた CBR の Green functor は以下の定理として知られている．

Theorem 5.1 ([Bo03a], [OY04]). *S を G-monoid, $\mathbf{A}$ を Green functor とする．このとき Mackey functor $\mathbf{A}$ の S による Dress 構成によって与えられる Mackey functor $\mathbf{A}_S$ は Green functor の構造をもつ．*

この定理により Burnside Green functor Ω と G-monoid S から Green functor $\Omega_S(=: \mathbf{X\Omega}(G,S,*))$ を得る．特に G-map $f: X\to Y$ は二つの写像

$$
\begin{array}{lllllll}
f_! & : & \mathbf{X\Omega}(G,S,X) & \longrightarrow & \mathbf{X\Omega}(G,S,Y) & : & [A\overset{\alpha}{\longrightarrow}SX] \longmapsto [A\overset{\alpha}{\longrightarrow}SX \xrightarrow{1_S\times f} SY], \\
f^* & : & \mathbf{X\Omega}(G,S,Y) & \longrightarrow & \mathbf{X\Omega}(G,S,X) & : & [B\overset{\beta}{\longrightarrow}SY] \longmapsto [X\times_Y B \xrightarrow{\|\cdot\|\times pr} SX]
\end{array}
$$

(ただし，weight function $\|\cdot\|: X\times_Y B\to S$ は $\|(x,b)\|=\|b\|$ for $(x,b)\in X\times_Y B$) を誘導する．

6 Green functor の間の自然変換

バーンサイド環の Green functor から表現環の Green functor への自然変換とドレス構成に関する結果を述べる ([Od07])．

Burnside Green functors.

G の部分群の族上で定義された，斜バーンサイド環グリーン関手 $X\Omega(*,G^c)$ を準備する (see 4.1 of [OY04])．部分群 $H\leq G$ について s_H を H のすべての部分群の族，$C_G(D)$ を $D\leq H$ の G における中心化群とする．対応

$$H(\leq G)\longmapsto X\Omega(H,G^c)=\langle (H/D)_s \mid D\in[H\setminus S(H)]\; s\in[H\setminus C_G(D)]\rangle_{\mathbb{Z}}$$

と写像

$$\begin{array}{lcllcl}
\mathrm{ind}_L^H & : & X\Omega(L,G^c) \longrightarrow X\Omega(H,G^c) & : & (L/D)_s \longmapsto (H/D)_s, \\
\mathrm{res}_L^H & : & X\Omega(H,G^c) \longrightarrow X\Omega(L,G^c) & : & (H/D)_s \longmapsto \displaystyle\sum_{g\in[L\backslash H/D]} (L/L\cap {}^gD)_{{}^gs}, \\
\mathrm{con}_{H,g} & : & X\Omega(H,G^c) \longrightarrow X\Omega({}^gH,G^c) & : & (H/D)_s \longmapsto ({}^gH/{}^gD)_{{}^gs},
\end{array}$$

ただし，$D \le L \le H \le G$，$g \in G$，は G の $\mathbb{Z}$ 上の Green 関手の構造を与える．$X\Omega(*,G^c)$ の Green 関手の構造に関する注意を与えるため，$G/H \times G^c$ 上の有限 G-集合の圏 G-**set**$/(G/H \times G^c)$ (see 2.4 of [Bo97]) と H の共役により定まる H-集合 G^c 上の有限 H-集合の圏 H-**set**$/G^c$ の同値性に関する要旨を述べる．

Ω を G-集合の上で定義された G の $\mathbb{Z}$ 上の Burnside Green functor とする．Proposition 2.4.2 of [Bo97] により，$\Omega_{G^c}(G/H) = \Omega((G/H) \times G^c)$ は圏 G-**set**$/(G/H \times G^c)$ の疎な和（非交和）に関する Grothedieck 群と同型になることがわかる．$G/H \times G^c$ 上の G-集合

$$[K,s] : G/K \to G/H \times G^c : gK \mapsto (gH, {}^gs),$$

ただし，$K \in [H\backslash S(H)]$，$s \in [H\backslash C_G(K)]$，が $\Omega(G/H \times G^c)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となることがわかる．$\Omega(G/H \times G^c)$ の基底の要素を $(G/K, [K,s])$ と書く．Theorem 5.1 of [Bo03a] は Ω_{G^c} が Green functor の構造をもつことを示す．$\Omega(G/H \times G^c)$ の基底の要素 $(G/K,[K,s])$ と $(G/L,[L,t])$ に対し，Theorem 5.1 of [Bo03a] はそれらの積は

$$(G/K,[K,s]) \cdot (G/L,[L,t]) = \sum_{x\in[K\backslash H/L]} (G/K\cap {}^xL, [K\cap {}^xL, s\cdot {}^xt]). \tag{6.1}$$

で与えられる．Lemma 2.4.1 of [Bo97] のように G-**set**$/(G/H \times G^c)$ から H-**set**$/G^c$ への関手 F で $G/H \times G^c$ 上の推移的 G-集合 $[K,s] : G/K \to G/H \times G^c$ に対し

$$F : (G/K,[K,s]) \mapsto \langle K,s\rangle : [K,s]^{-1}(\{H\} \times G^c) \to G^c$$

で定まる関手 F を得る．$gK \mapsto {}^gs$ で定まる H-写像 $H/K \to G^c$ を $[K,s]$ と書く．H-set G^c 上の H-集合

$$[K,s] : H/K \to G^c : gK \mapsto {}^gs,$$

ただし，$K \in [H\backslash S(H)]$，$s \in [H\backslash C_G(K)]$，が $\Omega\!\downarrow_H^G(G^c)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となることがわかる．$\Omega\!\downarrow_H^G(G^c)$ の基底のその元を $(H/K,[K,s])$ で表す．任意の部分群 $H \le G$ について F が G-**set**$/(G/H \times G^c)$ から H-**set**$/G^c$ への同値を与えることがわかる．逆は H-**set**$/G^c$ から G-**set**$/(G/H \times G^c)$ への誘導関手で与えられる．

F による (6.1) の像は H-**set**$/G^c$ の中で

$$(H/K,[K,s]) \cdot (H/L,[L,t]) = \sum_{x\in[K\backslash H/L]} (H/K\cap {}^xL, [K\cap {}^xL, s\cdot {}^xt])$$

となる．H-**set**$/G^c$ の Grothendieck group は $X\Omega(H,G^c)$ と同型になる．$X\Omega(H,G^c)$ の基底の元 $(H/K)_s$ と $(H/L)_t$ の積は

$$(H/K)_s \cdot (H/L)_t = \sum_{x\in[K\backslash H/L]} (H/K\cap {}^xL)_{s\cdot {}^xt}$$

で定義できる．G の単位元 1_G を用いて $X\Omega(H,G^c)$ の単位元は $(H/H)_{1_G}$ で表される．これは，任意の部分群 $H \leq G$ について $X\Omega(H,G^c)$ に単位元を持つ環の構造を与える．

Witherspoon's Green functor.

Witherspoon は G の $\mathbb{Z}$ 上の Green functor $R_{\mathbb{C}}(D_G(*))$ を紹介した ([Wi96] Section 5). 任意の部分群 $H \leq G$ に対し，群環 $\mathbb{C}G$ の Drinfel'd (quantum) double [Dr86] $D(G)$ の部分代数

$$D_G(H) = \sum_{g\in G,\, h\in H} \mathbb{C}\phi_g h,$$

ただし ϕ_g は双対空間 $(\mathbb{C}G)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}G,\mathbb{C})$ の基底，が存在する．$D_G(G) = D(G)$ が成り立つこと，$R(D(G))$ が $D(G)$ の表現環，あるいはホップ代数 $\mathbb{C}G$ のホップ bimodules の Grothendieck 環と同型であることに注意する ([Ro95], [Bo03a], [OY04]). 部分群 $H \leq G$ に対し，$R_{\mathbb{C}}(D_G(H))$ を $D_G(H)$ の Grothendieck 環とする．このとき対応

$$H \longmapsto R_{\mathbb{C}}(D_G(H)),$$

ただし $H \leq G$，と写像

$$\begin{array}{llcllll}
\mathrm{Dres}^H_L & : R_{\mathbb{C}}(D_G(H)) & \longrightarrow & R_{\mathbb{C}}(D_G(L)) & : U & \longmapsto U\downarrow_{D_G(L)}, \\
\mathrm{Dind}^H_L & : R_{\mathbb{C}}(D_G(L)) & \longrightarrow & R_{\mathbb{C}}(D_G(H)) & : V & \longmapsto D_G(H)\otimes_{D_G(L)} V, \\
\mathrm{Dconj}_{H,g} & : R_{\mathbb{C}}(D_G(H)) & \longrightarrow & R_{\mathbb{C}}(D_G({}^gH)) & : U & \longmapsto {}^gU = gD_G(H)\otimes_{D_G(H)} U,
\end{array}$$

ただし，$U\downarrow_{D_G(L)}$ は $D_G(H)$ の作用を $D_G(L)$ に制限して得られる $D_G(L)$-加群 ($L \leq H \leq G$, $g \in G$)，は $\mathbb{Z}$ 上の G の Green functor の構造を与える．G^c 上の H-ベクトル束の圏と $D_G(H)$-加群の圏の同値性を今後利用する (see [Wi96] Section 2).

A morphism of Green functors.

$R_{\mathbb{C}}$ で G の部分群上で定義された $\mathbb{C}$ 上の表現環の Green functor とする．$R_{\mathbb{C}}(G/H) = R_{\mathbb{C}}(H)$ とおくと Remark 2.3 of [Bo03a] より G-set X 上の G-同変 $\mathbb{C}$-ベクトル束 $R_{\mathbb{C}}(X)$(see [Wi96] Section 2) は以下の事実を導く:

- If X is a finite G-set, then $R_{\mathbb{C}}(X)$ is the Grothendieck ring of the category of G-equivariant $\mathbb{C}$-vector bundles on the G-set X, for relations given by decomposition into direct sum of vector bundles, the ring structure being induced by the tensor product of vector bundles: one can set

$$R_{\mathbb{C}}(X) = \left(\bigoplus_{x\in X} R_{\mathbb{C}}(G_x)\right)^G$$

  where the exponent denotes fixed points under the natural action of G on $\oplus_{x\in X} R_{\mathbb{C}}(G_x)$ by permutation of the components, and G_x is the stabilizer of x in G.

- If $f : X \to X'$ is a G-map, then $R_{\mathbb{C}*}(f) : R_{\mathbb{C}}(X) \to R_{\mathbb{C}}(X')$ is defined by

$$R_{\mathbb{C}*}(f)(u)_y = \sum_{x\in[G_y\backslash f^{-1}(y)]} t^{G_y}_{G_x}(u_x),$$

  where $t^{G_y}_{G_x}$ is the induction map from $R_{\mathbb{C}}(G_x)$ to $R_{\mathbb{C}}(G_y)$, $u \in R_{\mathbb{C}}(X)$, and $y \in X'$.

- If $f : X' \to X$ is a G-map, then $R_{\mathbb{C}}{}^*(f) : R_{\mathbb{C}}(X) \to R_{\mathbb{C}}(X')$ is defined by

$$R_{\mathbb{C}}{}^*(f)(v)_x = r^{G_x}_{G_{f(x)}}(v_{f(x)}),$$

  where $r^{G_x}_{G_{f(x)}}$ is the restriction map from $R_{\mathbb{C}}(G_x)$ to $R_{\mathbb{C}}(G_{f(x)})$, $v \in R_{\mathbb{C}}(X)$, and $x \in X'$.

- The product of the elements $a \in R_{\mathbb{C}}(X)$ and $b \in R_{\mathbb{C}}(Y)$ is defined by

$$(a \times b)_{x,y} = r^{G_x}_{G_{(x,y)}}(a_x) \cdot r^{G_y}_{G_{(x,y)}}(b_y).$$

Xが有限G-集合のとき,

$$(Y, \varphi) = (\varphi : Y \to X) \longmapsto \{\mathbb{C}[\varphi^{-1}(x)]\}_{x \in X},$$

ただし，$\mathbb{C}[\varphi^{-1}(x)]$は$G_x$-集合$\varphi^{-1}(x)$が与える置換加群，で定義される自然なGreen functor間の射を

$$\theta : \Omega \to R_{\mathbb{C}}$$

と書く.

次の定理は重要である.

Theorem 6.1 (Bouc [Bo03a] 5.1). *Let A be a Green functor for G over a commutative ring $\mathcal{O}$, Γ a crossed G-monoid, and ε_A an element of $A(\bullet)$ such that for any G-set X and for any $a \in A(X)$*

$$A_*(p_X)(a \times \varepsilon_A) = a = A_*(q_X)(\varepsilon_A \times a)$$

denoting by p_x (resp. q_x) the bijective projection from $X \times \bullet$ (resp. from $\bullet \times X$) to X (see 1.2.1 of [Bo03a]). Then the functor A_Γ is a Green functor for G over $\mathcal{O}$, with unit ε_{A_Γ}, where ε_{A_Γ} is the element $A_*\left(\begin{smallmatrix} \bullet \\ \downarrow \\ 1_G \end{smallmatrix}\right)(\varepsilon_A)$ of $A(\Gamma) = A_\Gamma(\bullet)$. Moreover the correspondence $A \mapsto A_\Gamma$ is an endo-functor of the category of Green functors for G over $\mathcal{O}$.

まず，以下の事実を注意する.

Lemma 6.2. *Let Ω be the Burnside ring Green functor and G^c the crossed G-monoid. Then there is an isomorphism of Green functors*

$$X\Omega(*, G^c) \cong \Omega_{G^c}.$$

有限集合Xが与える$\mathbb{C}$-上の置換加群を$\mathbb{C}[X]$で表す．Theorem 6.1 のGreen functorの圏のendo-functorをΩから$R_{\mathbb{C}}$への射θに応用すると以下の事実を導く：

Lemma 6.3. *Let $\theta : \Omega \to R_{\mathbb{C}}$ be the natural morphism from the Burnside Green functor to the Grothendieck ring Green functor. Then the morphism $\theta_{G^c} : \Omega_{G^c} \to R_{\mathbb{C}G^c}$ given by the Bouc's construction is a morphism of Green functors.*

さらに Lemma 6.3 から以下が従う.

Lemma 6.4. *There is a morphism*

$$\theta_{G^c} : X\Omega(*, G^c) \to R_{\mathbb{C}}(D_G(*))$$

of Green functors.

$(H/L)_g$ を $X\Omega(H, G^c)$ の基底の要素とする. Lemma 6.4 は, $\theta_{G^c}((H/L)_g)$ が G^c 上の H-ベクトル束であることを示す. この H-ベクトル束を $[H/L]_g$ と書く. Lemma 6.2 は以下の事実を示す.

Lemma 6.5. *The H-vector bundle $[H/L]_g$ is the $\mathbb{C}C_H({}^x g)$-module $\mathbb{C}[[{}^x L, {}^x g]^{-1}({}^x g)]$ in the ${}^x g$-component, for $x \in [H/C_H(g)]$, and 0 in all other components.*

[Wi96] の Section 2 で考察された写像 $\mathrm{Incl}_{J,h} : R_{\mathbb{C}}(J) \to R_{\mathbb{C}}(D_G(J))$, ただし, J は G の部分群, $h \in C_G(J)$, を復習する. 与えられた $\mathbb{C}J$-加群 V に対し, $\mathrm{Incl}_{J,h}(V)$ は h-component が V, それ以外が 0 として定まるものとする.

Lemma 6.6. *Let θ_{G^c} be the ring homomorphism $\theta_{(G/G)\times G^c}$ from the crossed Burnside ring $X\Omega(G, G^c)$ to the Grothendieck ring $R_{\mathbb{C}}(D_G(G))$ given by the previous lemma. Then the $D(G)$-module corresponding to the G-vector bundle $\theta_{G^c}((G/L)_g)$ is the induced module*

$$D(G) \otimes_{D_G(L)} \mathrm{Incl}_{L,g}(\mathbb{C}[L/L]).$$

Sub-Green functors.

G の部分群 H に対し, $X\Omega(H, G^c)$ の要素 $(H/L)_{1_G}$ で生成された部分環 $X\Omega(H, G^c)_1$ を対応させる $X\Omega(*, G^c)$ の sub-Green functor$X\Omega(*, G^c)_1$ が存在する. また G の部分群 H に対し, $R_{\mathbb{C}}(D_G(H))$ の要素 $\mathrm{Incl}_{H,1_G}(V)'s$, ただし, $\mathrm{Incl}_{H,1_G}$ は $D_G(H)$-加群の圏の充満部分圏への $\mathbb{C}H$-加群の圏の埋め込み関手 ([Wi96] Section 1), V は $\mathbb{C}H$-加群, で生成された部分環 $R_{\mathbb{C}}(D_G(H)_1)$ を対応させる $R_{\mathbb{C}}(D_G(*))$ の sub-Green functor$R_{\mathbb{C}}(D_G(*)_1)$ が存在する.

$X\Omega(H, G^c)_1$ が Burnside ring $\Omega(H)$ と同型であること, $R_{\mathbb{C}}(D_G(H)_1)$ が通常の H の表現環 $R_{\mathbb{C}}(H)$ と同型であることがわかる. 準同型 $\theta_{G^c} \downarrow_{X\Omega(H,G^c)_1}$ は $\Omega(H)$ から $R_{\mathbb{C}}(H)$ への自然な環準同型写像である.

Characters.

$g \in G$ と $C_G(g)$ の既約指標 ρ について, $\mathbb{C}D(G)$-加群 $U = \{U_h\}_{h \in G^c}$ の指標 $\chi_{g,\rho}$ は公式

$$\chi_{g,\rho}(U) = \frac{1}{\deg\rho} \sum_{h \in C_G(g)} \mathrm{Tr}(g, U_h)\rho(h)$$

で与えられる. 斜バーンサイド環の指標は ([OY01], Section 5) で考察された. 部分群 $H \leq G$ of G と $C_G(H)$ の既約指標 θ について, $X\Omega(G, G^c)$ から $\mathbb{C}$ への線形写像 $\omega_{H,\theta}$ は Burnside 準同型 φ_H と中心的指標 $\tilde{\omega}_{H,\theta}$ との合成である : G^c 上の与えられた斜 G-set X, 部分群 $H \leq G$, と群環 $\mathbb{C}C_G(H)$, の既約指標 ρ に対し, $\omega_{H,\rho}(X) = \tilde{\omega}_{H,\rho} \circ \varphi_H(X)$.

任意の $h \in G^c$ に対し斜 G-set (X, α) の h-component は

$$X[h] = \{x \in X | \alpha(x) = h\}$$

で定義される.

Lemma 6.7. *Let g be an element of G, ρ an irreducible character of $\mathbb{C}C_G(g)$, and θ_{G^c} the homomorphism from $X\Omega(G, G^c)$ to $R_{\mathbb{C}}(D(G))$. Then $\chi_{g,\rho}\theta_{G^c} = \omega_{\langle g\rangle,\rho}$, where $\langle g\rangle$ is the cyclic subgroup generated by g.*

7 斜バーンサイド環とドリンフェルトダブルの表現環

有限p-群Pに対して，その斜Burnside環$B^c(P)$と$\mathbb{Q}P$のDrinfel'd double $\mathcal{D}(P)$の表現環$R_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}(P))$の階数の差$\mathrm{rank}B^c(P) - \mathrm{rank}R_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}(P))$を$P$の中心化群$C_P(g)$ $(g \in P)$のDade groupのtorsion partの位数の和で表すことができるという結果の概要を述べる([Od10]).

Some known Dade groups: 有限p-群PのDade group $D(P)$は，p-群のendo p-置換加群の分類のためにDadeにより考察された([Da78a], [Da78b]). kを標数$p > 0$の体，Pを有限p-群とする．有限生成kP-加群Mは，kP-加群$\mathrm{End}_k(M)$が置換加群となるとき，end置換加群と呼ばれる．二つのend置換kP-加群M，Nは，$M \otimes N^*$が置換kP-加群であるときcompatibleであると呼び，$M \sim N$と書く．endo置換kP-加群Mは，$M \otimes M^*$が直和因子として自明なkP-加群kをもつとき，cappedと呼ばれる．関係$\sim$は，capped endo置換加群全体のクラスの同値関係となることがDadeにより示された．この同値類全体の集合を$D(P) := D_k(P)$と書く．$D(P)$はk上のテンソル積を和とする群になることが知られている．$D(P)$はPのDade群と呼ばれている．

一般のp-群に対してそのDade groupはとても複雑であるが，normal p-rank 1と呼ばれる2-群に対しては，DadeやCarlson and Thévenazによる以下の結果が知られている:

Theorem 7.1. (Dade [Da78a], Carlson-Thévenaz [CT00])

1. $D(C_{2^n}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$, *and* $D(C_{p^n}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, *if* $p \geq 3$.
2. $D(D_{2^n}) \cong \mathbb{Z}^{2n-3}$.
3. $D(SD_{2^n}) \cong \mathbb{Z}^{2n-4} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. $D(Q_{2^n}) \cong \mathbb{Z}^{2n-5} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *for* $n \geq 4$.
5. $D(Q_8) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *if the ground field contains all cubic roots of unity, and* $D(Q_8) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *otherwise.*

有理数体に係数拡大することにより，Dade群が圏論的に理解できることを示した以下の結果はとても強力な道具である．

Theorem 7.2. (Bouc-Thévenaz [BT00] Theorem 10.4) *There is an exact sequence of functors*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}D \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}B \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q}R_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0$$

where $\varepsilon(P) : \mathbb{Q}B(P) \to \mathbb{Q}R_{\mathbb{Q}}(P)$ is the morphism mapping a P-set to the corresponding permutation module over $\mathbb{Q}$.

p-群 P に対し $B^c(P)$ を P の斜バーンサイド環，$R_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}(P))$ を群環 $\mathbb{Q}P$ の Drinfel'd ダブル $\mathcal{D}(P)$ の表現環とする．このとき，これらの環の階数の差 $\mathrm{rank}B^c(P) - \mathrm{rank}R_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}(P))$ を以下の事実を用いて計算することができる:

Theorem 7.3. (Bouc-Thévenaz [BT00] Theorem A) *The torsion-free rank of the Dade group $D(P)$ is equal to the number of conjugacy classes of non-cyclic subgroups of P.*

p-バイセット関手 (p-biset functor) の定義のためにバイセットの定義を準備する．

Definition 7.4. Let G and H be finite groups. An (H, G)**-biset,** or a **biset** shortly, is a set with a left $(H \times G^{op})$-action, i.e., a set U with a left H-action and a right G-action which commute.

If K is another group, and V is a (K, H)-biset, then the product $V \times U$ by the right action of H given by $(v, u)h = (vh, h^{-1}u)$ for $v \in V$, $u \in U$, and $h \in H$. The class of (v, u) in $V \times_H U$ is denoted by $(v,_H u)$. The set $V \times_H U$ is a (K, G)-biset for the action given by

$$k(v,_H u)g = (kv,_H ug)$$

for $k \in K$, $g \in G$, $u \in U$, and $v \in V$.

Definition 7.5. Denote by $\mathcal{C}_p$ the following category:

- The objects of $\mathcal{C}_p$ are the finite p-groups.
- If P and Q are finite p-groups, then $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}(P, Q) = B(Q \times P^{op})$ is the Burnside group of finite (Q, P)-bisets. An element of this group is called a **virtual** (Q, P)-biset.
- The composition of morphisms is $\mathbb{Z}$-bilinear, and if P, Q, R are finite p-groups, if U is a finite (Q, P)-biset, and V is a finite (R, Q)-biset, then the composition of (the isomorphism classes of) V and U is the (isomorphism class) of $V \times_Q U$. The identity morphism Id_P of the p-group P is the class of the set P, with left and right action by multiplication.

可換環 $\mathcal{O}$ に対し $\mathcal{F}_{p,\mathcal{O}}$ で $\mathcal{O}\mathcal{C}_p$ から $\mathcal{O}$-Mod への $\mathcal{O}$-additive 関手の圏とする．$\mathcal{F}_{p,\mathcal{O}}$ の対象を **p-biset functor** または **Bouc functor** (defined over p-groups, with values in $\mathcal{O}$-Mod)(see [Th06], [Bo06], [Bo10]) という．

M を p-biset functor $\mathbb{Q}D$，$\mathbb{Q}B$，$\mathbb{Q}R_{\mathbb{Q}}$ の中の一つとする．P-集合 X に対し

$$\begin{aligned} M(X) &= \left(\bigoplus_{x \in X} M(P_x)\right)^P \\ &= \left\{ (m(x)) \in \bigoplus_{x \in X} M(P_x) \,\middle|\, {}^g(m(x)) = m(gx) \forall g \in P \right\}, \end{aligned}$$

ただし，P_x は x の P における安定部分群，とおく．

以下の系が成り立つ．

Corollary 7.6. *Let P be a p-group and X a P-set. Then there is an exact sequence of $\mathbb{Q}$-vector spaces*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}D(X) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}B(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q}R_{\mathbb{Q}}(X) \longrightarrow 0$$

上の系の X として P^c をとることで以下の事実を得る．

Corollary 7.7. *Let P be a p-group. Then there is an exact sequence of $\mathbb{Q}$-vector spaces*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}D(P^c) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}B(P^c) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q}R_{\mathbb{Q}}(P^c) \longrightarrow 0$$

In particular, we have

$$\mathrm{rank}B^c(P) = \mathrm{rank}R_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}(P)) + \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}D(P^c).$$

さらに斜 Burnside ring の階数に等しい数に関する次の結果を得る．

Corollary 7.8. *Let P be a p-group. Then the following numbers are equal:*

(1) $\mathrm{rank}B^c(P)$.

(2) $\mathrm{rank}R_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}(P)) + \sum_{g\in[P\backslash P^c]} \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}D(C_P(g))$.

(3) $\displaystyle\sum_{Q\in[P\backslash\mathcal{S}(P)]} \frac{|C_P(Q)|}{|N_P(Q)|}\cdot|Q|\left(\sum_{x\in Q/Q'}\frac{1}{|x|}\right)$.

(4) $\displaystyle\sum_{Q\in[P\backslash\mathcal{S}(P)]} |N_P(Q)\backslash C_P(Q))|$.

(5) $\displaystyle\sum_{g\in[P\backslash P^c]} |C_P(g)\backslash\mathcal{S}(C_P(g))|$.

上の系を用いると以下のように一般の p-群 P に対して，$\mathrm{rank}B^c(P) - \mathrm{rank}R_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}(P))$ が $C_P(g)$ の非巡回部分群の同型類の個数を用いて計算できることがわかる．

Corollary 7.9. *Let P be a p-group. Then*

$$\mathrm{rank}B^c(P) = \mathrm{rank}R_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}(P)) + \sum_{g\in[P\backslash P^c]} |C_P(g)\backslash\mathcal{S}_{\mathrm{non}}(C_P(g))|,$$

where $\mathcal{S}_{\mathrm{non}}(C_P(g))$ is the $C_P(g)$-poset of non-cyclic subgroups of $C_P(g)$ with $C_P(g)$-action defined by conjugation.

特に巡回 p-群に対しては階数が一致することがわかる．

Corollary 7.10. *Let P be a cyclic p-group. Then*

$$\mathrm{rank}B^c(P) = \mathrm{rank}R_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}(P)).$$

Some small 2-groups.

位数 2^n $(n \in \mathbb{N})$ の二面体群，準二面体群，一般四元数群の中心化群の構造に関する基本的事実を要約する (たとえば III.17 of [Er90] を参照のこと)．これらの群の中心に含まれる位数 2 の元を z と書く．

$$D_{2^n} = \langle x, y | x^{2^{n-1}} = y^2 = 1,\, y^{-1}xy = x^{-1}\rangle$$

を位数 2^n $(n \geq 2)$ の二面体群とする．このとき 1 と z の中心化群は D_{2^n} となる．y と xy の中心加群は Klein four group に同型である．他の $2^{n-2}-1$ 個の共役類の元の中心化群はすべて巡回群である．

$$SD_{2^n} = \langle x, y | x^{2^{n-1}} = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1+2^{n-2}} \rangle$$

を位数 2^n $(n \geq 4)$ の準二面体群とする．1 と z の中心化群は SD_{2^n} である．y の中心化群は Klein four group である．他の 2^{n-2} 個の共役類の元の中心化群はすべて巡回群である．

$$Q_{2^n} = \langle x, y | x^{2^{n-2}} = y^2,\ y^4 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1+2^{n-2}} \rangle$$

を位数 2^n $(n \geq 3)$ の一般四元数群とする．1 と z の中心加群は Q_{2^n} である．他の $2^{n-2}+1$ 個の共役類の元の中心化群はすべて巡回群である．

中心化群の構造と Corollary 7.9 から以下の事実が従う．

Corollary 7.11. *Let P be a dihedral group D_{2^n} of order 2^n $(n \geq 2)$. Then*

$$\mathrm{rank} B^c(P) - \mathrm{rank} R_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}(P)) = 4n - 4.$$

Corollary 7.12. *Let P be a semi-dihedral group SD_{2^n} of order 2^n $(n \geq 4)$. Then*

$$\mathrm{rank} B^c(P) - \mathrm{rank} R_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}(P)) = 4n - 7.$$

Corollary 7.13. *Let P be a generalized quaternion group Q_{2^n} of order 2^n $(n \geq 3)$. Then*

$$\mathrm{rank} B^c(P) - \mathrm{rank} R_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}(P)) = 4n - 10.$$

謝辞

世話人の増岡彰氏，和久井道久氏をはじめとして，集会の運営や講演の機会を与えてくださった関係者の方々に心より感謝します．

参考文献

[Bo97] S. Bouc, *Green functors and G-sets,* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1671, Springer, 1997.

[Bo00] S. Bouc, Burnside rings, Handbook of algebra, Vol. 2, 739-804,

[Bo03a] S. Bouc, Hochschild constructions for Green functors, *Comm. Algebra*, **31** (2003), 419–453.

[Bo10] S. Bouc, *Biset functors for finite groups,* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1990, Springer-Verlag, 2010.

[Bo06] S. Bouc, The Dade group of a p-group, *Invent. Math.*, **164** (2006), 189–231.

[BT00] S. Bouc and J. Thévenaz, The group of endo-permutation modules, *Invent. Math.*, **139** (2000), 275–349.

[CT00] J. F. Carlson and J. Thévenaz, oTorsion endo-trivial modules, *Algebr. Represent. Theory*, **3** (2000), 303–335.

[Da78a] D. Dade, Endo-permutation modules over p-groups I, *Ann. Math.*, **107** (1978), 459–494.

[Da78b] D. Dade, Endo-permutation modules over p-groups II,

[Dr72] A. W. M. Dress, Contributions to the theory of induced representations, Algebraic K-theory, II, 183–240, Lecture Notes in Math., **342**, Springer, Berlin, 1973.

[Dr86] V. G. Drinfel'd, Quantum groups, in *Proceedings International Congress of Mathematicians,* Berkeley, pp. 798–820, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986.

[Er90] K. Erdmann, Blocks of tame representation type and related algebras, Lecture Notes in Math.,**1428**, *Springer-Verlag,* (1900).

[Gr71] J. A. Green, Axiomatic representation theory for finite groups, *J. Pure and Appl. Algebra,***1**, (1971), 41–77.

[ML98] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, 2nd edition, GTM **5**, Springer, (1998).

[Od07] F. Oda, Crossed Burnside rings and Bouc's construction of Green functors, *J. Algebra* **315** (2007), 18–30.

[Od10] F. Oda, The Crossed Burnside Ring, the Drinfel'd Double, and the Dade Group of a p-Group, *Algebr. Represent. Theory* **13**, No. 2, (2010), 231–242.

[OY01] F. Oda and T. Yoshida, Crossed Burnside Rings I. The Fundamental Theorem, *J. Algebra* **236** (2001), 29–79.

[OY04] F. Oda and T. Yoshida, Crossed Burnside rings II. The Dress construction of a Green functor, *J. Algebra* **283** (2004), 58–82.

[Ro95] M. Rosso, Groupes quantiques et algébres de battage quantiques, *C. R. Acad. Sc. Paris* **320** (1995), 145–148.

[Th06] J. Thévenaz, Endo-permutation modules, a guide tour, *preprint* (2006).

[TW95] J. Thévenaz and P.J. Webb, The structure of Mackey functors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 1865-1961.

[We00] P. Webb, A guide to Mackey functor, In *Handbook of Algebra* Vol. 2, Elsevier Science B.V. (2000), 805–836.

[Wi04] S.J.Witherspoon, Products in Hochschild cohomology and Grothendieck rings of group crossed products, *Adv. Math.* **185** (2004), 136–158.

[Wi96] S.J.Witherspoon, The representation ring of the quantum double of a finite group, *J. Algebra* **179** (1996), 305–329.