数理解析研究所講究録
第 1841 巻 2013 年 163-176

均衡点問題へ定式化可能な経営戦略モデルとその実例

東京理科大学理工学部情報科学科　児玉賢史 (Satoshi Kodama)
Department of Information Sciences, Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

1　はじめに

本講究録では、「Nash 均衡定理」と「Stackelberg 均衡定理」という均衡点理論を用いることで、経営戦略に関しての数学的な裏付けについて考えることにする。

今回挙げる例のように、実社会において、1 対 1 対応もしくは多対 1 対応のみを扱う今までの数学モデルでは不十分であることが近年知られてきている。例えばそのような一例として、『与えられた条件下で存在する最適経営戦略等は常に一つとは限らない』というような場合が考えられる。つまり、そのような状況に対応できるような 1 対多対応を取り扱うことのできる数学モデルが必要とされている。

そこで今回は均衡点理論についての経営戦略の一例として、特に複占市場[1]と寡占市場[2]の場合を例として用いることにより、built-in-stabilizer(価格自動安定化装置) と first-come, first-served(早い者勝ち) という経営戦略に関しての考察を行うことにする。また今回は、今までに得られている均衡点理論に基づいて、与えられた問題を非線形解析学を用いて解くのではなく、特に既存の均衡点問題に帰着することへの可能性について考察する。

2　Stackelberg 均衡点と Cournot の複占市場モデル

本節では多種多様にわたる経営モデルのうち、複占市場で商品寿命の長い商品に対しての考察を行うことにする。

一般に経営戦略において、2 つの企業が同品質の製品を生産して市場に送りこむ場合、どちらの企業も生産コストを可能な限り小さくすることが求められる。しかしながら、2 社の事業規模に応じて差が生じることは明らかである。例えば、オートメーション化された大企業とそうでない企業とでは避けがたい生産性の差が発生する。また例えば、電気製品の様な「中長期的に買い替える必要の無い物」か又は生鮮食料品の様な「すぐに消費する製品」かよっても両社に経営戦略上の違いが生じてくるのは明確である。

先述した前提に基いて、ある消費市場に 2 つの企業 A、B が全く同じ商品を製作して送りこむことを想定する。この場合、商品生産量が少ないと総売り上げが少なくなり、また、商品生産量が多くなると消費市場中に余りが生じて生産費用が増えてしまう。この様な条件下で自社

[1] 消費者市場を 2 社で占有する市場
[2] 消費者市場を 3 社以上で占有する市場

の純益が最大になるような最適商品生産量を考えることにする。即ち、市場完売の原理[3]が成立するという前提での最適商品生産量を求めることにする。

先に述べた経営モデルをもとに、A 社をオートメーション化された大企業とし、B 社をそうでない企業とする。つまり、A 社の方が B 社に比べて安価で大量に生産可能であると仮定する。その場合、A 社と B 社における商品単価あたりの製作費を順に c_1 円、c_2 円と置くと、必然的に $c_1 < c_2$ が成立する。さらに、A 社と B 社の商品生産量を順に x_1、x_2 とし、一般に市場に出回っている総量が多いと価格が下落するため、それを考慮して、市場最高高値を a 円、市場価格の減少率を b 円と置くと、その消費市場におけるその商品の販売価格関数 $p(x_1, p_2)$ は、

$$p(x_1, x_2) = a - b(x_1 + x_2)$$

となる。また、上記の設定のもとで A 社の総売上げを計算すると $p(x_1, x_2)x_1$ が成立する。

ここで A 社の商品生産費用は c_1x_1 であるから、A 社の純益 $f_1(x_1, x_2)$ は、

$$f_1(x_1, x_2) = x_1p(x_1, x_2) - c_1x_1$$

によって決定される。同様にして、B 社の純益 $f_2(x_1, x_2)$ は、

$$f_2(x_1, x_2) = x_2p(x_1, x_2) - c_2x_2$$

となる。

商品の市場への投入に際して、2 社に順番付がなされていることを想定すると、

(1). A 社が先手、B 社が後手
(2). B 社が先手、A 社が後手

の 2 種類しか存在しない。そこでまず (1) の場合を考える。A 社が先手をとり、 x_1 だけ商品を市場に送り込んだとすると、そのときの B 社の最適商品生産量、即ち自社の純益を最大にする商品生産量 $r_2(x_1)$ は

$$r_2(x_1) = \frac{a - c_2}{2b} - \frac{x_1}{2}$$

で与えられることになる（これは、$r_2(x_1)$ は x_1 を定数とみなしたとき、$f_2\bigl(x_1, r_2(x_1)\bigr) = \max_{x_2} f_2(x_1, x_2)$ の解として定義されるからである)。結果的に

$$f_2(x_1, x_2) = \bigl\{a - b(x_1 + x_2)\bigr\}x_2 - c_2x_2$$

であるから、$r_2(x_1)$ は、上式の最大値を与える x_2 として求められる。同様にして、(2) の場合は、B 社が先手をとって x_2 だけ商品を市場に送り込んだとした場合、A 社の最適商品生産量 $r_1(x_2)$ は

$$r_1(x_2) = \frac{a - c_1}{2b} - \frac{x_2}{2}$$

[3]消費市場に送り込まれた商品の総量が過不足なく完売するという原理

で与えられることになる。なお、r_1 及び r_2 はそれぞれ一般に、A 社の B 社に対する反応関数、B 社の A 社に対する反応関数と呼ばれている。

(1) の場合において、経営戦略において先手をとった A 社は、後手となった B 社が自らの最適商品生産量分だけ製品を生産すると考える。従って、自社の利益は、A 社と B 社の商品生産量の組 $\bigl(x_1, r_2(x_1)\bigr)$ により決定されることになる。よって先手となった A 社は、$f_1\bigl(x_1, r_2(x_1)\bigr)$ を最大にする x_1 を商品生産量として定めれば良いことが分かる。今、この値を x_1^{S12} とすると、x_1^{S12} は具体的に

$$f_1\bigl(x_1^{S12}, r_2(x_1^{S12})\bigr) = \max_{x_1} f_1\bigl(x_1, r_2(x_1)\bigr)$$

の解として求められ、これは 2 次関数の極値問題に帰着する。従って、

$$x_1^{S12} = \frac{a - 2c_1 + c_2}{2b}$$

となる。このことから (1) の状況での B 社の最適商品生産量 x_2^{S12} は、

$$\begin{aligned} x_2^{S12} &= r_2(x_1^{S12}) \\ &= \frac{a + 2c_1 - 3c_2}{4b} \end{aligned}$$

で与えられることになる。以上のことからまとめると、

$$\begin{aligned} (x_1^{S12}, x_2^{S12}) &= \bigl(x_1^{S12}, r_2(x_1^{S12})\bigr) \\ &= \left(\frac{a - 2c_1 + c_2}{2b}, \frac{a + 2c_1 - 3c_2}{4b}\right) \end{aligned}$$

と記述することができる。よって、ここで求めた点 (x_1^{S12}, x_2^{S12}) が A 社を先手、B 社を後手としたときの Stackelberg 均衡点 (St_1) となる。(2) の場合も同様にして求められる。即ち、A 社を後手、B 社を先手としたときの、Stackelberg 均衡点 (St_2) を (x_1^{S21}, x_2^{S21}) と置くと、

$$\begin{aligned} (x_1^{S21}, x_2^{S21}) &= \bigl(r_1(x_2^{S21}), x_2^{S21}\bigr) \\ &= \left(\frac{a + 2c_2 - 3c_1}{4b}, \frac{a - 2c_2 + c_1}{2b}\right) \end{aligned}$$

で与えられる。よって、A 社が先手、B 社が後手であるときの Stackelberg 均衡点 St_1 における両企業の純益は

$$\bigl(f_1(x_1^{S12}, x_2^{S12}), f_2(x_1^{S12}, x_2^{S12})\bigr) = \left(\frac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{8b}, \frac{(a + 2c_1 - 3c_2)^2}{16b}\right)$$

で与えられ、B 社が先手、A 社が後手であるときの Stackelberg 均衡点 St_2 における両企業の

純益は

$$\left(f_1(x_1^{S21}, x_2^{S21}), f_2(x_1^{S21}, x_2^{S21})\right) = \left(\frac{(a+2c_2-3c_1)^2}{16b}, \frac{(a-2c_2+c_1)^2}{8b}\right)$$

で与えられることになる。

3 Nash 均衡点と価格自動安定化現象

本節では Nash 均衡戦略を利用することにより、比較的商品寿命の短い商品を取り扱う複占市場において成り立つ「商品販売価格の自動安定化現象」を数学的に示すことにする。

前節と同じ仮定の下で、商品生産効率の良い A 社と商品生産効率の低い B 社が、絶えず商品を作製して市場に送り込むという状況を考える。ただし、本節においては、先ほどと異なり、A 社と B 社の市場投入時期がほぼ同時であったと設定する。言い換えれば、前節の状況と異なり、市場投入順序における先手か後手かについては基本問題にならないという状況を想定する。

今、両社の生産量に関する Nash 均衡点 $N(x_1^*, x_2^*)$ を

$$\begin{cases} f_1(x_1^*, x_2^*) = \max\limits_{x_1} f_1(x_1, x_2^*) \\ f_2(x_1^*, x_2^*) = \max\limits_{x_2} f_2(x_1^*, x_2) \end{cases}$$

の解として定義する。この均衡点に従って両者が生産量を決定する場合、「B 社が Nash 均衡点に従って定められた生産量 x_2^* を守り続ける限りは、A 社が自らの純益を最大にする生産量は x_1^* である」、また、「A 社が Nash 均衡点に従って定められた生産量 x_1^* を守り続ける限りは、B 社が自らの純益を最大にする生産量は x_2^* である」ということになる。つまり、一般に各社が同時に「Nash 均衡点に基づく生産量を自社の最適商品生産量」として決定した場合、2 社とも以後は「自らの生産量を変化させないことが適切である」という前提に基いて行動すると仮定できる。そこで、Cournot の複占市場モデルにおける Nash 均衡点を具体的に導入すると、Nash 均衡点 $N(x_1^*, x_2^*)$ の定義式から

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, x_2^*) &= \max_{x_1} f_1(x_1, x_2^*) \\ f_2(x_1^*, x_2^*) &= \max_{x_2} f_2(x_1^*, x_2) \end{aligned}$$

が得られる。上式を反応関数 r_1, r_2 の記号を用いて記述すると

$$\begin{aligned} x_1^* &= r_1(x_2^*) \\ x_2^* &= r_2(x_1^*) \end{aligned}$$

となり、反応関数は既に求められているため

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{a-c_1}{2b} - \frac{x_2^*}{2} \\ x_2^* &= \frac{a-c_2}{2b} - \frac{x_1^*}{2} \end{aligned}$$

という連立方程式を解くことになる。よって、

$$x_1^* = \frac{a-2c_1+c_2}{3b}$$
$$x_2^* = \frac{a-2c_2+c_1}{3b}$$

を得ることができる。

ここで、複占市場の場合に連続的商品投入に依存して引き起こされる市場販売価格の時間的変動を適用することを考える。今回はA社とB社が交互に相手が直前に投入した商品の量を確認し、それに基づいて自らの純益を最大にするような最適商品生産量を市場へ投入する「交互商品投入型」と呼ばれる投入形式について考察する。

まず時点 n において、A社が

$$x_1^n$$

だけの商品を投入した場合、B社は時点 $n+1$ において、

$$x_2^{n+1} = r_2(x_1^n)$$

だけの商品を市場を市場に投入する。この状況を受けて、交互に商品を投入するのでA社は時点 $n+2$ において、

$$x_1^{n+2} = r_1(x_2^{n+1})$$

だけの商品を市場に再度投入することになる。以下各社がこの手順を交互に繰り返すこととする。つまりA社が先手となり、最初の商品投入量が x_1^0 であるとして、交互商品投入型で市場投入が行われる形式の場合は、

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{2n} = x_1^*$$
$$\lim_{n\to\infty} x_1^{2n+1} = x_2^*$$

となる。なお、この収束状況は視覚的にも容易に確認することができる。まず縦軸を x_2、横軸を x_1 として2つの反応関数 $x_2 = r_2(x_1)$、$x_1 = r_1(x_2)$ をグラフにすることを考える。A社、B社の反応関数をもとに、A社の反応集合 R_1、B社の反応集合 R_2 をそれぞれ、

$$R_1 = \left\{ \left(r_1(x_2), x_2\right) \,\middle|\, 0 \le x_2 \le \frac{a-c_1}{b} \right\}$$

$$R_2 = \left\{ \left(x_1, r_2(x_1)\right) \,\middle|\, 0 \le x_1 \le \frac{a-c_2}{b} \right\}$$

と定義すると、Nash均衡点は $R_1 \cap R_2$ と一致する(図1. 参照)。

ここで、交互商品投入型の定義に基づいて、A社に関する時間的変化を表す数列、即ち、最適商品生産量の時間的推移は、

$$\{x_1^{2n}; n = 0, 1, 2, \cdots\}$$

で与えられ、B社に関する時間的変化を表す数列、即ち、最適商品生産量の時間的推移は、

$$\{x_2^{2n+1}; n = 0, 1, 2, \cdots\}$$

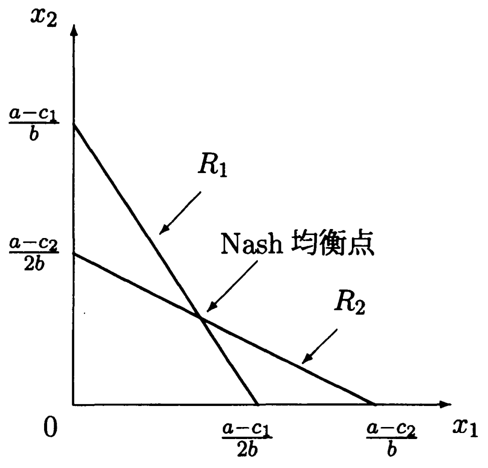

図 1. 各社の反応集合のグラフ

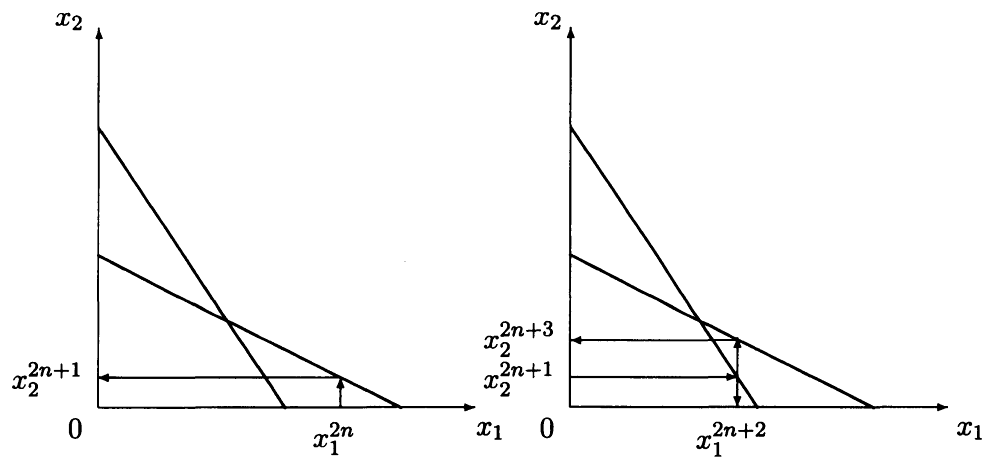

図 2. 最適商品生産量の時間的推移

で与えられることになる。以上のことから、各社の最適商品生産量が両社の反応集合の間を行き来しながら、Nash 均衡点 (x_1^*, x_2^*) に収束していくことが確認できる (図 2. 参照)。

各社の最適商品生産量への収束とは、販売価格が安定化することと同じことである。言い換えると、商品市場価格に対して

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p(x_1^n, x_2^{n+1}) &= \lim_{n\to\infty} p(x_1^{n+2}, x_2^{n+1}) \\ &= p(x_1^*, x_2^*)\end{aligned}$$

が成り立つことと同じ意味である。以上のことから、時間が十分に経過した場合、両社の最適商品生産量が Nash 均衡点に収束するという現象を示すことができたと考えられる (図 3. 参照)。

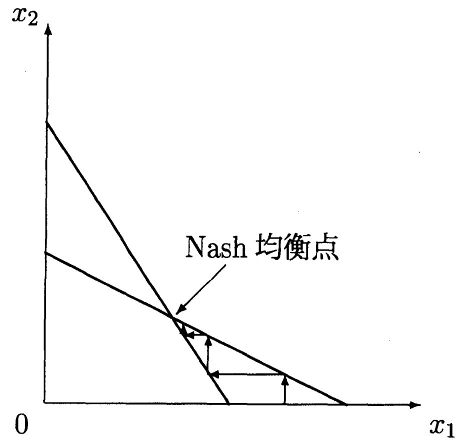

図 3. Nash 均衡点への変移グラフ

4 Stackelberg 均衡点の拡張形と Cournot の寡占市場モデル

本節では、Stackelberg 均衡戦略の拡張形を利用することにより、寡占市場モデルにおいて用いられるが、複占市場モデルにおいては起こり得ない例である『企業間提携の持つ経営戦略論的意味』について考察する。

今回ここでは、寡占市場モデルの一例として 3 社 (A 社、B 社、C 社) が同等製品を作って市場に投入することを考える。前の例のように、条件として、A 社は B 社よりも同等製品を安く生産する能力を持つものとし、また、B 社も C 社に比べると単位量あたりより安く生産する能力を持つものとする。即ち、A 社、B 社、C 社の各社の商品 1 個あたりの生産費用をそれぞれ、c_1、c_2、c_3 とすると、

$$c_1 < c_2 < c_3$$

が成立すると仮定する。今、各社の商品生産量をそれぞれ、 x_1, x_2, x_3 としたとき、販売価格関数は前節までと同様に、

$$p(x_1, x_2, x_3) = a - b(x_1 + x_2 + x_3)$$

と導くことができる。また、市場に投入された商品が全て完売することを仮定したとき、A 社の純益 $f_1(x_1, x_2, x_3)$ 、B 社の純益 $f_2(x_1, x_2, x_3)$ 、C 社の純益 $f_3(x_1, x_2, x_3)$ は、それぞれ順に

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3)x_1 - c_1x_1$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3)x_2 - c_2x_2$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3)x_1 - c_3x_3$$

となる。ここで商品の市場への投入に順番付けを行うと

(1) A 社が 1 番手　B 社が 2 番手　C 社が 3 番手
(2) A 社が 1 番手　C 社が 2 番手　B 社が 3 番手
(3) B 社が 1 番手　A 社が 2 番手　C 社が 3 番手
(4) B 社が 1 番手　C 社が 2 番手　A 社が 3 番手
(5) C 社が 1 番手　A 社が 2 番手　B 社が 3 番手
(6) C 社が 1 番手　B 社が 2 番手　A 社が 3 番手

の 6 通りの投入順序が考えられる。ただし、上記 (1)〜(6) の投入順序に関して、議論の対称性から、(1) 及び (3) について考察すれば十分である。

(1) において本モデルを想定した場合、3 番手となった C 社は、1 番手 A 社が x_1 と 2 番手 B 社が x_2 だけ商品を市場に投入したという情報を得ることができるため、自らの利益を最大にする最適商品生産量 $r_3(x_1, x_2)$ は

$$f_3\big(x_1, x_2, r_3(x_1, x_2)\big) = \max_{x_3} f_3(x_1, x_2, x_3)$$

の解として定義できる。f_3 は、x_1 及び x_2 に関する 1 次式、x_3 に関する 2 次式で、x_1 及び x_2 を固定したとき x_3 に関して上に凸の放物線となるから、2 次関数の極値問題となって、

$$r_3(x_1, x_2) = \frac{a - c_3}{2b} - \frac{x_1 + x_2}{2}$$

が得られる。(2) と (5) に関しては、B 社が 3 番手となっているから、同じ様に A 社が x_1 、C 社が x_3 だけ商品を市場に投入した際の B 社の最適商品生産量 $r_2(x_1, x_3)$ は

$$r_2(x_1, x_3) = \frac{a - c_2}{2b} - \frac{x_1 + x_3}{2}$$

で求められることになる。(3) と (6) については、A 社が 3 番手となっているから、同様にして B 社が x_2、C 社が x_3 だけ商品を市場に投入した際の A 社の最適商品生産量 $r_1(x_2, x_3)$ は、

$$r_1(x_2, x_3) = \frac{a - c_1}{2b} - \frac{x_2 + x_3}{2}$$

で求めることができる。以下では、(1) の場合を考察する。想定した本モデルの場合、自分 (B 社) が 2 番手であること、及び、A 社が 1 番手、C 社が 3 番手であるという情報を得ていることから、一般に「A 社が x_1 だけ商品をした際、B 社が x_2 だけ投入すると、最後の C 社は自動的に $r_3(x_1, x_2)$ だけ投入せざるを得ない。」と想定することになる。よって、B 社にとっては

$$f_2\big(x_1, x_2, r_3(x_1, x_2)\big)$$

を最大にするような x_2 の値を投入することが、自らの純益を最大にすることになる。従って、2 番手となった B 社の最適商品生産量 $q_2(x_1)$ は、x_1 を定数とみなしたときの

$$f_2\Big(x_1, q_2(x_1), r_3\big(x_1, q_2(x_1)\big)\Big) = \max_{x_2} f_2\big(x_1, x_2, r_3(x_1, x_2)\big)$$

という方程式の解として定義することになる。ここで (1) の状況下において、A 社は自分が 1 番手となっていること、及び B 社が 2 番手、C 社が 3 番手となることが分かっているため、自分が x_1 だけの商品を作製して市場に投入した際、自らの純益は、

$$f_1\Big(x_1, q_2(x_1), r_3\big(x_1, q_2(x_1)\big)\Big)$$

として自動的に定まることが想定できる。以上のことから1番手となったA社の最適商品生産量 p_1 は、

$$f_1\Big(p_1, q_2(p_1), r_3\big(p_1, q_2(p_1)\big)\Big) = \max_{x_1} f_1\Big(x_1, q_2(x_1), r_3\big(x_1, q_2(x_1)\big)\Big)$$

の解として決定されることになる。そこで (1) におけるA社、B社、C社、のそれぞれの最適商品生産量を求めることにする。ここで、

$$r_3(x_1, x_2) = \frac{a - c_3}{2b} - \frac{x_1 + x_2}{2}$$

であるから、この式を $f_2\big(x_1, x_2, r_3(x_1, x_2)\big)$ に代入すると、

$$\begin{aligned} f_2\big(x_1, x_2, r_3(x_1, x_2)\big) &= (a - c_2)x_2 - bx_2\left\{x_1 + x_2 + \left(\frac{a - c_3}{2b} - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right\} \\ &= (a - c_2)x_2 - \frac{a - c_3}{2}x_2 - bx_2\frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、x_1 を定数とみなした場合に、上式の最大値を与える x_2 が $q_2(x_1)$ として定義されるから、 $q_2(x_1)$ は

$$q_2(x_1) = \frac{a - 2c_2 + c_3}{2b} - \frac{x_1}{2}$$

で求められる。次に、 $r_3(x_1, x_2)$ 及び $q_2(x_1)$ を $f_1(x_1, x_2, x_3)$ に代入すると、

$$\begin{aligned} f_1\Big(x_1, q_2(x_1), r_3\big(x_1, q_2(x_1)\big)\Big) &= (a - c_1)x_1 - bx_1\left\{x_1 + \left(\frac{a - 2c_2 + c_3}{2b} - \frac{x_1}{2}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{a - c_3}{2b} - \frac{x_1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a - 2c_2 + c_3}{2b} - \frac{x_1}{2}\right)\right)\right\} \\ &= (a - c_1)x_1 - bx_1\left(\frac{3a - 2c_2 - c_3}{4b} + \frac{x_1}{4}\right) \end{aligned}$$

が得られる。よって p_1 は、

$$p_1 = \frac{a - 4c_1 + 2c_2 + c_3}{2b}$$

と求められる。以上のことより、2番手となったB社の最適商品生産量 $q_2(p_1)$ は、

$$q_2(p_1) = \frac{a + 4c_1 - 6c_2 + c_3}{4b}$$

となり、更に、3番手となったC社の最適商品生産量 $r_3\big(p_1, q_2(p_1)\big)$ は、

$$r_3\big(p_1, q_2(p_1)\big) = \frac{a + 4c_1 + 2c_2 - 7c_3}{8b}$$

という結果が導かれる。以上の計算で求められた $\big(p_1, q_2(p_1), r_3(p_1, q_2(p_1))\big)$ を、A社が1番手、B社が2番手、C社が3番手となったときのCournotの寡占市場モデルにおけるStackelberg均衡点と呼ぶ。

5　均衡点問題に帰着される経営戦略問題

経営戦略の分野で取り扱われる問題は多種多様である。しかしながら、均衡点理論に基づいた解の算出法がある程度確立されている現状では、与えられた問題を非線形解析学を用いて純粋に解く方法以外にも、既存の均衡点問題を利用する研究も重要視されてきている。そこで今回次のような例題を考えることにする。

（問題 1）
A社とB社がある程度の対立関係を持つという状況で、A社はB社から、自らの利得を削減されるような戦略を選択され、同様にB社もA社から、自らの利得を削減されるような戦略を選択されるものとする。このような状況において、両社の利得に関する均衡解は存在するかを考察せよ。

（問題 2）
A社とB社がある程度の協力関係を持つという状況で、A社はB社の損失を削減するような戦略を選択し、同様にB社もA社の損失を削減するような戦略を選択するものとする。この状態で両社の利得に関する均衡解は存在するかを考察せよ。

上記の 2 種類の問題は一見すると異なるように見えるが、次のような数学的定式化が可能であるため、本質的には同じであると考えられる。

$$\text{主問題}\quad \begin{cases} f_1(x_1^d, x_2^d) = \min_{x_2 \in S_2} f_1(x_1^d, x_2), & \text{A社の利得関数} \\ f_2(x_1^d, x_2^d) = \min_{x_1 \in S_1} f_2(x_1, x_2^d), & \text{B社の利得関数} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1)$$

また、上記主問題に関して、両社の利得に関する価値観を「自らの利得を増価させること」という観点から、「相手の利得を減少させること」という観点に変更する場合、次のような両社の利得関数を交換した形で同値変形が可能となる。

$$\begin{cases} f_2(x_1^d, x_2^d) = \min_{x_1 \in S_1} f_2(x_1, x_2^d), & \text{A社の利得関数} \\ f_1(x_1^d, x_2^d) = \min_{x_2 \in S_2} f_1(x_1^d, x_2), & \text{B社の利得関数} \end{cases}$$

ここでそれぞれの式の両辺に -1 をかけると、

$$\begin{cases} -f_2(x_1^d, x_2^d) = \max_{x_1 \in S_1} -f_2(x_1, x_2^d), & \text{A社の利得関数} \\ -f_1(x_1^d, x_2^d) = \max_{x_2 \in S_2} -f_1(x_1^d, x_2), & \text{B社の利得関数} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2)$$

が得られ、前節で述べた Nash 均衡問題に帰着されることが分かる。つまり、主問題で求められる解 (x_1^d, x_2^d) は、変形 (2) の Nash 均衡解と一致する。このように既存の均衡問題へ帰着可能な問題は、「元の均衡問題の派生版」と呼ばれている。続いて、解を持つような Nash 均衡問題派生版の具体的例を考えることにする。

（問題 1 の具体的な例）
A社をある企業とし、B社を「A社への送金をだまし取る詐欺集団」と設定する。このときB社は、本来A社への送金を横取りするような戦略を選択して、A社の利益を減少させる。一

方のＡ社は、「詐欺行為を防止する対策」を実施して、例えば銀行のＡＴＭで携帯電話の使用禁止するなどの戦略を選択することが考えられる。

（問題２の具体的な例）

例として「廃棄物処理に関する費用分担問題」を考える事ができる。Ａ社とＢ社が共同で運営している会社があり、どちらか１社だけでは経営が成り立たないものとする。具体的には、Ａ社から排出される廃棄物の量を x_1、Ｂ社から排出される廃棄物の量を x_2 として、Ａ社の廃棄物はＢ社でしか処理ができず、Ｂ社の廃棄物はＡ社でしか処理ができないものと設定する。

廃棄物処理にかかる基本処理費用は、Ａ社、Ｂ社共に単位量あたり $a-b(x_1+x_2)$ 円の負担となる。ただし、Ａ社とＢ社では、一般に処理する内容が異なる為、Ｂ社は、Ａ社に対して、単位量あたり c_1 円の追加金を支払い、同様にＢ社はＡ社に対して、単位量当たり c_2 円の追加金を支払うことになっていると仮定する。このような設定の下では、両社は相手の廃棄物処理負担金を小さくするような戦略を選ぶことが必要とされる。各社の負担金は、先ほどと同様に以下の式で表すことができる。

$$
\text{廃棄物処理負担金}\quad \begin{cases} f_1(x_1,x_2)=\{a+b(x_1+x_2)\}x_2-c_2x_2, & \text{Ａ社の損失関数} \\ f_2(x_1,x_2)=\{a+b(x_1+x_2)\}x_1-c_1x_1, & \text{Ｂ社の損失関数} \end{cases}
$$

これらの式は、次のように変形が可能である。

$$
\text{完全平方完成}\quad \begin{cases} f_1(x_1,x_2)=b\left\{x_2-\dfrac{c_2-a-bx_1}{2b}\right\}^2+\dfrac{(c_2-a-bx_1)^2}{4b} \\ f_2(x_1,x_2)=b\left\{x_1-\dfrac{c_1-a-bx_2}{2b}\right\}^2+\dfrac{(c_1-a-bx_2)^2}{4b} \end{cases}
$$

f_1 に関しては、x_1 を固定したとき、x_2 に関する２次関数となるため、最小値が存在する。また f_2 に関しても、x_2 を固定したとき、x_1 に関する２次関数となるため、最小値が存在する。

以上のことから変形 (2) に帰着させた場合、反応関数の存在が示され、Nash 均衡点を求める方法が適用できることが分かる。

先に述べたように、経営戦略の分野における問題は多岐にわたる。ここではその一例として、「既存の均衡点問題に帰着させることが可能となる問題が存在すること」が示すことができたと考えれられる。今後、このような均衡点問題に対する手法を応用することで、１対多に対応できるようなモデルに応用することが可能になると考えられる。

6　均衡点への収束状況に関する数値実験

本節では均衡点への収束を時系列的に表示するための数値実験を行う。

第２節において論じた複占市場モデルの場合、得られた均衡点 St_1 および St_2 における両社の商品生産量と純益について、例として、商品最高値 a を 12、価格減少率 b を 1、Ａ社の生産費用 c_1 を 2、Ｂ社の生産費用 c_2 を 3 とした場合の両社の最適商品生産量と純益について求めることにする。導いた式に値を代入すると、均衡点 St_1 の場合、2 社の商品生産量は $(5.5, 1.75)$、純益

は $(15.13, 3.06)$ が得られ、均衡点 St_2 の場合、2 社の商品生産量は $(3.0, 4.0)$、純益は $(9.0, 8.0)$ が得られる。この結果は、生産効率の劣る B 社であっても、先手を取って市場に投入した場合には A 社とほぼ同等の純益をあげることが可能であることを示している。一方、生産効率の高い A 社が先手を取って市場に投入した場合は、B 社は殆ど利益を上げることでができないという結果を示している。従って、このようなモデルの場合において、論理上「先手必勝の原理」が強く働くことが分かる。言い換えれば、生産能力よりも「先手を取って市場に製品を送り込むことの重要性」が示されていると考えられる。

第 3 節において得られた結果に対し、先ほどと同じ条件のもとで、Nash 均衡点に収束する状況を調べる。ここでは A 社の初期生産量を 4 とし、その生産量を受けて、反応関数から最適生産量 2.5 を B 社が算出するものとして、以下交互に反応関数によって決定された量の商品を両社によって市場に投入していくものとする (得られた時系列に対する推移結果に関しては図 4. および表 1. を参照)。

表 1. A 社、B 社の生産量

	A 社	B 社
0	4.00000	
1	3.75000	2.50000
2	3.68750	2.62500
3	3.67188	2.65625
4	3.66797	2.66406
5	3.66699	2.66602
6	3.66675	2.66650
7	3.66669	2.66663
8	3.66667	2.66666
9	3.66667	2.66666
10	3.66667	2.66667
11	3.66667	2.66667
⋮	⋮	⋮
27	3.66667	2.66667
28	3.66667	2.66667
29	3.66667	2.66667

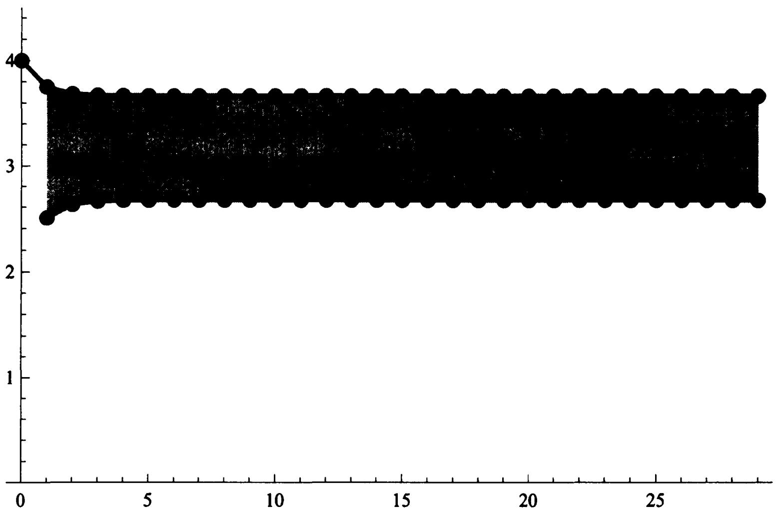

図 4. A 社、B 社の生産量

続いて、両社がほとんど同時に、お互いに相手の商品投入量を用いて次期商品を投入する状況を考える。即ち、n 時点において両者の商品投入量が (x_1^n, x_2^n) であったとき、時点 $n+1$ における商品投入量 (x_1^{n+1}, x_2^{n+1}) は

$$(x_1^{n+1}, x_2^{n+1}) = (r_1(x_2^n), r_2(x_1^n))$$

として決定される場合を考える。具体例として、商品最高値 a、価格減少率 b、A 社、B 社の生産費用 c_1、c_2 を同じ値とし、A 社の初期生産量を 4、B 社の初期生産量を 8 として計算を行

表 2. A 社、B 社の生産量

	A 社	B 社
0	4.00000	8.00000
1	1.00000	2.50000
2	3.75000	4.00000
3	3.00000	2.62500
4	3.68750	3.00000
5	3.50000	2.65625
6	3.67188	2.75000
7	3.62500	2.66406
8	3.66797	2.68750
9	3.65625	2.66602
10	3.66699	2.67188
11	3.66406	2.66650
⋮	⋮	⋮
27	3.66667	2.66667
28	3.66667	2.66667
29	3.66667	2.66667

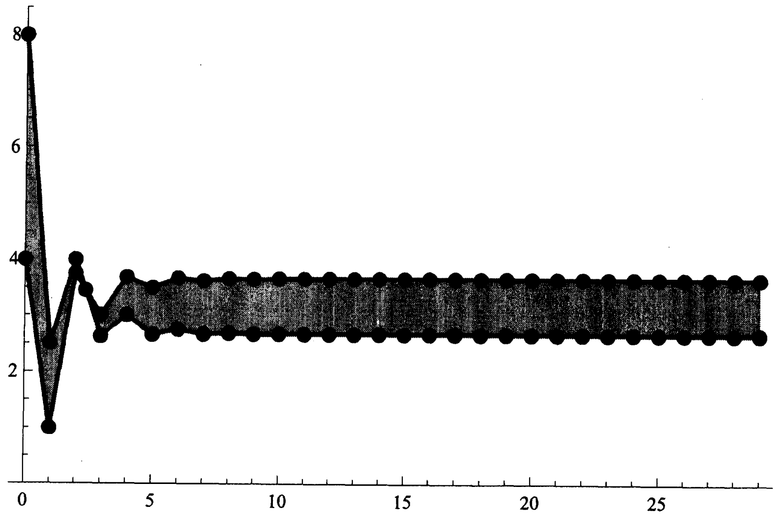

図 5. A 社、B 社の生産量

うものとする (得られた時系列に対する推移結果に関しては図 5. および表 2. を参照)。以上の結果より、収束の仕方に違いはあるが Nash 均衡点 $(11/3, 8/3)$ に収束している様子が確認される。また、ここで用いた 2 項間漸化式に対して行列表示を行うと、

$$\begin{bmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{10}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

となるため、反応関数を用いて構成される漸化式に対して、縮小写像の不動点定理を適用することが可能であることが分かる。従って、先ほどの場合と収束方法に相違があるものの、どのような初期値を選んでも、上記縮小アフィン変換の不動点に対応する Nash 均衡点 $(11/3, 8/3)$ に収束することが数学的に証明できる。

第 4 節で得られた結果に関しても同様に考察する。商品最高値 a を 16 および 20 にした場合の各々において、価格減少率 b を 1、A 社の生産費用 c_1 を 2、B 社の生産費用 c_2 を 3、C 社の生産費用 c_3 を 4 とした場合の計算結果を表 3. に示す。この結果より、商品を最初に市場に投入する企業は、より生産能力の低い企業が 2 番手になった方が、自らの純益が大きくなるということが見て取れる。これは寡占市場において、生産効率が 1 番目の企業と 3 番目の企業が連携して、2 番目の企業と競争するという戦略の理論的裏付けを与えるものである (表 3. における ABC の欄と ACB の欄を比較することで、ACB の投入順序における A 社の純益が ABC の投入順序における A 社の純益よりも大きいことが例として示されている)。また、最後の 3 番手の企業にとっては、より生産能力の高い企業に 1 番手を取られた場合ほど自らの純益が減少してしまうという結果が読み取れる。これは一般的に、生産能力が 2 番目の企業と 3 番目の企業が協力して 1 番目の企業に対抗するという戦略の理論的裏付けを与えるものである (表 3. に

おける BCA の欄と CBA の欄を他の欄と比較することで、A 社の純益が小さく抑えられていることが例として示されている)。

表 3. 寡占市場における均衡点

投入順序	$a=16$				$a=20$			
1 2 3	v_A	v_B	v_C	計	v_A	v_B	v_C	計
A B C	20.250	3.125	0.063	23.438	30.250	6.125	0.563	36.938
A C B	22.563	1.819	0.281	24.663	33.063	3.516	1.531	38.110
B A C	12.500	9.000	0.250	21.750	18.000	16.000	1.000	35.000
B C A	7.563	12.250	1.125	20.938	10.563	20.250	3.125	33.938
C A B	16.531	3.561	3.063	23.155	22.781	5.641	7.563	35.985
C B A	9.000	8.000	4.000	21.000	12.250	12.500	9.000	33.750

謝辞

京都大学数理解析研究所共同研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」の研究提案者として講演の機会を与えてくださいました東京工業大学名誉教授の高橋渉先生に、感謝の念を申し述べます。

参考文献

[1] J. -P. Aubin and H. Frankowska, Set-valued Analysis, Birkhäuser, Boston, 1990 年.

[2] E. v. Damme, Stability and Perfection of NashEquilibria, Springer Verlag, Berlin, 2002 年.

[3] 明石重男, 現代数学への展望, 横浜図書, 2000 年.

[4] 明石重男, Stackelberg 均衡点及び Nash 均衡点存在定理に対する経営学的意味付け及びビジネス書『大西リポート』からの実例紹介, 数理解析研究所講究録, 1071, 1998.

[5] 鈴木光男, ゲームの理論, 勁草書房, 1978 年.

[6] 鈴木光男, ゲーム理論入門, 共立全書, 1982 年.

[7] 高橋渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1978 年.