数理解析研究所講究録
第 1843 巻 2013 年 22-27

次数３３の可移置換群の分類について

宮本泉 *
IZUMI MIYAMOTO
山梨大学
UNIVERSITY OF YAMANASHI

1 置換群

群の計算は、数式処理ソフトウェアパッケージ GAP を使用
一部の計算で、京都大学　学術情報メディアセンタースーパーコンピュータシステムを使用

$Sym(\Omega)$ / SymmetricGroup(Ω) : 集合 Ω 上の対称群
$Sym(n)$ / SymmetricGroup(n) : n 次対称群 $\Longleftarrow \Omega=\{1,2,\cdots,n\}$
群 G は Ω 上の置換群 $\Longleftrightarrow G$ は $Sym(\Omega)$ の部分群
$g\in G$ の $i\in\Omega$ への作用　$g:i\longrightarrow i^{g}$
$\Longleftrightarrow \Omega=\{1^{g}|g\in G\}$
$\Longleftrightarrow$ 任意の $i\in\Omega$ に対して、$i=1^{g}$ となる $g\in G$ が存在する。
GAP による置換群のデータ n 次の TransitiveGroup と PrimitiveGroup の同型類の個数 $(20\leq n\leq 32)$

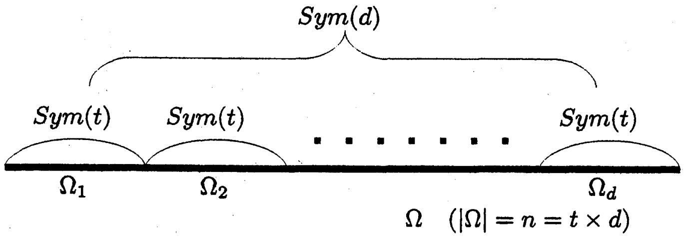
n	NrTransitiveGroups(n)	NrPrimitiveGroups(n)
20	1117	4
21	164	9
22	59	4
23	7	7
24	25000	5
25	211	28
26	96	7
27	2392	15
28	1854	14
29	8	8
30	5712	4
31	12	12
32	2801324	7

Primitive な群 $\Longleftrightarrow$ 可移な群で、１点固定部分群 G_{1} が G の極大部分群固定部分群 $G_{i}=\{g\in G|i^{g}=i\}$: 点 i の固定部分群 $\subseteq G$, Stabilizer(G,i)
可移な群の分類の現状 30 次以下：１０年以上前、確認に時間をかけている。Hulpke

*imiyamoto@yamanashi.ac.jp

32 次：Cannon-Holt 2008 年 12 月、確認 2011 年 (Magma のデータ)
32 次の個数が多すぎて、Magma の通常の組込みデータにはできない。
それで、分類はここで止まっている。
33、34、35 次は、これまでの方法で簡単であろう。
36 次は、それなりに、、、。

分類に必要とされる関数は、GAP システムに組込まれている。
(本研究集会 2008)
これらを使って、分かり易く分類したい。30 次以下の確認も含めて。
Primitive な群の分類 GAP のデータ 2499 次まで ver4.5.6
Magma のデータ 4095 次まで ver2 19-2
Primitive ではない群 $\Longrightarrow$ ブロックシステムをもつ



$$Sym(t) \wr Sym(d) = \mathsf{WreathProduct}(Sym(t), Sym(d))$$

$\{\Omega_1, \Omega_2, \cdots \Omega_d\}$:G のブロックシステム

$$\Longrightarrow G \subseteq W = Sym(\Omega_1) \wr Sym(d)$$

１つのブロックを集合として固定する部分群 $K = \{k \in G | i^k \in \Omega_1 \text{ for all } i \in \Omega_1\}$
$\Longrightarrow G_1 \subsetneq K \subsetneq G$
$\Longrightarrow \{1^k | k \in K\} = \Omega_1$
orbit
$\{i^k | k \in K\} \subseteq \Omega$： Ω の点 i を含む K の orbit
(ブロックなどの) 集合の固定部分群
$G_\Delta = \{g \in G | \Delta^g = \Delta\}$：部分集合 $\Delta(\subseteq \Omega)$ の固定部分群 (as set)
$G_{\underline{\Delta}} = \{g \in G | \underline{\Delta}^g = \underline{\Delta}\}$ ：部分集合 $\Delta(\subseteq \Omega)$ の固定部分群 (pointwise)
【例】 $G_{\{1,2\}}, G_{1,2} = G_{2,1}$,
Stabilizer$(G, [1, 2], OnSets)$, Stabilizer$(G, [1, 2], OnTuples)$
置換の集合や順序対への作用
部分集合 $\Delta = \{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \subseteq \Omega$ に対して $\Delta^g = \{i_1^g, i_2^g, \cdots, i_r^g\}$
順序対 $\underline{\Delta} = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$, $(i_j \in \Omega)$ に対して $\underline{\Delta}^g = (i_1^g, i_2^g, \cdots, i_r^g)$
G のブロックシステム上への作用 $\bar{G}$
hom:=ActionHomomorphism$(G, [\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_d], OnSets)$
$\Longrightarrow \bar{G}$ =Image(hom)$\subseteq Sym(d)$ １つのブロック上への作用 $\Longrightarrow$ 置換の作用範囲の制限 $\Delta^g = \Delta$ のとき、RestrictedPerm(g, Δ)
$\Delta^H = \Delta \Longleftrightarrow \Delta^h = \Delta$ for all $h \in H$ のときは、H^Δ
$\Delta = \Omega_1$、$H = G_\Delta$ とすると、
$(|\Delta| = t,\ |\Omega|/|\Delta| = d) \Longrightarrow H^\Delta \subseteq Sym(t),\ \bar{G} \subseteq Sym(d)$

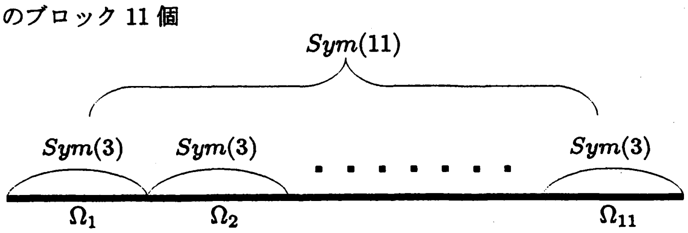
$G \subseteq$WreathProduct$(H^{\Delta}, \bar{G}) \subseteq$ WreathProduct$(Sym(t), Sym(d))$
固定部分群たちの関係 (共役)
$i^g = j \Longrightarrow G_i^g = \{g^{-1}kg | k \in G_i\} = G_j$
$\Omega_i^g = \Omega_j \Longrightarrow G_{\Omega_i}^g = \{g^{-1}kg | k \in G_{\Omega_i}\} = G_{\Omega_j}$

2 置換群の同型類

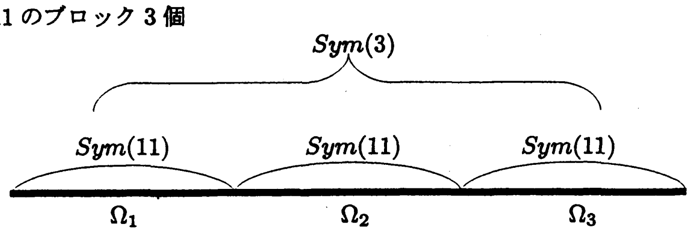
置換群の同型類 $= Sym(n)$ において共役な群の類
$g \in G$ による共役 (conjugate)
$h^g = g^{-1}hg$
$H^g = g^{-1}Hg = \{h^g | h \in H\}$
G, H : $Sym(n)$ の部分群が、置換群として同型
$\Longleftrightarrow G$ と H は $Sym(n)$ で共役
$\Longleftrightarrow G^k = H$ となる $k \in Sym(n)$ が存在する。$\longleftarrow$ 本研究集会 2009 他
IsConjugate$(Sym(n), G, H)$, RepresentativeAction$(Sym(n), G, H)$
正規部分群
すべての $g \in G$ に対して、$N^g = N$ が成立するか？$\Longrightarrow$IsNormal(G, N)
もし、群 $N \subseteq G \Longrightarrow N$ は G の正規部分群
正規化群
Normalizer$(G, H) = \{g \in G | H^g = H\} \subseteq G \longleftarrow$ 本研究集会 2011 他
Magma
2011 年末、v2-18 で、正規化群と部分群の共役計算は、飛躍的に高速化された。
GAP
2012 年、ver4.5 にバージョンアップしたが、正規化群および部分群の共役計算に関しては、微妙。
$\Longrightarrow$ 次数 30 程度では、Magma ならスムースに計算、GAP では、時間のかかる場合も存在。
置換群の計算
GAP では、置換群の分類に使う関数がそろっている。
Magma では、素材となる関数から作る必要がある。（素材となる関数がなかなか見つからない。）

3 33 次の置換群のブロック構造

サイズ 3 のブロック 11 個

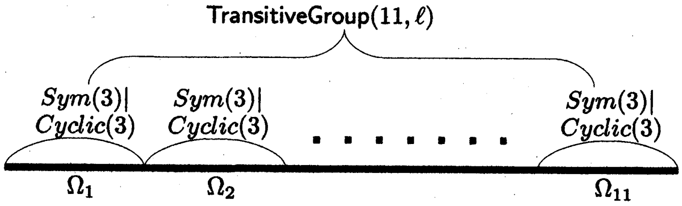


サイズ 11 のブロック 3 個

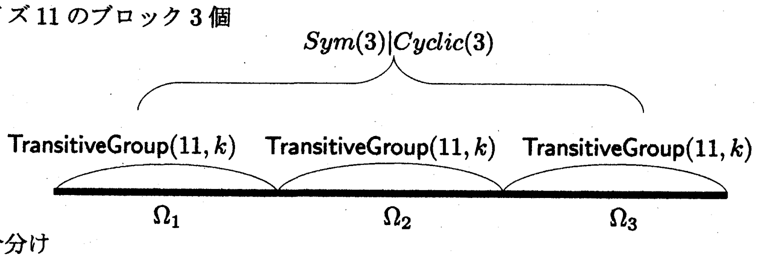


33 次の置換群のブロック構造

サイズ 3 のブロック 11 個



サイズ 11 のブロック 3 個



場合分け

G の 1 つのブロックを固定する部分群のブロック内での作用が

可解 (Solvable)

ブロックサイズが 3

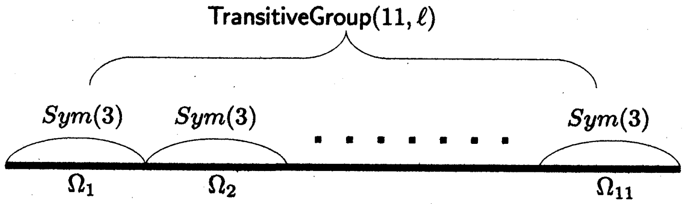
ブロックサイズが 11、かつ、TansitiveGroup(11, k), $(1 \le k \le 4)$

非可解

ブロックサイズが 11、かつ、TansitiveGroup(11, k), $(5 \le k \le 8)$

3.1 ブロック内での作用が可解な場合

$G \subseteq$WreathProduct($Sym(3)$, TransitiveGroup(11, ℓ)) とする。



部分群 $K \subseteq G$ で、次の条件を満たすものすべてを求める。

$\bar{K} = \bar{G} =$ TransitiveGroup(11, ℓ), $K_{\Omega_1}^{\Omega_1} = G_{\Omega_1}^{\Omega_1} = Sym(3)|Cyclic(3)$

$\Longrightarrow$ G は $Sym(3)^{11}$ に作用する ($G \subseteq$Normalizer($Sym(33), Sym(3)^{11}$))

$\Longrightarrow$ G は ElementaryAbelianSeries($Sym(3)$)$' =$ [23, 3, 1] の NormalClosure($G, -$) に作用する。($2 = Cyclic(2)$, 2 $3 = Sym(3)$)

$\Longrightarrow$ G は $2^{11}3^{11}/3^{11} \cong 2^{11}$, 3^{11} に作用する。

$\Longrightarrow$ まず、G の $2^{11} \cong 2^{11}3^{11}/3^{11}$ への作用の不変部分群を求める。

$\Longrightarrow$ $H \subseteq G$ で、$\bar{H} =$TransitiveGroup(11, ℓ), $H_{\Omega_1}^{\Omega_1} = G_{\Omega_1}^{\Omega_1}$, を満たす H では、Intersection($H, Sym(3)^{11}$) は、上で求めた不変部分群の 1 つ。

$\Longrightarrow$ 次に、H の 3^{11} への作用の不変部分群を求める。

$\Longrightarrow$ $K \subseteq H$ で、$\bar{K} =$TransitiveGroup(11, ℓ), $K_{\Omega_1} = Sym(3)|Cyclic(3)$, ならば、Intersection($K, Sym(3)^{11}$) は、上で求めた不変部分群の 1 つ。

GAP の関数 (2008 年、本研究集会) hom :=NaturalHomomorphismByNormalSubgroup($G, 3^{11}$);

$\Longrightarrow$ Image($hom, Sym(3)^{11}$) $\cong 2^{11}$
$conj$:=List(GeneratorOfGroup(Image(hom, G)), u−>
ConjugatorIsomorphism(Image($hom, Sym(3)^{11}$), u);
InvariantSubgroupsElementaryAbelianGroup(Image($hom, Sym(3)^{11}$), $conj$);
Complementclasses(Image(hom, G)/inv,Image($hom, Sym(3)^{11}$)/inv)
$\Longrightarrow H \cap Sym(3)^{11} = inv3^{11} \subset 2^{11}3^{11}$
計算が困難な場合
(ブロック内への作用が solvable なとき)

- 不変部分群が、$|inv| = 2^5$ or 2^6(次元が 2^{11} の半分くらい) のときの、Complementclass⋯本質的に困難、メモリ不足も。
- 不変部分群が、$|inv| = 2^{10}$(次元が全体 −1) のときの、Complementclass
- 2^{11} の処理が終わって、3^{11} に進んだとき。
- NaturalHomomorphismByNormalSubgroup は、メモリを大量に使うときがある。⋯なるべく、ActionHomomorphism を使う。$G/3^{11}$ =ActionHomomorphism(G,RightCosets(G, L),OnRight)

  L =ClosureGroup($3^{11}, G_{\Omega_1}$) $\Longrightarrow G/L$ は置換群になり、次数 22

  その後、不変部分群 $inv \subset 2^{11}3^{11}/3^{11}$ で、NaturalHomomorphismByNormalSubgroup($*, inv$) が必要

3.2 ブロック内での作用が非可解な場合

L =TransitiveGroup($11, k$) を G の 1 つのブロック内での作用とする
$L2$:=SubdirectProducts(L, L); ($Sym(22)$ において、共役群を除外する)
$L3 := List(L2, u$−>SubdirectProducts(u, L))
($Sym(33)$ において、共役群を除外する)

(以前の本研究集会では、可移な群の共役群計算)
$N3 := List$(Concatenation($L3$), u−> Normalizer($Sym(33), u$))

⟵ 本研究集会 2011
正規化群が可移な場合のみ選択

SubdirectProducts は、前もって計算してファイルにしておく。
そのとき、L はパーフェクト ($\Leftrightarrow L$ =DerivedSubgroup(L)) のときのみを計算、DerivedSubgroup(H) $= L$ となる H は、Normalizer 計算で処理

ブロック内での作用が非可解
D : SubdirectProducts で得られた群
N :=Normalizer($Sym(33), D$)
$acthom$:=ActionHomomorphism ($N, [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3], OnSets$)
$\Longrightarrow$ Image($acthom$) $\subseteq Sym(3)$
$K := Kernel(hom) \supseteq D$
$\Longrightarrow N_0/K = Sym(3)|Cyclic(3)$ となる $N_0 \subseteq N$ を選択
hom :=NaturalHomomorphismByNormalSubgroup(N, D)

$\Longrightarrow Image(hom, K)$ は $Image(hom)$ の可解な正規部分群
$\Longrightarrow K/D$ は可解、ただし、$D = Kernel(hom)$ が成立
以上、まとめて、
N/D と可解な K/D に、ブロック内での作用が可解な場合の方法を適用

4 アソシエーションスキームの分類の利用

A : アソシエーションスキーム
$Aut(A)$: その自己同型群

可移な群 G の作るアソシエーションスキーム
$\Longrightarrow G$ の $\Omega^2 = \{(i,j)|i,j \in \Omega\}$ への作用の orbit 全体　　Orbits($G, \Omega^2, OnTuples$)

$Aut(A)$ =TwoClosure(G)
$\Longleftrightarrow$ The largest group $\subseteq Sym(n)$ which has the same orbits on Ω^2 as G has.
アソシエーションスキームの分類
次数 30 までと、32、33、34 は分類済

5 計算結果

33 次　162 個　計算時間 25 分　最長計算時間 20 分
34 次　102 個　計算時間 3 分　最長計算時間 1.6 分

本報告作成時点で、同じプログラムを、27、28、30 次で動かしているが、メモリ容量オーバーで、計算できない場合がある。そのための改良を続けているが、残念ながら、バグが残っている。現時点で、33 次、34 次で、下表の個数の群が得られている。

n	NrTransitiveGroups(n)	NrPrimitiveGroups(n)
20	1117	4
21	164	9
22	59	4
23	7	7
24	25000	5
25	211	28
26	96	7
27	2392	15
28	1854	14
29	8	8
30	5712	4
31	12	12
32	2801324	7
33	162	4
34	102	2