数理解析研究所講究録
第1841巻 2013年 150-162

On Ishikawa's strong convergence theorem

横浜創学館高等学校　窪田 理英子 (Rieko Kubota)
YOKOHAMA SO-GAKUKAN HIGH SCHOOL
高橋非線形解析研究所　竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)
Takahashi Institute for Nonlinear Analysis

1 Introduction

1976年、石川先生は次の定理を証明した。

Theorem 1.1 (Ishikawa, 1976, [7]). $b \in (0,1)$ とする。C を実 *Banach* 空間 E の閉部分集合とし、T を $T(C)$ が *relatively compact* である C 上の非拡大自己写像とする。ある $u_1 \in C$ と, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を満たす実数列 $\{\alpha_n\}$ $[0,b]$ が存在し、次の手続き

$$u_{n+1} = \alpha_n T u_n + (1-\alpha_n) u_n \quad \text{for} \quad n \in N$$

で、C の点列 $\{u_n\}$ が生成されたとする。このとき、$\{u_n\}$ は T の不動点に強収束する。

C に凸を仮定し $\{u_n\}$ の生成を保証した Theorem 1.1 の系を通常は Ishikawa's strong convergence theorem と呼ぶ。石川先生は Theorem 1.1 を証明するために Lemma を 1 つ準備した。Ishikawa's Lemma はこの証明の主要部分である。1983年、Goebel-Kirk [5] は、この Lemma の証明を整理し hyperbolic(convex) 距離空間の点列の関係として 1 つの不等式を提示した。Convex 距離空間の概念は高橋先生 [15] によって提案されていた。これらの結果を受けて、2002年に、鈴木先生は適用範囲の広い Suzuki's Lemma を提示した。2 つの Lemma は共通する構造を持ち、C 上の自己写像 T の非拡大性と $T(C)$ の有界性を巧妙に結びつけた議論を含んでいる。もっとも、鈴木先生の Lemma では写像 T は表面に現れない。2 つの証明は一般の Banach 空間で議論されている。しかし、2 次元のユークリッド空間でも、内積の存在を忘れ純粋にノルムの性質だけでこの結果を示そうとすれば同様の議論が必要となる。つまり、必要な知識の多くは高校生に説明できる範囲内にあり、その他の予備知識を考慮しても、教養課程の範囲を出ない。私たちは、この 2 つの Lemma について教養過程を終了した学生にも理解できる証明を与えることが可能だと考えた。次のことが本稿の原点である。

1. Ishikawa's Lemma と Suzuki's Lemma に共通する構造を抽出する
2. 教養過程を終了した学生にも比較的容易に理解できる比較的簡潔な証明をつける

この過程の中で、私たちのもう 1 つの問題意識と結びつくアイデアが偶然に生まれた。幸運な副産物として石川先生の定理の拡張を得ることができた。

Ishikawa's strong convergence theorem の意義

実数をR、正の整数をN、非負の整数をN_0と表記する。$i,j\in N_0$, $i\leq j$としたとき、$N(i,j)$は$\{k\in N_0:\ i\leq k\leq j\}$を表す。$C$を実Banach空間$E$の空ではない集合とし$T$を$C$上の写像とする。$F(T)=\{x\in C:\ Tx=x\}$を$T$の不動点集合と呼ぶ。$T(C)$がrelatively compactとは$T(C)$を含むcompact集合が存在することである。$T$が縮小写像とは、ある$r\in[0,1)$が存在して、任意の$x,y\in C$について$\|Tx-Ty\|\leq r\|x-y\|$が成立することであり、$T$が非拡大写像とは、任意の$x,y\in C$について$\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|$が成立することである。縮小写像及び非拡大写像は本来は距離空間の写像概念である。$\|x-y\|$を距離関数を使った$d(x,y)$に置き換えれば本来の定義となる。$T(C)$　Cを満たすTを自己写像と呼ぶ。

次の2つはBrouwerの不動点定理及びBanach原理と呼ばれる重要な定理である。

Theorem 1.2 (Brouwer, 1912, [3], Hadamard, 1910, [6]). CをR^nの*compact*凸部分集合とし、gをCからCへの連続写像とする。このとき$g(z)=z$を満たす$z\in C$が存在する。

Theorem 1.3 (Banach, 1922, [2]). Cを完備距離空間とし、TをCからCへの縮小写像とする。このとき、$Tz=z$となる$z\in C$が唯1つ存在する。

Brouwerの不動点定理の真に初等的な証明は長い間知られず、Suzuki-Takeuchi [19]は100年ぶりにこの初等的な証明を得たと考えた。しかし、よく似た考えに立つPoincaré-Mirandaの定理の証明が、1997年にKulpa [9]によって提出されていることが判明した。Kulpaが単体という概念と決別していたかという疑念はあったが、彼らはKulpaのpriorityを受け入れこの初等的な証明の普及に尽力することとした。Brouwerの定理のBanach空間への拡張をSchauderの不動点定理と呼ぶ。一方、Banach原理(Banachの不動点定理)の証明はやさしい。しかし、石川先生の定理を含めて、不動点を近似する多くの収束定理はこの定理を祖とする系列に属する。石川先生の定理が現れる以前に次の定理が知られていた。

Theorem 1.4 (Edelstein, 1966, [4]). Cを狭義凸実*Banach*空間Eの*compact*凸部分集合とし、TをC上の自己写像で非拡大とする。点列$\{u_n\}$を

$$u_1\in C,\quad u_{n+1}=\tfrac{1}{2}Tu_n+\tfrac{1}{2}u_n\quad\text{for}\quad n\in N$$

で定義する。このとき$\{u_n\}$はTの不動点に強収束する。

Edelsteinの結果と比べると、石川先生のTheorem 1.1が当時画期的であったことが分る。

1. 空間の条件,　2. Cの条件,　3. 係数条件

の3点が変更された。1点目の改良が重要なことは明らかだが、2点目の重要性は意外に見過ごされているように思う。Edelsteinの仮定ではSchauderの定理によって不動点の存在は自明である。Edelsteinの証明は不動点の存在を前提としている。Theorem 1.1の証明にSchauderの定理は摘要できない。Theorem 1.1は自己充足した構成的な存在定理である。このことを確認した上で、Cに凸を仮定したTheorem 1.1の系をIshikawa's strong convergence theoremと呼ぶ。使用された近似法はKrasnoselskii-Mann iteration [10], [11]と呼ばれる。

2　強収束定理の proof line と新しい写像族

C 上の写像 T の吸引点 $A(T)$ と吸引不動点 $A_F(T)$ は次の様に定義される。

$$A(T) = \{u \in E : \|Tx - u\| \leq \|x - u\| \text{ for } x \in C\}, \quad A_F(T) = A(T) \cap C.$$

$A_F(T)$　$F(T)$ は明らかである。この概念は Takahashi-Takeuchi [18] によって提案された。通常、$F(T) \neq \emptyset$ とし、$x \in C, v \in F(T)$ について $\|Tx - v\| \leq \|x - v\|$ を満たす写像を準非拡大写像と呼ぶ。しかし、$F(T)$ が空か否かは私たちの考察の重要な対象である。したがって、本稿では準非拡大写像という概念に代えて $A_F(T) = F(T)$ という条件を使用する。

非拡大写像は非常に強い性質を持つ限定された特殊な写像族である。非拡大写像の定義は非常に simple であるが、その性質は多様である。たとえば、次の様な良い性質を持つ。

(1)　T は連続な写像である,　　(2)　$A_F(T) = F(T)$,

(3)　$\|x - Ty\| \leq \|Tx - x\| + \|x - y\|$　　for $x, y \in C$.

(1)(2) の性質は非拡大写像と切り離しても議論できる。(3) は (2) より強く、$\|x - Tx\|$ が充分小さければ x は吸引不動点と似た性質を持つことを示し、弱収束を考えるときに重要な性質である。非拡大写像について強収束定理の proof line を確認する。

T を閉集合 C 上の非拡大な自己写像とする。C の閉性 (完備性) が必要である。C に凸性を仮定すれば、任意の初期点から Krasnoselskii-Mann iteration で $\{u_n\}$ を生成できる。次の Step を順に示さねばならない。(a)–(d) を示すのに十分な条件を順に ( ) 内に記述する。

(a) $\lim_n \|Tu_n - u_n\| = 0$.　　(T が非拡大, $T(C)$ が有界)

(b) $\{u_n\}$ のある部分列 $\{u_i\}$ がある $u \in C$ に収束する

　　($T(C)$ が relatively compact)

(c) $u \in F(T)$.　　(T が連続)

(d) $\{u_n\}$ が u に収束する.　($A_F(T) = F(T)$ または $F(T)$ が 1 点集合)

(b) は (c)(d) に影響を与える。言い換えると $T(C)$ が relatively compact という条件は相当強い。したがって、より緩い条件で弱収束を考えるときには、(c)(d) の証明は T の非拡大性との密接な関係を必要とし簡単ではない。証明の構造を整理した。ここで T の連続性と $A_F(T) = F(T)$ を別扱いにすると、次の疑問が自然に浮かび上がる。

(a) $\lim_n \|Tu_n - u_n\| = 0$ を示すために T が非拡大という強い条件が必要だろうか？

$\{\alpha_n\}$　$[0,1]$ が与えられたとし、Krasnoselskii-Mann iteration によって、C の点列 $\{u_n\}$ を生成する。強収束定理の証明の中で、T の連続性と $A_F(T) = F(T)$ という性質を除いて考えれば、T の非拡大性は次の不等式を得るためだけに使用されている。

$$\begin{aligned}
\|Tu_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq \|Tu_{n+1} - Tu_n\| + \|Tu_n - u_{n+1}\| \\
&\leq \|u_{n+1} - u_n\| + \|Tu_n - u_{n+1}\| \\
&\leq \alpha_n \|Tu_n - u_n\| + (1 - \alpha_n)\|Tu_n - u_n\| = \|Tu_n - u_n\|.
\end{aligned}$$

条件の比較を見やすくするために、この式の2行目を削除する。

$$\begin{aligned}\|Tu_{n+1}-u_{n+1}\| &\leq \|Tu_{n+1}-Tu_n\|+\|Tu_n-u_{n+1}\| \\ &\leq \alpha_n\|Tu_n-u_n\|+(1-\alpha_n)\|Tu_n-u_n\| = \|Tu_n-u_n\|.\end{aligned}$$

次の2つの条件は $u_{n+1}=\alpha_n Tu_n+(1-\alpha_n)u_n$ という条件の下で同値である。

$$(A)\quad \|Tu_{n+1}-Tu_n\| \leq \|u_{n+1}-u_n\|,\quad (B)\quad \|Tu_{n+1}-Tu_n\| \leq \alpha_n\|Tu_n-u_n\|.$$

不等式 (A) は T の非拡大性から通常は導かれる。しかし、(A) を書き換えた (B) を素直に眺めたとき、この不等式から自然に想定される写像 T の条件は

$$\|T(cTx+(1-c)x)-Tx\| \leq c\|Tx-x\| \qquad \text{for } x\in C,\ c\in[0,1]$$

である。この条件は、T の非拡大性より弱く、しかも $\lim_n\|Tu_n-u_n\|=0$ を証明するのに十分である。私たちは、この simple なアイデアによって新しい写像族を提案する。

C を実 Banach 空間 E の凸集合とし、T を C 上の自己写像とする。

$c\in(0,1)$ とする。このとき、次の条件を満たす写像 T を Class (O_c) と呼ぶ。

$$(\mathrm{O_c})\qquad \|T(cTx+(1-c)x)-Tx\| \leq c\|x-Tx\| \quad \text{for} \quad x\in C.$$

また、次の条件を満たす写像 T を Class (O) と呼ぶ。

$$(\mathrm{O})\qquad \|T(cTx+(1-c)x)-Tx\| \leq c\|x-Tx\| \quad \text{for} \quad x\in C,\ c\in[0,1].$$

簡明さを重視し C を凸としたが、これらの写像族の定義に C の凸性は必ずしも必要ではないことを注意しておく。T が Class (O) ならば、任意の $c\in(0,1)$ について、Class (O_c) となることは明らかである。また、T が非拡大ならば T が Class (O) であることも明らかである。

最近、私たちと同じ方向で次の結果が既に存在することを知った。C を実 Banach 空間 E の部分集合とし T を C 上の写像とする。2008 年、Suzuki [14] は、T が次の条件を満たすとき Condition(C) を満たす写像と呼んだ。

$$(\mathrm{C})\qquad \tfrac{1}{2}\|x-Tx\| \leq \|x-y\| \quad \textit{implies} \quad \|Tx-Ty\| \leq \|x-y\| \quad \text{for} \quad x,y\in C.$$

この新しい写像族は様々な名で呼ばれるが、本稿では Class(C) と呼ぶことにする。Class(C) が非拡大写像を含むことは明らかである。鈴木先生は $A_F(T)=F(T)$ を示し、石川先生の定理と関係する次の定理を示した。原論文では C に compact を仮定しているが、石川先生の定理の仮定に揃えた。また、係数は $\{\alpha_n\}$ $[1/2,b]$ $[1/2,1)$ として良い。

Theorem 2.1 (Suzuki, 2008, [14]). C を実 *Banach* 空間 E の閉凸部分集合とし T を $T(C)$ が *relatively compact* である C 上の自己写像で Class(C) とする。$c\in[1/2,1)$ とし

$$u_1\in C, \qquad u_{n+1}=cTu_n+(1-c)u_n \quad \text{for} \quad n\in N$$

で点列 $\{u_n\}$ を定義する。このとき、$\{u_n\}$ は T の不動点に強収束する。

3 Lemmas

議論の準備として記法の説明と Lemma 3.1 が必要である。
$b \in (0,1)$ とし $\{\alpha_m\}$ $[0,b]$ とする。δ_i と A を次の様に定義する。

$$\delta_i = 1 - \alpha_i \quad \text{for} \quad i \in N, \qquad A = 1/(1-b).$$

任意の $n,k \in N$ について、$\alpha_n(k)$, $\delta_n(k)$ を次の様に定義する。

$$\alpha_n(k) = \alpha_n + \alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+k-1}, \quad \delta_n(k) = 1/(\delta_n \cdots \delta_{n+k-1}).$$

Lemma 3.1. $b \in (0,1)$ とし $\{\alpha_n\}$ $[0,b]$ とすれば、任意の $n,k \in N$ について

$$\delta_n(k) \le e^{\alpha_n(k)A} < e^{(1+\alpha_n(k))A}$$

が成立する。

Proof. 自然対数を用いて、$[0,\infty)$ で定義された関数 $h(x) = x - \log(1+x)$ を考える。任意の $x \in [0,\infty)$ について $h(x) \ge 0$ である。$n,k \in N$ を任意にとる。$i \in N$ とすれば

$$\tfrac{1}{\delta_i} = \tfrac{1}{1-\alpha_i} = \tfrac{1-\alpha_i}{1-\alpha_i} + \tfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i} = 1 + \tfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i} \le 1 + \tfrac{\alpha_i}{1-b} = 1 + \alpha_i A$$

となる。この 2 つの関係を利用して $\delta_n(k)$ から $\alpha_n(k)$ を引き出す。

$$\begin{aligned}
\log \delta_n(k) &= \log \tfrac{1}{\delta_n \cdots \delta_{n+k-1}} = \log \tfrac{1}{\delta_n} + \log \tfrac{1}{\delta_{n+1}} + \cdots + \log \tfrac{1}{\delta_{n+k-1}} \\
&\le \log(1+\alpha_n A) + \log(1+\alpha_{n+1}A) + \cdots + \log(1+\alpha_{n+k-1}A) \\
&\le \alpha_n A + \alpha_{n+1}A + \cdots + \alpha_{n+k-1}A = \alpha_n(k)A
\end{aligned}$$

となって、指数関数 e^x が狭義単調増加関数であることを考慮すると次の式を得る。

$$\delta_n(k) \le e^{\alpha_n(k)A} < e^{(1+\alpha_n(k))A}.$$

□

Lemma 3.2 (Kubota-Takeuchi). $b \in (0,1)$ とし $\{\alpha_m\}$ $[0,b]$ とする。$\{u_m\}$ と $\{w_m\}$ を、ある $n,k \in N$ について次の条件を満たす実 *Banach* 空間 E の点列とする。

(1) $u_{i+1} = \alpha_i w_i + (1-\alpha_i)u_i \qquad \text{for} \quad i \in N(n, n+k-1)$,

(2) ある非負の実数 $l_{(n,k)}$ について
$\|w_{i+1} - w_i\| \le \alpha_i \|w_i - u_i\| + l_{(n,k)} \qquad \text{for} \quad i \in N(n, n+k-1)$.

このとき、次の不等式が成立する。

$$(1+\alpha_n(k))d_n \le \|w_{n+k} - u_n\| + (\varepsilon_n(k) + k^3 l_{(n,k)})e^{(1+\alpha_n(k))A},$$

ただし、$d_n = \|w_n - u_n\|$, $\varepsilon_n(k) = \|w_n - u_n\| - \|w_{n+k} - u_{n+k}\|$ とする。

Proof. (1) より、$i \in N(n,n+k-1), j \in N$ とすると次の不等式が成立する。

$$\text{(a)} \quad \|w_j - u_{i+1}\| = \|w_j - \alpha_i w_i - (1-\alpha_i)u_i\| \\ \le \alpha_i \|w_j - w_i\| + (1-\alpha_i)\|w_j - u_i\|.$$

この関係と (2) より、$i \in N(n,n+k-1)$ とすると次の不等式を得る。

$$\|w_{i+1} - u_{i+1}\| \le \|w_{i+1} - w_i\| + \|w_i - u_{i+1}\| \\ \le \alpha_i \|w_i - u_i\| + l_{(n,k)} + (1-\alpha_i)\|w_i - u_i\| = \|w_i - u_i\| + l_{(n,k)}.$$

したがって、$i \in N(n,n+k-1)$ について次の (b)(c) を得る。[(d) は後に必要となる]。

$$\text{(b)} \quad \|w_i - u_i\| \le \|w_n - u_n\| + (k-1)l_{(n,k)} = d_n + (k-1)l_{(n,k)},$$

$$\text{(c)} \quad \|w_{i+1} - w_i\| \le \alpha_i \|w_i - u_i\| + l_{(n,k)} \le \alpha_i d_n + kl_{(n,k)},$$

$$\text{(d)} \quad \|w_{n+k} - u_{n+k}\| \le \|w_n - u_n\| + kl_{(n,k)} = d_n + kl_{(n,k)}.$$

(a),(c) を使って任意の $j \in N(0,k-1)$ について次の式が成立することを示す。

$$(*) \quad -\frac{\varepsilon_n(k) + (k-j)k^2 l_{(n,k)}}{\delta_{n+j} \cdots \delta_{n+k-1}} + (1 + \alpha_{n+j} + \cdots + \alpha_{n+k-1})d_n \le \|w_{n+k} - u_{n+j}\|.$$

$j = k-1$ のとき $(*)$ を示す。$\varepsilon_n(k) = d_n - \|w_{n+k} - u_{n+k}\|$ と $k \le k^2$ より

$$-\varepsilon_n(k) + d_n \le \|w_{n+k} - u_{n+k}\| \\ \le \alpha_{n+k-1}\|w_{n+k} - w_{n+k-1}\| + (1-\alpha_{n+k-1})\|w_{n+k} - u_{n+k-1}\| \\ \le \alpha_{n+k-1}(\alpha_{n+k-1}d_n + kl_{(n,k)}) + (1-\alpha_{n+k-1})\|w_{n+k} - u_{n+k-1}\| \\ \le \alpha_{n+k-1}^2 d_n + (1-\alpha_{n+k-1})\|w_{n+k} - u_{n+k-1}\| + kl_{(n,k)},$$

$$-\varepsilon_n(k) - k^2 l_{(n,k)} + (1-\alpha_{n+k-1}^2)d_n \le (1-\alpha_{n+k-1})\|w_{n+k} - u_{n+k-1}\|$$

となる。この式を $(1-\alpha_{n+k-1}) = \delta_{n+k-1}$ で割れば次の不等式を得る。

$$-\frac{\varepsilon_n(k) + 1 \cdot k^2 l(n)}{\delta_{n+k-1}} + (1 + \alpha_{n+k-1})d_n \le \|w_{n+k} - u_{n+k-1}\|.$$

$j \in N(1,k-1)$ について $(*)$ を仮定する。(c) によって、次の関係は明らかである。

$$\|w_{n+k} - w_{n+j-1}\| \\ \le \|w_{n+j} - w_{n+j-1}\| + \|w_{n+j+1} - w_{n+j}\| + \cdots + \|w_{n+k} - w_{n+k-1}\| \\ \le (\alpha_{n+j-1}d_n + kl_{(n,k)}) + (\alpha_{n+j}d_n + kl_{(n,k)}) + \cdots + (\alpha_{n+k-1}d_n + kl_{(n,k)}) \\ \le (\alpha_{n+j-1} + \alpha_{n+j} + \cdots + \alpha_{n+k-1})d_n + k^2 l_{(n,k)}.$$

したがって、次の不等式を得る。

$$-\frac{\varepsilon_n(k) + (k-j)k^2 l_{(n,k)}}{\delta_{n+j} \cdots \delta_{n+k-1}} + (1 + \alpha_{n+j} + \cdots + \alpha_{n+k-1})d_n \\ \le \|w_{n+k} - u_{n+j}\| \\ \le \alpha_{n+j-1}\|w_{n+k} - w_{n+j-1}\| + (1-\alpha_{n+j-1})\|w_{n+k} - u_{n+j-1}\| \\ \le \alpha_{n+j-1}(\alpha_{n+j-1} + \alpha_{n+j} + \cdots + \alpha_{n+k-1})d_n + k^2 l_{(n,k)} + (1-\alpha_{n+j-1})\|w_{n+k} - u_{n+j-1}\|.$$

右辺第1項と第2項を左辺に移項し $\delta_{n+j-1}=(1-\alpha_{n+j-1})$ で割る。ここで

$$
\begin{aligned}
(1+\alpha_{n+j}+\cdots+\alpha_{n+k-1})-\alpha_{n+j-1}(\alpha_{n+j-1}+\alpha_{n+j}+\cdots+\alpha_{n+k-1})\\
=(1-\alpha_{n+j-1}^2)+(\alpha_{n+j}+\cdots+\alpha_{n+k-1})-\alpha_{n+j-1}(\alpha_{n+j}+\cdots+\alpha_{n+k-1})\\
=(1-\alpha_{n+j-1})\big(1+\alpha_{n+j-1}+\alpha_{n+j}+\cdots+\alpha_{n+k-1}\big)
\end{aligned}
$$

と $1/\delta_{n+j-1}\le 1/(\delta_{n+j-1}\cdots\delta_{n+k-1})$ に注意すると次の関係を得る。

$$
-\frac{\varepsilon_n(k)+(k-(j-1))k^2 l_{(n,k)}}{\delta_{n+j-1}\cdots\delta_{n+k-1}}+(1+\alpha_{n+j-1}+\cdots+\alpha_{n+k-1})d_n\le\|w_{n+k}-u_{n+j-1}\|
$$

帰納法によって $(*)$ が任意の $j\in N(0,k-1)$ について成立する。$(*)$ で $j=0$ とし、左辺第1項を右辺に移項する。Lemma 3.1 とあわせると次の不等式を得る。

$$
(1+\alpha_n(k))d_n\le\|w_{n+k}-u_n\|+(\varepsilon_n(k)+k^3 l_{(n,k)})e^{(1+\alpha_n(k))A}.
$$

□

Lemma 3.3 (Suzuki's Lemma, 2005, [13]). $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の実数列とし、$\{u_n\}$, $\{w_n\}$ を *Banach* 空間 E の有界な点列とする。次の条件が成立することを仮定する。

(1) $u_{i+1}=\alpha_i w_i+(1-\alpha_i)u_i$ for $i\in N$,

(2) $0<\liminf_n\alpha_n\le\limsup_n\alpha_n<1$,

(3) $\limsup_n(\|w_{n+1}-w_n\|-\alpha_n\|w_n-u_n\|)\le 0$.

このとき、$\lim_n\|w_n-u_n\|=0$ である。[2002, Suzuki [12] も参照されたい] 。

Proof. $\{u_n\}$ と $\{w_n\}$ は有界であるから、$M=\sup\{\|w_n-u_m\|:\ m,n\in N\}<\infty$ となる。
(2) より、ある $a,b\in(0,1)$ と $n_1\in N$ が存在し、$n>n_1$ であれば $\alpha_n\in[a,b]$ となる。
任意の $n,k\in N$ について、$d_n=\|w_n-u_n\|$, $\varepsilon_n(k)=\|w_n-u_n\|-\|w_{n+k}-u_{n+k}\|$ とする。
$c=\limsup_n\|w_n-u_n\|$ とする。$0\le c\le M$ である。$c>0$ を仮定して矛盾を導く。
$a,c>0$ より、ある $k_0\in N$ が存在し、任意の $n>n_1$ について次の関係が成立する。

$$
M+1<\tfrac{1}{2}(1+k_0a)c\le\tfrac{1}{2}(1+\alpha_n(k_0))c.
$$

$\alpha_n\in[a,b]$ を使用した。$(1+\alpha_n(k_0))<(1+k_0)$ は明らかである。$\varepsilon\in(0,1)$ を1つとる。

$$
\varepsilon_1<\min\left\{\frac{\varepsilon}{(2+k_0^3)e^{(1+k_0)A}},\ \frac{c}{2(1+k_0)}\right\}\qquad(A=1/(1-b))
$$

を満たす $\varepsilon_1>0$ が存在する。$c=\limsup_n\|w_n-u_n\|$ と (3) より、ある $n_{\varepsilon_1}>n_1$ が存在し、$n\ge n_{\varepsilon_1}$ であれば次の関係が成立する。

$$
\|w_n-u_n\|<c+\varepsilon_1,\qquad\|w_{n+1}-w_n\|\le\alpha_n\|w_n-u_n\|+\varepsilon_1.
$$

2つめの不等式より、任意の $n\ge n_{\varepsilon_1}$ と $k\in N$ について、$l_{(n,k)}=\varepsilon_1$ として Lemma 3.2 (2) が成立する。仮定 (1) より Lemma 3.2 (1) も成立している。

再び $\limsup_n \|w_n - u_n\| = c$ より、次の様な $n_0 > n_{\varepsilon_1}$ が存在する。

$$0 < c - \varepsilon_1 < \|w_{n_0+k_0} - u_{n_0+k_0}\|.$$

このとき、$-\|w_{n_0+k_0} - u_{n_0+k_0}\| < -c + \varepsilon_1$ と $\|w_{n_0} - u_{n_0}\| < c + \varepsilon_1$ を確認しておく。
$l_{(n_0,k_0)} = \varepsilon_1$ とする。Lemma 3.2 の証明の中で次の関係 (d) を既に示した。

$$\text{(d)} \quad \|w_{n_0+k_0} - u_{n_0+k_0}\| \le \|w_{n_0} - u_{n_0}\| + k_0\varepsilon_1$$

この関係と確認したことによって、次の 2 つの不等式が成立する。

$$\begin{aligned} d_{n_0} = \|w_{n_0} - u_{n_0}\| &\ge \|w_{n_0+k_0} - u_{n_0+k_0}\| - k_0\varepsilon_1 \\ &> (c - \varepsilon_1) - k_0\varepsilon_1 = c - (1+k_0)\varepsilon_1 > c - c/2 = c/2. \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{n_0}(k_0) = \|w_{n_0} - u_{n_0}\| - \|w_{n_0+k_0} - u_{n_0+k_0}\| < 2\varepsilon_1$$

Lemma 3.2 と指数関数 e^x が狭義単調増加より次の関係を得て矛盾がでる。$c = 0$ を得る。

$$\begin{aligned} M + 1 &< \tfrac{1}{2}(1 + k_0 a)c \le \tfrac{1}{2}(1 + \alpha_{n_0}(k_0))c < (1 + \alpha_{n_0}(k_0))d_{n_0} \\ &\le \|w_{n_0+k_0} - u_{n_0}\| + (2\varepsilon_1 + k_0^3\varepsilon_1)e^{(1+k_0)A} < M + \varepsilon < M + 1. \end{aligned}$$

$c = 0$ と $0 \le \liminf_n \|w_n - u_n\| \le \limsup_n \|w_n - u_n\| = c$ より、$\lim_n \|w_n - u_n\| = 0$ を得る。 □

Lemma 3.4 (A virsion of Ishikawa's Lemma, Goebel-Kirk, 1983, [5]).
$b \in (0,1)$ とし、$\{\alpha_n\}$ 　$[0,b]$ とする。$\{u_n\}, \{w_n\}$ を実 *Banach* 空間 E の点列とする。任意の $i \in N$ について、次の条件が成立することを仮定する。

$$(1) \quad u_{i+1} = \alpha_i w_i + (1 - \alpha_i)u_i, \qquad (2) \quad \|w_{i+1} - w_i\| \le \alpha_i \|w_i - u_i\|.$$

(*a*) $\{\|w_n - u_n\|\}$ は広義単調減少である。

(*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ であり $\{u_n\}, \{w_n\}$ のどちらかが有界であれば、$\lim_n \|w_n - u_n\| = 0$ である。

Proof. 仮定より、任意の $n, k \in N$ について $l_{(n,k)} = 0$ として Lemma 3.2 (1)(2) が成立する。
(*a*) を示す。次の関係は (1)(2) より明らかである。

$$\begin{aligned} \|w_{i+1} - u_{i+1}\| &\le \|w_{i+1} - w_i\| + \|w_i - u_{i+1}\| \\ &\le \alpha_i\|w_i - u_i\| + (1 - \alpha_i)\|u_i - w_i\| = \|w_i - u_i\| \quad \text{for} \quad i \in N \end{aligned}$$

$\{\|w_n - u_n\|\}$ は広義単調減少である。$\lim_n \|w_n - u_n\|$ が存在する。$c = \lim_n \|w_n - u_n\|$ とする。
$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ とし $\{u_n\}$ と $\{w_n\}$ の 1 つを有界とする。$M = \sup\{\|w_n - u_m\| : m, n \in N\}$ とすれば、$\{\|w_n - u_n\|\}$ が広義単調減少より $M < \infty$ となる。任意の $n, k \in N$ について

$$\varepsilon(n) = \|w_n - u_n\| - c, \quad d_n = \|w_n - u_n\|, \quad \varepsilon_n(k) = \|w_n - u_n\| - \|w_{n+k} - u_{n+k}\|$$

とする。$\{\|w_n - u_n\|\}$ が広義単調減少より、$0 \le \varepsilon_n(k) \le \varepsilon(n)$, $\lim_n \varepsilon(n) = 0$, $c \le d_n$ となる。
(*b*) を示す。$0 \le c \le M$ である。$c > 0$ を仮定して矛盾を導く。$\varepsilon \in (0,1)$ を 1 つとる。

$$\varepsilon(n_0) < \varepsilon / \exp\big((M + 1 + c)A/c\big) \qquad (A = 1/(1-b)).$$

を満たす $n_0 \in N$ が存在する。任意の $k \in N$ について $\varepsilon_{n_0}(k) \leq \varepsilon(n_0)$ である。

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ であるから、この n_0 についてある $k_0 \in N$ が存在して次の関係が成立する。

$$M+1 < (1+\alpha_{n_0}(k_0))c < M+1+c, \qquad (1+\alpha_{n_0}(k_0)) < (M+1+c)/c.$$

$\varepsilon_{n_0}(k_0) \leq \varepsilon(n_0), c \leq d_{n_0}$ は既に確認している。$l_{(n_0,k_0)} = 0$ である。Lemma 3.2 と指数関数 e^x が狭義単調増加より、次の関係を得て矛盾がでる。$c = \lim_n \|w_n - u_n\| = 0$ を得る。

$$\begin{aligned} M+1 &< (1+\alpha_{n_0}(k_0))c \leq (1+\alpha_{n_0}(k_0))d_{n_0} \\ &\leq \|w_{n_0+k_0} - u_{n_0}\| + \varepsilon_{n_0}(k_0)\exp\big((1+\alpha_{n_0}(k_0))A\big) \\ &\leq \|w_{n_0+k_0} - u_{n_0}\| + \varepsilon(n_0)\exp\big((M+1+c)A/c\big) < M+\varepsilon < M+1. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.4 の直接の結果として Lemma 3.5 を得る。

Lemma 3.5 (A virsion of Ishikawa's Lemma, 1976, [7]). $b \in (0,1)$ とし、$\{\alpha_n\} \quad [0,b]$ とする。C を実 *Banach* 空間 E の部分集合とし、T を C 上の自己写像、$\{u_n\}$ を C の点列とする。任意の $i \in N$ について、次の条件が成立することを仮定する。

$$(1) \quad u_{i+1} = \alpha_i Tu_i + (1-\alpha_i)u_i, \qquad (2) \quad \|Tu_{i+1} - Tu_i\| \leq \alpha_i \|Tu_i - u_i\|.$$

このとき、$\{\|Tu_n - u_n\|\}$ は広義単調減少である。$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\{u_n\}$, $\{Tu_n\}$ のどちらかが有界であることを仮定すれば、$\lim_n \|Tu_n - u_n\| = 0$ である。

Lemma 3.5 で、T を非拡大写像として条件 (2) を除けば original の Ishikawa's Lemma となる。(2) を満たす写像族は非拡大写像に限定されないため Lemma 3.5 の表現を選んだ。

4 Results

集合 S のカージナル数を Card(S) とする。S が有限集合ならば Card(S) は要素の数である。

Theorem 4.1 (Kubota-Takeuchi). $b \in (0,1)$ とし、$\{\alpha_n\} \quad [0,b]$ は $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を満たすとする。C を実 *Banach* 空間 E の閉凸部分集合とし、T を $T(C)$ が *relatively compact* である C 上の自己写像で Class(O) とする。

$$(1) \quad T \text{ は連続}, \qquad (2) \quad F(T) = A_F(T) \text{ or } \mathrm{Card}(F(T)) \leq 1$$

を仮定し、点列 $\{u_n\}$ を次の様に定義する。

$$u_1 \in C, \quad u_{n+1} = \alpha_n Tu_n + (1-\alpha_n)u_n \quad \text{for} \quad n \in N.$$

このとき、$\{u_n\}$ は T の不動点に強収束する。

Proof. Iteration の定義と T が Class(O) より、Lemma 3.5 (1)(2) が明らかに成立する。

Lemma 3.5 より $\{\|Tu_n - u_n\|\}$ は広義単調減少である。$\{\alpha_n\}$ の条件と $T(C)$ が relatively compact より、Lemma 3.5 によって $\lim_n \|Tu_n - u_n\| = 0$ である。

また、ある $u\in E$ に収束する $\{Tu_n\}$ の部分列 $\{Tu_{n_j}\}$ が存在する。

$$\|u-u_{n_j}\|\le\|u-Tu_{n_j}\|+\|Tu_{n_j}-u_{n_j}\| \quad \text{for} \quad j\in N$$

と $\lim_j\|Tu_{n_j}-u\|=0$、$\lim_j\|Tu_{n_j}-u_{n_j}\|=0$ より、$\{u_{n_j}\}$ も u に収束する。C が閉集合より $u\in C$ である。$\{u_{n_j}\}$ は $u\in C$ に収束し T は連続である。次の式より $u\in F(T)$ を得る。

$$\|Tu-u\|\le\|Tu-Tu_{n_j}\|+\|Tu_{n_j}-u\| \quad \text{for} \quad j\in N.$$

$\mathrm{Card}(F(T))\le 1$ を仮定すれば $F(T)=\{u\}$ となる。$\{u_{n_i}\}$ を任意の部分列とする。$\{u_{n_i}\}$ がある v に収束すれば、$v\in F(T)$、つまり $v=u$ が次の式からわかる。

$$\|Tv-v\|\le\|Tv-Tu_{n_i}\|+\|Tu_{n_i}-u_{n_i}\|+\|u_{n_i}-v\| \quad \text{for} \quad i\in N.$$

よって、$\{u_n\}$ が u に収束する。次に $F(T)=A_F(T)$ とすれば、$u\in A_F(T)$ より

$$\|u_{n+1}-u\|\le\alpha_i\|Tu_n-u\|+(1-\alpha_n)\|u_n-u\|\le\|u_n-u\| \quad \text{for} \quad n\in N$$

が成立する。$\{\|u_n-u\|\}$ は 0 を下界とする広義単調減少収束列である。$\{\|u_n-u\|\}$ の部分列 $\{\|u_{n_j}-u\|\}$ は $\lim_j\|u_{n_j}-u\|=0$ を満たす。$\lim_n\|u_n-u\|=0$ を得る。 □

T を実Banach 空間 E の閉凸部分集合 C で定義された非拡大写像とする。明らかに、T は C 上の連続写像かつ Class(O) でり $A_F(T)=F(T)$ を満たす。Theorem 4.1 によって、Ishikawa's strong convergence theorem (Theorem 1.1 の系) を得る。Theorem 4.1 と同様に Theorem 4.2 が得られる。Theorem 4.1, 4.2 は Theorem 1.1 の様に C に凸性を仮定しない形にも書ける。

Theorem 4.2 (Kubota-Takeuchi). $c\in(0,1)$ とする。C を実 *Banach* 空間 E の閉凸部分集合とし、T を $T(C)$ が *relatively compact* である C 上の自己写像で Class(O_c) とする。

$$(1)\quad T \text{ は連続}, \qquad (2)\quad F(T)=A_F(T) \ \text{ or } \ \mathrm{Card}(F(T))\le 1$$

を仮定し、点列 $\{u_n\}$ を次の様に定義する。

$$u_1\in C, \quad u_{n+1}=cTu_n+(1-c)u_n \quad \text{for} \quad n\in N.$$

このとき、$\{u_n\}$ は T の不動点に強収束する。

5 ささやかな見解と examples

1 次元及び 2 次元ユークリッド空間 R, R^2 での example をいくつか提出する。これらの example で自己写像 T の定義域 C はすべて compact 凸である。また、初期点 u_1 に関わらず、Krasnoselskii-Mann iteration で生成された点列 $\{u_n\}$ はすべて不動点に収束する。Iteration の係数を $\alpha_n=1/2$ に限定して考察すれば議論が簡明になる。よって Theorem 4.2 だけに言及する。Example 1 だけが石川の定理を摘要できるケースである。Theorem 4.2 は Example 2,3 にも摘要することができる。しかし、Example 4,A,B,C については石川の定理も Theorem 4.2 もそのままでは摘要できない。このような簡単な例が多数存在することは、提示する example を検討すれば明らかである。

Example 1. $C=[0,1]^2$, $F=\{(x_1,x_2)\in C:\ x_1=0\}$,

$$T(x_1,x_2)=\tfrac{1}{2}(x_1,x_2)+\tfrac{1}{2}(0,x_2) \quad \text{for} \quad (x_1,x_2)\in C.$$

T は非拡大写像である。$A_F(T)=F(T)=F$ である。石川の定理が摘要できる。

Example 2. $C=[0,1]^2$, $F=\{(x_1,x_2)\in C:\ x_1=0\}$,

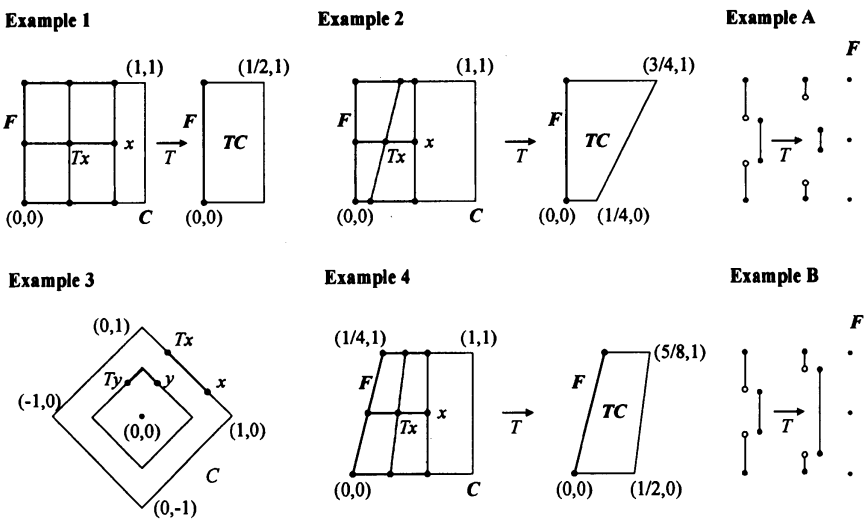
$$T(x_1,x_2)=\tfrac{1}{4}\big(\,(1+2x_2)(x_1,x_2)+(3-2x_2)(0,x_2)\,\big)\quad\text{for}\quad (x_1,x_2)\in C.$$

T は非拡大写像ではない。T は連続写像であり Class($\mathrm{O}_{1/2}$) である。$F(T)=A_F(T)=F$ (準非拡大) である。Theorem 4.2 が摘要できる。

Example 3. $C=\{(x_1,x_2)\in R^2:\ |x_1|+|x_2|\le 1\}$, $a_1=(1,0)=-a_3$, $a_2=(0,1)=-a_4$. とする。$T(0,0)=(0,0)$ とする。任意の $y\in C$ ($y\neq(0,0)$) について、ある $k\in(0,1]$, $t\in[0,1)$, $i\in\{1,2,3,4\}$ が存在し $y=(1-t)ka_i+tka_{i+1}$ と ($i=i'$ mod 4) と書ける。Ty を次の様に定義する。

$$Ty=T(\,(1-t)ka_i+tka_{i+1}\,)=(\tfrac{1}{2}-t)ka_i+(\tfrac{1}{2}+t)ka_{i+1}\qquad t\in[0,\tfrac{1}{2}],$$
$$Ty=T(\,(1-t)ka_i+tka_{i+1}\,)=(\tfrac{3}{2}-t)ka_{i+1}+(t-\tfrac{1}{2})ka_{i+2}\quad t\in(\tfrac{1}{2},1).$$

$y\in C$ は図の様な小正方形の周上にある。T は、この周上左回りに 1 辺の 1/2 だけずらす写像であり回転のアナロジーである。T は連続写像であり Class($\mathrm{O}_{1/2}$) である。$F(T)=\{(0,0)\}$, $A_F(T)=\emptyset$ である。したがって、$A_F(T)\neq F(T)$ である (準非拡大ではない)。$F(T)$ が 1 点集合であるから Theorem 4.2 が摘要できる。T^2 は 90° の回転となり非拡大写像である。



Example 4. $C=\{(x_1,x_2)\in[0,1]^2:\ x_2\le 4x_1\}$, $F=\{(x_1,x_2)\in C:\ x_2=4x_1\}$,

$$T(x_1,x_2)=\tfrac{1}{2}(x_1,x_2)+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}x_2,x_2)\quad\text{for}\quad (x_1,x_2)\in C.$$

T は連続写像で Class($\mathrm{O}_{1/2}$) である。$F=F(T)\neq A_F(T)=\{(0,0)\}$ より Theorem 4.2 は摘要できない。

Example A. $C=[0,1]=D_1\cup D_2\cup D_3$, $D_1=[0,\tfrac{1}{3})$, $D_2=[\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}]$, $D_3=(\tfrac{2}{3},1]$,

$$Tx=\tfrac{1}{2}x\quad\text{for } x\in D_1,\quad Tx=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\quad\text{for } x\in D_3,\quad Tx=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}\quad\text{for } x\in D_2.$$

T は連続写像ではないが Class($\mathrm{O}_{1/2}$) である。$\{0,\tfrac{1}{2},1\}=F(T)\neq A_F(T)=\emptyset$ である。Theorem 4.2 は摘要できない。各 D_i の上で T は非拡大である。

Example B. Example A と同じ設定とし、D_2 上の T の定義だけを次の様に変更する。

$$Tx=2x-\tfrac{1}{2}\quad\text{for } x\in D_2.$$

T は連続写像であるが Class($O_{1/2}$) ではない。$\{0, \frac{1}{2}, 1\} = F(T) \neq A_F(T) = \emptyset$ である。Theorem 4.2 は摘要できない。初期点に依存するが、充分大きな $l \in N$ をとれば点列 $\{u_n\}_{n \geq l}$ は $D_1, D_3, F_2 = \{\frac{1}{2}\}$ のいづれかに含まれてしまう。各 D_1, D_3, F_2 の上で T は非拡大である。D_1, D_3 は閉集合ではないが、これは本質的ではない。

Example C. $C = [0,1] = D_1 \cup D_2,\ D_1 = [0, \frac{2}{3}],\ D_2 = (\frac{2}{3}, 1]$,

$$Tx = \frac{1}{2}x \quad \text{for } x \in D_1, \quad Tx = 2x - \frac{4}{3} \quad \text{for } x \in D_2.$$

T は連続写像でも Class($O_{1/2}$) でもない。$F(T) = A_F(T) = \{0\}$ である。Class($O_{1/2}$) と $A_F(T) = F(T)$ を満たす (準非拡大) 写像族の間に包含関係はない。Theorem 4.2 は摘要できないが、$\{u_n\}$ は T の不動点に収束する。図は省略した。

Example 1,2,4 を比較すると、非拡大や準非拡大という写像の性質は、ごく微小な同相的変形でも一般には保存されないことが分る。**Example 4** は $F(T) = A_F(T)$ という条件が粗いのではないかということを示唆する。**Example A, B** は T が C 全体で連続という仮定や $A_F(T) = F(T)$ という仮定が共に粗いのではないかということを示唆する。また、あらかじめこのように定義域を分割することは、一般には簡単ではないであろうことを **Example 3** が示唆する。私たちは、従来の収束定理の仮定は粗いのではないかと考えた。次のことを問題とした。

- 点列 $\{u_n\}$ の有限個の項は収束に関係しない。
- T が C 全体で連続という仮定は粗すぎるのではないか？
- 不動点が C のすべての点を吸引するという仮定 $A_F(T) = F(T)$ は粗いのではないか？
- C が凸という仮定は自然な仮定か？

このような観点から、私たちは生成された点列 $\{u_n\}$ に密着した条件で一度は収束定理を記述する必要があるのではないかと考えた。これが Lemma 5.1 を記述する理由である (証明は略す)。Lemma 5.1 はここで提示した Example C を除く総てに摘要できる。ただし、Lemma が適用可能かどうかの判断は個々の具体的な問題に即して考えることになる。

C を実 Banach 空間 E の部分集合とし、T を C 上の自己写像、$\{u_n\}$ を C の点列とする。T が $\{u_n\}-$ 連続とは、部分列 $\{u_{n_j}\}$ が $u \in C$ に収束するならば $\{Tu_{n_j}\}$ が Tu に収束することとする。T が連続であれば明らかに $\{u_n\}-$ 連続である。$l \in N$ とし、$A(T, u_n, l) = \{u \in E : \|Tu_n - u\| \leq \|u_n - u\| \text{ for } n \geq l\}$ とする。$A(T)$ 　$A(T, u_n, l)$ である。

Lemma 5.1 (Kubota-Takeuchi). $b \in (0,1)$ とし、$\{\alpha_n\}$ 　$[0,b]$ は $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を満たすとする。C を実 *Banach* 空間 E の閉凸部分集合とし、T を $T(C)$ が *relatively compact* である C 上の自己写像とする。$\{u_n\}$ を C の点列とする。ある $n_0 \in N$ が存在し、$i \geq n_0$ について次の条件の成立を仮定する。

$$(1) \quad u_{i+1} = \alpha_i T u_i + (1 - \alpha_i) u_i, \qquad (2) \quad \|Tu_{i+1} - Tu_i\| \leq \alpha_i \|Tu_i - u_i\|.$$

このとき、$\lim_n \|Tu_n - u_n\| = 0$ であり、ある $u \in C$ に強収束する部分列 $\{u_{n_j}\}$ が存在する。
更に、次の事項が成立する。

(c) T が $\{u_n\}-$ 連続であれば $u \in F(T)$ である。
このとき、Card($F(T)$) ≤ 1 ならば $\{u_n\}$ は u に強収束する。

(d) ある $l_0 \in N$ が存在し $u \in A(T, u_n, l_0)$ であれば、$\{u_n\}$ は u に強収束する。

私たちは、Lemma 5.1 が Theorem 4.1 4.2 より重要かもしれないと考えている。
実際には、Lemma 5.1 を最初に証明しこの系として Theorem 4.1 4.2 を得た。

東京工業大学 高橋渉 先生の平素からの丁寧なご指導に感謝し、慶應義塾大学 小宮英敏 先生、九州工業大学 鈴木智成 先生に有益なご教示をいただいたことを記して稿を閉じる。

References (必要最小限の文献及び引用した文献を挙げた)

[1] Aoyama, K., Iemoto, S., Kohsaka, F. and Takahashi, W. *"Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces"*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 335–343.

[2] S. Banach, " Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application atix équations intégrales ", Fund. Math., 3 (1922), 133-181 (French).

[3] L. E. J. Brouwer, *Uber Abbildung der Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann., **71** (1912), 97–115.

[4] M. Edelstein, *"A remark on a theorem of M. A. Krasnoselski"*, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 509–510

[5] K. Goebel and W. A. Kirk,, *"Iteration processes for nonexpansive mappings"*, Contemp. Math., 21 (1983), 115–123.

[6] J. Hadamard, *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, in J. Tannery (Ed.): Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, Vol. 2, Hermann (1910), pp. 875–915 (French).

[7] S. Ishikawa, *"Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space"*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976), no.1, 65–71.

[8] P. Kocourek, W. Takahashi and J.-C. Yao, *"Fixed point theorems and weak convergence theorems for genelalized hybrid mappings in Hilbert spaces"*, Taiwanese J. Math. **14** (2010), 2497–2511.

[9] W. Kulpa, *"The Poincare-Miranda theorem"*, Amer. Math. Monthly, **104** (1997), 545–550.

[10] M. A. Krasnoselskii, *"Two remarks on the method of successive approximations"*, Uspehi Mat. Nauk 10 (1955), 123–127 (Russian).

[11] W. R. Mann, *"Mean value methods in iteration"*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[12] T. Suzuki, *"Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces"*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 381–391.

[13] T. Suzuki, *"Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces"*, Fixed Point Theory and Applications, (2005).

[14] T. Suzuki, *"Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings"*, J. Math. Anal. Appl. **340**, (2008) 1088-1095.

[15] W. Takahashi, *"A convexity in metric space and nonexpansive mappings. I."*, Kodai Math. Sem. Rep. **22**, No. 2 (1970) 142–149.

[16] W. Takahashi, *"Nonlinear Functional Analysis"*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[17] W. Takahashi, *"Introduction to Nonlinear and Convex Analysis"*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.

[18] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *"Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space"*, J. Nonlinear Convex Anal. **12 No 2** (2011), 399–406.

[19] Y. Takeuchi and T.Suzuki, *"An easily verifiable proof of the Brouwer fixed point theorem"*, Bull. Kyushu Inst. Tech. 59 (2012), 1–5.