数理解析研究所講究録
第 1844 巻 2013 年 90-102

符号, 格子と頂点作用素代数における類似

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

東北大学大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
e-mail: shimakura@m.tohoku.ac.jp

1 序

筆者の研究目的の一つはモンスターと呼ばれる散在型有限単純群について深く理解することである. モンスターはムーンシャイン頂点作用素代数の自己同型群としての実現されていることから, 頂点作用素代数 (VOA) の理論や VOA の対称性を用いる事で, モンスターについて研究することが可能である. 筆者はそれに加え, “簡単”な有限群論[1]と組合せ論を用いてモンスターの研究を行っている.

本稿では, VOA に関連する組合せ論の話題の一つとして, 「(二元) 符号, 格子, VOA の間の類似[2]」を紹介する.[3]

2 準備

この章では, 講演では省略した用語の定義を与える.

2.1 (二元) 符号

$\mathbb{F}_2$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{F}_2^n$ の基底を一つ固定し, それによる座標表示を考える. $\mathbb{F}_2^n$ 上には内積 $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i \mod 2$ がある. $\mathbb{F}_2^n$ の元 $x=(x_i)$ の**重さ (weight)** とは $\mathrm{wt}(x)=|\{i\mid x_i\neq 0\}|$ である.

$\mathbb{F}_2^n$ の部分空間を**長さ (length)** n の (二元線形) **符号 (code)** という. 符号 C の**最小重み (minimum weight)** とは $\mu(C)=\min\{\mathrm{wt}(x)\mid x\in C\setminus\{0\}\}$ である. 符号 C の **双対符号 (dual code)** $C^\perp$ とは直交補空間 $C^\perp=\{x\in\mathbb{F}_2^n\mid\langle x,y\rangle=0,\ \forall y\in C\}$ のことをいう. C が**重偶 (doubly even)** であるとは C の任意の元 x が $\mathrm{wt}(x)\in 4\mathbb{Z}$ を満たすこと

[1] 深い群論の代わりに VOA を用いてモンスターを理解したいのである.
[2] 同様なタイトルの講演の報告集 [島倉 08] がある.
[3] 講演後に二元符号以外の符号と関連する話があるかどうか質問を受けた. 今の時点では結果はないが, 例えば $\mathbb{Z}_p$ 上の符号, 複素格子なども含めて類似や関連を見つかる可能性があると思う. また, 類似を考えるために, VOA の概念の拡張が必要になるかもしれない.

をいい, **自己双対 (self-dual)** とは $C = C^{\perp}$ を満たす[4]ことをいう. 符号 C の自己同型とは基底の置換として作用する n 次対称群の元で C を保つものであり, これらが成す自己同型群を $\mathrm{Aut}(C)$ と書く. 長さ n の符号 C の**重み多項式 (weight enumerator)** とは $W_C(X,Y) = \sum_{c\in C} X^{\mathrm{wt}(c)}Y^{n-\mathrm{wt}(c)}$ である.

2.2 格子

$\mathbb{R}$ 上の n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を考え, $\langle\ ,\ \rangle$ で内積を表す. $v \in \mathbb{R}$ に対して, $\langle v, v\rangle$ を v の**ノルム (norm)** と言う.[5] $L \subset \mathbb{R}^n$ が**階数 (rank)** n の**格子 (lattice)** であるとは, ある $\mathbb{R}^n$ の基底 $\{e_i\}$ があって $L = \oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}e_i$ と書けることである. 格子 L の**最小ノルム (minimum norm)** とは $\mu(L) = \min\{\langle v,v\rangle \mid v \in L\setminus\{0\}\}$ である. 格子 L の**双対格子 (dual lattice)** L^* とは $L^* = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w\rangle \in \mathbb{Z}\ \forall v \in L\}$ である. 格子 L が**偶 (even)** とは L の任意の元のノルムが偶数であることをいい, **ユニモジュラ (unimodular)** とは $L = L^*$ を満たす[6]ことをいう. 格子 L の自己同型とは $\mathbb{R}^n$ の直交変換で L を保つものであり, これらが成す自己同型群を $\mathrm{Aut}(L)$ と書く. L の**テータ級数 (theta series)** とは $\Theta_L(q) = \sum_{v\in L} q^{\langle v,v\rangle/2}$ であり, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$, $\tau \in \mathbb{H}$ とみて, 上半平面 $\mathbb{H}$ 上の関数と見ることもある.

2.3 頂点作用素代数 (VOA)

VOA に関する定義等の詳細は [Bo86, FLM88, FHL93] を参照せよ.

定義 2.1. [Bo86, FLM88] **頂点作用素代数 (vertex operator algebra)** とは $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-次数付き $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $V = \oplus_{i=0}^{\infty} V_i$, 線形写像

$$\begin{aligned} Y:\ V &\to (\mathrm{End}V)[[z,z^{-1}]],\\ v &\mapsto Y(v,z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} v_i z^{-i-1}, \end{aligned}$$

真空元 (vacuum vector) と呼ばれる $\mathbf{1}_V \in V_0$ と **共形元 (conformal element)** と呼ばれる $\omega \in V_2$ の四つ組 $(V, Y, \mathbf{1}_V, \omega)$ で次の公理を満たすものである.

(V1) $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\dim V_p < \infty$.

(V2) $a, b \in V$ に対して, ある $p_0 \in \mathbb{Z}$ が存在して $a_p b = 0$ $(p > p_0)$ を満たす.

(V3) $v \in V$ に対して $Y(v,z)\mathbf{1}_V \in v + Vz[[z]]$.

(V4) **(Borcherds identity)** $a, b, v \in V$, $p, q, r \in \mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ.

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{p}{i}(a_{r+i}b)_{p+q-i}v = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{r}{i}\Big(a_{p+r-i}(b_{q+i}v) - (-1)^r b_{q+r-i}(a_{p+i}v)\Big).$$

[4] $R(C) = C^{\perp}/C = \{C\}$ と同値である.
[5] 長さという意味では平方根を取るべきかもしれないが, 便利のためにこの定義とする.
[6] $R(L) = L^*/L = \{L\}$ と同値である.

(V5) $L(p)=\omega_{p+1}$ と置くと, 次を満たす**中心電荷 (central charge)** $n \in \mathbb{C}$ が存在する.

$$[L(p), L(q)] = (p-q)L(p+q) + \frac{p^3-p}{12}\delta_{p+q,0}n.$$

(V6) $v \in V_p$ に対して $L(0)v = pv$.

(V7) $v \in V$ に対して

$$\frac{d}{dz}Y(v,z) = Y(L(-1)v, z).$$

本稿では次の性質を満たす VOA のみを扱う.

- $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ を満たす[7] (**CFT 型**).
- V は**単純 (simple)**, すなわち V のイデアルは $\{0\}$ と V.
- V が C_2**-余有限 (C_2-cofinite)**[8], すなわち $\dim(V/\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{a_{-2}b \mid a, b \in V\}) < \infty$.
- V が**有理的 (rational)**, すなわち任意の V-加群が完全可約.

VOA の加群の定義は [FHL93] を参照せよ. ここでは, 既約 V-加群の同型類全体の集合を $R(V)$ と表すことにする. 加群 M に対して, その同型類を $[M]$ と表す. 有理的な VOA V が**正則 (holomorphic)** であるとは V の既約加群が同型を除いて V 自身のみ[9], のことを言う. また, 加群の三つ組 $[M^1], [M^2], [M] \in R(V)$ に対して, intertwining operator と呼ばれるある種の性質を満たす写像 $M^1 \to \mathrm{Hom}(M^2, M)\{\{z\}\}$ の張る線形空間の次元を**分岐則 (fusion rules)** といい, $N_{[M^1],[M^2]}^{[M]}$ と表す (詳細は [FHL93] 参照).

V_n の元の**共形重み (conformal weight)** を n と定義する. V_ω で共形元 ω が生成する部分VOA を表すことにする. V の**最小共形重み (minimum conformal weight)** を $\mu(V) = \min\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid V_m/(V_\omega)_m \neq 0\}$ で定義[10]する ([Hö95]). $g \in \mathrm{GL}(V)$ が $gY(v,z)g^{-1} = Y(gv, z)\ \forall v \in V$ と $g\omega = \omega$ を満たすとき V の自己同型といい, これらが成す自己同型群を $\mathrm{Aut}(V)$ で表す. V の**指標 (character)** とは $\mathrm{ch}(V) = q^{-n/24}\sum_{m=0}^{\infty}\dim(V_m)q^m$ であり, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$, $\tau \in \mathbb{H}$ とみて, 上半平面 $\mathbb{H}$ 上の関数と見ることもある.

2.4 符号, 格子, 頂点作用素代数における大雑把な対応

講演中に表示した大雑把な対応表を載せておく.

注意 2.2. 表における (共形重みが整数) は VOA の定義に含まれる.

[7] VOA が整数で次数付けられている $V = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}V_i$ とし, 「$i < 0$ に対して $V_i = 0$」を CFT 型の条件に入れることも多い.

[8] 技巧的な条件に見えるが, VOA の理論において非常に重要な役割を果たす (cf. [Zh96]).

[9] $R(V) = \{[V]\}$ と同値である.

[10] $0 \neq \omega \in V_2$ であるため, 単に $V_m \neq 0$ となる最小 $m(>0)$ では具合が悪い.

(二元) 符号 C	格子 L	VOA V
長さ	階数	中心電荷
重さ	ノルム	共形重み
重偶	偶	(共形重みが整数)
自己双対	ユニモジュラ	正則
$C^{\perp}/C$	L^{*}/L	$R(V)$
重み関数	テータ級数	指標
ハミング符号 e_8	E_8-格子	格子 VOA V_{E_8}
ゴレイ符号 G_{24}	リーチ格子 Λ	ムーンシャイン VOA $V^{\natural}$

3　符号, 格子, 頂点作用素代数の類似

この章では類似の例をいくつか挙げる.[11]

3.1　自己双対重偶符号, ユニモジュラ偶格子, 正則 VOA

本節では, 自己双対重偶符号, ユニモジュラ偶格子, 正則 VOA における類似を見る.

3.1.1　自己双対重偶符号

自己双対重偶符号の例としては次がある.

例 3.1. (1) (拡張) ハミング符号 e_8 は (同型を除いて) ただ一つの長さ 8 の自己双対重偶符号である.

(2) (拡張) ゴレイ符号 G_{24} は (同型を除いて) ただ一つの長さ 24 で最小重み 8 の自己双対重偶符号である.

また, 次の定理が知られている.

定理 3.2. $\mathcal{C}$ を長さ n の自己双対重偶符号とする.

(1) $W_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は

$$G = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \rangle$$

による作用で不変であり, $W_{\mathcal{C}}(X,Y) \in \mathbb{C}[W_{e_8}(X,Y), W_{G_{24}}(X,Y)]$.

(2) $\mathcal{C}$ の最小重みについて次が成り立つ.

$$\mu(\mathcal{C}) \leq 4\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 4.$$

[11]様々な類似が知られているが, ここでは筆者の研究に関連した類似を主として取り上げる. 他の類似については, Höhn の論文 ([Hö95, Hö03, Hö08] 等) を参照せよ.

(3) 長さ n の自己双対重偶符号が存在するための必要十分条件は $n \in 8\mathbb{Z}$.

(2) において等号が成立する場合を**極値的 (extremal)** という. 極値的自己双対重偶符号に関して, 次のような結果がある.

事実 3.3. (i) 長さ 24 の極値的自己双対重偶符号はゴレイ符号と同値である.

(ii) ゴレイ符号 G_{24} の自己同型群は散在型有限単純群の一つ Mathieu 群 M_{24} と同型である.

(iii) 長さ 48 の極値的自己双対重偶符号は長さ 48 の extended quadratic residue code と同値である.

注意 3.4. (1) 長さ 72 の極値的自己双対重偶符号の存在・非存在は未解決.

(2) 長さ 40 以下の自己双対重偶符号は分類されている.[12]

3.1.2 ユニモジュラ偶格子

ユニモジュラ偶格子の例としては次がある.

例 3.5. (1) ルート格子である E_8 格子は(同型を除いて)ただ一つの階数 8 のユニモジュラ偶格子である.

(2) リーチ格子 Λ は(同型を除いて)ただ一つの階数 24 で最小ノルム 4 のユニモジュラ偶格子である.

また, 次の定理が知られている.

定理 3.6. L を階数 n のユニモジュラ偶格子とする.

(1) $\Theta_L(q)$ は weight $n/2$ の $SL(2,\mathbb{Z})$ に関する保型形式であり, $\Theta_L(q) \in \mathbb{C}[\Theta_{E_8}(q), \Theta_\Lambda(q)]$.

(2) L の最小ノルムについて次が成り立つ.

$$\mu(L) \leq 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 2.$$

(3) 階数 n のユニモジュラ偶格子が存在するための必要十分条件は $n \in 8\mathbb{Z}$.

(2) において等号が成り立つ場合を**極値的 (extremal)** という. 極値的ユニモジュラ偶格子に関して次の結果がある.

定理 3.7. (i) 階数 24 の extremal even unimodular 格子はリーチ格子 Λ と同型である.

(ii) $\mathrm{Aut}(\Lambda)/\langle -1 \rangle$ は散在型有限単純群の一つである Conway 群 Co_1 と同型である.

---

[12] 長さ 40 については, 最近に分類が完成した ([BHM]).

(iii) 非同型な階数 48 の極値的ユニモジュラ偶格子が少なくとも 3 個存在する.

(iv) [Ne] 階数 72 の極値的ユニモジュラ偶格子が少なくとも 1 個存在する.

注意 3.8. (1) 階数 48, 72 の極値的ユニモジュラ偶格子の分類は未解決.

(2) 階数が 24 以下のユニモジュラ偶格子は分類されている.

3.1.3 正則 VOA

正則 VOA の例としては次がある.

例 3.9. (1) [DM04] E_8-格子に付随する VOA V_{E_8} は (同型を除いて) ただ一つの中心電荷 8 の正則 VOA である.

(2) [FLM88] ムーンシャイン VOA $V^\natural$ は中心電荷 24 の正則 VOA である.

また次の定理が知られている.

定理 3.10. [Hö95] V を中心電荷 n の正則 VOA とする.

(1) (cf.[Zh96]) $\mathrm{ch}(V)$ は上半平面上の関数とみて, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の部分群 $\langle T^3, S\rangle$ の作用で不変であり, $\mathrm{ch}(V) \in \mathbb{C}[\mathrm{ch}(V_{E_8}), \mathrm{ch}(V^\natural)]$ である[13]. ただし

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) V の最小共形重みについて次が成り立つ.

$$\mu(V) \leq \lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 1.$$

(3) 中心電荷 n の正則 VOA が存在するための必要十分条件は $n \in 8\mathbb{Z}$.

(2) において等号が成り立つ時に **極値的 (extremal)** といい, 極値的正則 VOA に対して, 次の結果がある.

定理 3.11. (i) $V^\natural$ は中心電荷 24 の極値的正則 VOA である.

(ii) [FLM88] $V^\natural$ の自己同型群は散在型有限単純群の一つであるモンスター $\mathbb{M}$ と同型.

注意 3.12. (1) 中心電荷 24 の極値的正則 VOA は $V^\natural$ と同型と予想されている ([FLM88]).

(2) 中心電荷が 48 の極値的正則 VOA の存在・非存在は未解決.

(3) [DM04] 中心電荷 16 以下の正則 VOA は分類されている.

---

[13] 対比のための表記である. 実際は $\mathrm{ch}(V_{E_8})^3 - 744 = \mathrm{ch}(V^\natural)$ より, $\mathbb{C}[\mathrm{ch}(V_{E_8}), \mathrm{ch}(V^\natural)] = \mathbb{C}[\mathrm{ch}(V_{E_8})]$.

3.1.4 中心電荷 24 の正則 VOA の分類へ向けて

中心電荷 24 の正則 VOA の分類問題は, 長さ 24 の自己双対重偶符号の分類, 階数 24 のユニモジュラ偶格子の分類に対応する重要な問題である. 特に, 符号と格子において次が成立する.

定理 3.13.
- 長さ 24 の自己双対重偶符号は丁度 9 個あり, それらは重さ 4 の符号語の生成する部分符号から一意に決まる.
- 階数 24 のユニモジュラ偶格子は丁度 24 個あり, それらはノルム 2 の元が生成する部分格子から一意に決まる.

したがって, 次を考える必要がある.

問題 3.14.
- 中心電荷 24 の正則 VOA を分類せよ.
- 中心電荷 24 の正則 VOA は共形重さ 1 のリー代数構造から一意に決まるか?

これに対して, Schellekens が可能性のあるリー代数構造のリストが提出した ([Sc93]). その結果の一部は Dong-Mason によって数学的に正当化されている[14] ([DM04]). Schellekens の手法は, Venkov による階数 24 のユニモジュラ偶格子の分類で用いたアイデアの VOA 版を用いるものである. ここで, Venkov の結果を思い出す.

定理 3.15. [Ve78] L を階数 24 のユニモジュラ偶格子とし, $L(2) = \{v \in L \mid \langle v, v\rangle = 2\}$ とおく.

- $L(2) = \emptyset$ 又は $\langle L(2)\rangle_{\mathbb{Z}}$ の階数が 24.
- L の既約部分ルート格子のコクセター数は全て $\frac{|L(2)|}{24}$ に等しい.

この結果とルート系の分類から, $\emptyset$ も含めて 24 個の階数 24 のルート格子の可能性を得ることができ, 各々のルート格子の (ルートを増やさない) 拡大として (同型を除いて) ただ一つのユニモジュラ偶格子が得られることがわかる.

Venkov の結果の VOA 版が次である.

定理 3.16. [Sc93, DM04, DM06] V を中心電荷 24 の正則 VOA とする.

- $V_1 = 0$ 又は V_1 が生成する部分 VOA の中心電荷が 24.
- $V_1 \neq 0$ で可換ならば, V はリーチ格子 VOA.
- V_1 が非可換ならば, 半単純で, 各単純イデアル $\mathfrak{g}$ に対して, $\dfrac{\check{h}}{k} = \dfrac{\dim V_1 - 24}{24}$.
  ($\check{h}$ は $\mathfrak{g}$ の双対コクセター数, k は $\mathfrak{g}$ の (アフィン表現の) レベル.)
- レベル k は正の整数.

[14] 筆者は, [Sc93] は物理の論文であり, 数学的な厳密な証明がなされていないと考えている. したがって, この結果の完全な数学的な正当化も今後の課題の一つである.

しかしながら, [Sc93] によればこの結果だけでは, (レベルを込めた) リー代数の可能性が 288 までしか減らせない. さらに, 高い共形重さについて考察することで 71 まで減らせるらしい.[15] また, (格子の場合と異なって) アフィン VOA の拡大[16]に VOA 構造が入ることを示すことが一般には困難である. 故に, 71 個のリー代数の候補から始めて, 正則 VOA を構成するのが困難である. それゆえ, 別の方法で正則 VOA を構成する研究が進んでいる.

定理 3.17. [FLM88, Do93, DGM96] 格子 VOA と格子の -1 倍する自己同型に付随する $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法を用いて 39 個の中心電荷 24 の正則 VOA が得られる.

最近, 上で得られた 39 個を含む形で, 中心電荷 24 の枠付正則 VOA [17]の構成及び分類が行われた.

定理 3.18. [La11, LS12, LS] 中心電荷 24 の枠付正則 VOA は丁度 $56(=39+17)$ 個あり, それらは共形重さ 1 のリー代数構造から一意に決まる.

注意 3.19.
- [La11, LS12, LS] の結果は三重偶符号の分類 [BM12] を基に行われた.
- [Mi] において, 格子 VOA の $\mathbb{Z}_3$-軌道体構成法として, 新しい正則 VOA が一つ得られた.

3.2 符号から構成される格子, 格子から構成される VOA

C を長さ n の重偶符号とする. このとき, 次のようにして格子が得られる[18]:

$$\mathcal{L}(C) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(v_i) \in \mathbb{Z}^n \mid (\bar{v}_i) \in C\},$$
$$\mathcal{L}^+(C) = \{v \in \mathcal{L}(C) \mid \langle v, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,\dots,1)\rangle \in 2\mathbb{Z}\}.$$

命題 3.20. (1) $\mathcal{L}(C)$ は階数 n の偶格子.

(2) $R(\mathcal{L}(C)) = \mathcal{L}^*(C)/\mathcal{L}(C) = \{\mathcal{L}(c+C) \mid c + C \in C^\perp/C\}$.

(3) Λ は $\mathcal{L}^+(G_{24})$ の over 偶格子.

さて, L を階数 n の偶格子とする. すると, 格子 VOA V_L が構成できる ([FLM88]). また $\theta \in \mathrm{Aut}(V_L)$ を $-1 \in \mathrm{Aut}(L)$ の持ち上げとする. そして $V_L^+ = \{v \in V_L \mid \theta(v) = v\}$ を θ の固定部分空間とすると, 部分 VOA となる. これらの VOA に対して, 次が成立する.

命題 3.21. (1) V_L は中心電荷 n の VOA.

(2) $R(V_L) = \{[V_{\lambda+L}] \mid \lambda + L \in L^*/L\}$.

[15] この部分に関しては [Sc93] には詳細が書かれていない.
[16] VOA とその加群の直和
[17] 枠付き VOA の定義等は [DGH98] を参照.
[18] $\mathcal{L}(C)$ は構成法 A, $\mathcal{L}^+(C)$ は構成法 B と呼ばれる.

(3) $V^\natural$ は V_Λ^+ の (単純カレント) 拡大.

そこで, 筆者は V_L と V_L^+ の間の同型問題を考え, 次の結果を得た.

定理 3.22. [Sh12] L, N を階数 n の偶格子とする.

(1) $V_L \cong V_N \Leftrightarrow L \cong N$.

(2) $V_L^+ \cong V_N^+ \Leftrightarrow L \cong N$ or $\{L, N\} = \{E_8^{\oplus 2}, D_{16}^+\}$.

(3) $V_L^+ \cong V_N \Leftrightarrow \exists C \subset \mathbb{F}_2^n$ s.t. $L \cong \mathcal{L}(C)$ and $N \cong \mathcal{L}^+(C)$.

格子における同型問題に対しては次の結果がある.

定理 3.23. [KKM91, Sh12] C, D を長さ n の重偶符号とする.

(1) $\mathcal{L}(C) \cong \mathcal{L}(D) \Leftrightarrow C \cong D$.

(2) $\mathcal{L}^+(C) \cong \mathcal{L}^+(D) \Leftrightarrow C \cong D$ or $\{C, D\} = \{e_8^{\oplus 2}, d_{16}^+\}$.

(3) $\mathcal{L}^+(C) \cong \mathcal{L}(D) \Leftrightarrow \exists K \subset \mathbb{K}^{n/4}$ s.t. $C \cong \mathcal{C}(K)$ and $D \cong \mathcal{C}^+(K)$.

ただし $\mathcal{C}(K), \mathcal{C}^+(K)$ は Kleinian 偶符号から得られる重偶符号である ([Hö03]).

注意 3.24.
- [KKM91] では上の (1), (2) よりも強い結果である格子の枠への可移性を示している. ただし, $\mathcal{L}^+(C)$ は $n > 16$ で考えている. また, $\mathcal{L}^+(C)$ の拡大として得られる格子についても $n > 32$ の場合に $C \cong D$ に限ることを示している.
- [Sh12] で得た格子に関する結果の一つは, (2) において $n \leq 16$ の場合に (符号の分類を用いずに) 例外がただ一つであることを示したことと, (3) を得たことである.
- $\mathcal{C}(K), \mathcal{C}^+(K)$ に関する [KKM91] の結果の類似が [田端-田村] で得られている.

3.3 符号, 格子, VOA に付随する直交空間

ある種の符号, 格子, VOA に付随して直交空間が定義できる. ここでは, $C = \{(0^8), (1^8)\}$, $L = \sqrt{2}E_8$, $V = V_{\sqrt{2}E_8}^+$ の場合のみを取り扱う.

命題 3.25. $C = \{(0^8), (1^8)\}$ とし, $R(C) = C^\perp / C$ とおく.

(1) $q_C : R(C) \to \mathbb{F}_2$, $c \mapsto \mathrm{wt}(c)/2 \mod 2$ は $R(C)$ 上の $+$ 型の二次形式となり, $(R(C), q_C)$ は 6 次元の $\mathbb{F}_2$ 上の $+$ 型の直交空間である.

(2) $\mathrm{Aut}(C) \cong S_8 \cong O^+(6, 2)$.

命題 3.26. $L = \sqrt{2}E_8$ とし, $R(L) = L^*/L$ とおく.

(1) $q_L : R(L) \to \mathbb{F}_2$, $v \mapsto \langle v, v \rangle \mod 2$ は $R(L)$ 上の $+$ 型の二次形式となり, $(R(L), q_L)$ は 8 次元の $\mathbb{F}_2$ 上の $+$ 型の直交空間である.

(2) $\mathrm{Aut}(L)/\langle -1\rangle \cong O^+(8,2)$.

命題 3.27. [Sh04] $V = V^+_{\sqrt{2}E_8}$ とし, $R(V)$ を既約 V-加群の同型類全体の集合とすると, 分岐則によって, $\mathbb{F}_2$ 上の 10 次元のベクトル空間の構造を持つ.

(1) $q_V : R(V) \to \mathbb{F}_2$, $[M] \mapsto 2 \times (\text{wt of } M) \mod 2$ は $R(V)$ 上の + 型の二次形式となり, $(R(V), q_V)$ は 10 次元の $\mathbb{F}_2$ 上の + 型の直交空間である.

(2) $\mathrm{Aut}(V) \cong O^+(10,2)$.

注意 3.28. $\mathrm{Aut}(V) \cong O^+(10,2)$ は VOA の内部構造を用いた証明がある ([Gr98]).

これら直交空間を用いることで, G_{24}, Λ, $V^\natural$ をそれぞれ $C^{\oplus 3}$, $L^{\oplus 3}$, $V^{\otimes 3}$ の拡大として得ることができる.[19] その応用として自己同型群 M_{24}, Co_1, $\mathbb{M}$ の性質を得ることが出来る.

定理 3.29. (1) $\mathrm{Aut}(G_{24})$ は $\{D \subset G_{24} \mid D \cong C^{\oplus 3}\}$ に可移.

(2) $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(G_{24})}(L^{\oplus 3}) \cong 2^6 : (L_3(2) \times S_3)$.

定理 3.30. (1) $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ は $\{U \subset \Lambda \mid U \cong L^{\oplus 3}\}$ に可移.

(2) $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\Lambda)}(C^{\oplus 3}) \cong 2^3.(2^{12} : (L_4(2) \times S_3))$.

定理 3.31. [Sh11]

(1) $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ は $\{U \subset V^\natural \mid U \cong V^{\otimes 3} :\ \text{full subVOA}\}$ に可移.

(2) $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(V^\natural)}(V^{\otimes 3}) \cong 2^{15}.(2^{20} : (L_5(2) \times S_3))$.

また, これら直交空間による記述を用いることで, 次の等式を得ることが出来る.

$$(3 \times 1) + (3 \times (2^3 - 1)) \times 1^0 \times 2^2 + (3 \times (2^3 - 1) \times 2^4) \times 1^2 \times 2^1 = 759,$$
$$(3 \times 240) + (3 \times (2^4 - 1)) \times 2^0 \times 16^2 + (3 \times (2^4 - 1) \times 2^6) \times 2^2 \times 16^1 = 196560,$$
$$(3 \times 156) + (3 \times (2^5 - 1)) \times 1^0 \times 8^2 + (3 \times (2^5 - 1) \times 2^8) \times 1^2 \times 8^1 = 196884.$$

3.4 ブロックデザイン, 球面デザイン, 共形デザイン

符号にはブロックデザイン, 格子には球面デザインとの深い関わりがあることが知られている. 例えば, 次の Assmus-Mattson 型の定理が知られている.[20]

定理 3.32.
- 長さ $24k$ の極値的自己双対重偶符号からブロック 5-デザインが得られる.
- 階数 $24k$ の極値的ユニモジュラ偶格子から球面 11-デザインが得られる.

---

[19] この G_{24} の構成は Turyn 構成法と呼ばれている. その類似として, [LM82] で Λ が構成されている. さらに, これらの類似の視点から [Sh11] で $V^\natural$ を記述した. 本質的な部分は [Mi04] で行われている.

[20] 本来の定理はもっと強い結果である.

これらの VOA における類似の主張を考えたい．そのためには, VOA に付随するデザインを定義する必要がある．実際に, [Hö08] において共形デザインが導入され, Assmus-Mattson 型の定理を証明された．まずは, ブロックデザインと球面デザインにおけるデザインの類似の定義を思い出す．

$\mathrm{Hom}(s) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}_2}\{\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2,\ (x_i) \mapsto \prod_{i\in M} x_i \mid \#M = s\}$ と置く．

定義 3.33. $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．$X \subset \binom{\Omega}{k}$ がブロック t-デザイン $\Leftrightarrow \forall f \in \oplus_{i=0}^{t}\mathrm{Hom}(i)$, $\forall g \in S_n$ に対して $\sum_{v\in X} f(v) = \sum_{v\in X} f(g(v))$

$S(r) \subset \mathbb{R}^n$ を中心が 0 で半径 r の球面とする．$\mathrm{Hom}(s) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{S(r) \to \mathbb{R},\ (x_i) \mapsto \prod_{\sum a_i = s} x_i^{a_i}\}$ と置く．

定義 3.34. $W \subset S(r)$ が球面 t-デザイン $\Leftrightarrow \forall f \in \oplus_{i=0}^{t}\mathrm{Hom}(i)$, $\forall g \in O(n)$ に対して $\sum_{v\in W} f(v) = \sum_{v\in W} f(g(v))$.

[Hö08] による, これらの定義の VOA における類似は次の通りである.[21]

$V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_n$ を VOA, $N = \oplus_{h\in\mathbb{C}} N_h$ を V-加群とする．共形重みを保つ $v \in V_n$ の作用を $o(v) = v_{n-1}$ と置く．また V_ω で V の共形元 ω が生成する部分 VOA を表す．そして, V が V_ω-加群として V_ω の補空間が取れると仮定し, V から V_ω への射影を π で表すことにする．

定義 3.35. [Hö08] N_h が共形 t-デザイン $\Leftrightarrow \forall f \in \oplus_{i=0}^{t} V_i$, $\mathrm{tr}_{N_h} o(f) = \mathrm{tr}_{N_h} o(\pi(f))$.

定理 3.36. [Hö08] V を中心電荷 $24k$ の極値的正則 VOA ならば, 任意の n に対して V_n は共形 11-デザインとなる．

さらに, 以前に対応があると述べた例においてもデザインの対応がある．

例 3.37.

- $\{c \in e_8 \mid \mathrm{wt}(c) = 4\}$ はブロック 3-(8, 4, 1) デザイン．
- $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\{v \in E_8 \mid \langle v, v\rangle = 2m\}$ は球面 7-デザイン．
- $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(V_{E_8})_m$ は共形 7-デザイン．

さらに, 共形デザインについての次のような結果が得られている．

定理 3.38. [Ma01, Hö08] V を VOA とし, $V_1 = 0$, $V_2 > 1$, V_2 が共形 8-デザインとする．このとき, V の中心電荷は 24 かつ $\dim V_2 = 196884$.

定理 3.39. [Mie] Lehmer 予想が正しいことと, 任意の $m \geq 2$ に対して, $(V^\natural)_m$ が共形 12-デザインでないことが同値である．

---

[21] ただし, この定義で本当にブロックデザインと球面デザインの類似と言って良いかは明らかではないと思う．共形デザインと同値な他の定義, 定義の拡張を考える必要があると思われる．特に, VOA を用いない共形デザインについて考える必要があると思われる．そして, 共形デザインの同型や自己同型の概念を導入することで, モンスターを含む面白い群を共形デザインの対称性の視点から捉えられると面白いと思う．

4 まとめ

今まで見てきたように, VOA を (二元) 符号や格子と類似と見て研究することが可能である. 例えば, 次の研究が考えられる.

- 符号, 格子で成り立っている定理の VOA 版を考える.
- 符号, 格子における手法や概念を VOA に導入する.

そして, G_{24}, Λ, $V^\natural$ の間の類似を考えることで, $\mathbb{M}$ の研究手法となり得る.

また, VOA まで含めて考えることで, 符号や格子を見直しに繋がると思われる. さらに Kleinian 符号や L-符号も含めて研究する余地があると思われる [Hö03, GH]. そして, 共形デザインの理論は, まだまだ研究の必要があると思われる.

これまで見てきたように, VOA を符号, 格子, デザインの "周辺" と思って研究することは重要である. 今後も連携を取りながら研究を進めて行きたいと考えている.

参考文献

[BM12] K. Betsumiya and A. Munemasa, On triply even binary codes, *J. London Math. Soc.* **86** (2012), 1–16.

[BHM] K. Betsumiya, M. Harada and A. Munemasa, A Complete classification of doubly even self-dual codes of length 40, arXiv:1104.3727v2.

[Bo86] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068–3071.

[DGM96] L. Dolan, P. Goddard and P. Montague, Conformal field theories, representations and lattice constructions, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 61–120.

[Do93] C. Dong, Vertex algebras associated with even lattices, *J. Algebra* **161** (1993), 245–265.

[DGH98] C. Dong, R.L. Griess, and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and Moonshine module, *Comm. Math. Phys.* **193** (1998), 407–448.

[DM04a] C. Dong and G. Mason, Rational vertex operator algebras and the effective central charge, *Int. Math. Res. Not.* (2004), 2989–3008.

[DM04b] C. Dong and G. Mason, Holomorphic vertex operator algebras of small central charge, *Pacific J. Math.* **213** (2004), 253–266.

[DM06] C. Dong and G. Mason, Integrability of C_2-cofinite vertex operator algebras. *Int. Math. Res. Not.* (2006), Art. ID 80468, 15 pp.

[FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, 1988.

[DM04] C. Dong and G. Mason, Holomorphic vertex operator algebras of small central charge, *Pacific J. Math.* **213** (2004), 253–266.

[FHL93] I. Frenkel, Y. Huang and J. Lepowsky, On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules, Mem. Amer. Math. Soc. **104** 1993.

[GH] J. Galstad and G. Höhn, A new class of codes over $Z_2 \times Z_2$, preprint, arXiv:1008.1927v1.

[Gr98] R.L. Griess, A vertex operator algebra related to E_8 with automorphism group $\mathrm{O}^+(10,2)$, *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.* **7** (1998), 43–58.

[Hö95] G. Höhn, Selbstduale Vertexoperatorsuperalgebren und das Babymonster, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universitat Bonn, Bonn, 1995.

[Hö03] G. Höhn, Self-dual codes over the Kleinian four group, *Math. Ann.* **327** (2003), 227–255.

[Hö08] G. Höhn, Conformal designs based on vertex operator algebras, *Adv. Math.* **217** (2008), 2301–2335.

[KKM91] M. Kitazume, T. Kondo and I. Miyamoto, Even lattices and doubly-even codes, *J. Math. Soc. Japan* **43** (1991), 67–87.

[LM82] J. Lepowsky and A. Meurman, An E_8-approach to the Leech lattice and the Conway group, *J. Algebra* **77** (1982), 484–504.

[La11] C.H Lam, On the constructions of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, *Comm. Math. Phys.* **305** (2011), 153–198

[LS12] C.H. Lam and H. Shimakura, Quadratic spaces and holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, *Proc. Lond. Math. Soc.* **104** (2012), 540–576.

[LS] C.H. Lam and H. Shimakura, Classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, preprint.

[Ma01] A. Matsuo, Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry, *Comm. Math. Phys.* **224** (2001), 565–591.

[Mi04] M. Miyamoto, A new construction of the Moonshine vertex operator algebra over the real number field, *Ann. of Math.* **159** (2004), 535–596.

[Mi] M. Miyamoto, A $\mathbb{Z}_3$-orbifold theory of lattice vertex operator algebra and $\mathbb{Z}_3$-orbifold constructions, preprint, arXiv:1003.0237.

[Mie] T. Miezaki, Conformal designs and D.H. Lehmer's conjecture, preprint, arXiv:1005.2057v5.

[Ne] G. Nebe, An even unimodular 72-dimensional lattice of minimum 8, to appear in *J. Reine und Angew. Math.*

[Sc93] A.N. Schellekens, Meromorphic $c = 24$ conformal field theories, *Comm. Math. Phys.* **153** (1993), 159–185.

[Sh04] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* **280** (2004), 29–57.

[島倉 08] 島倉裕樹, 頂点作用素代数における, 符号・格子との類似について, 第53回代数学シンポジウム報告集 (2008).

[Sh11] H. Shimakura, An E_8-approach to the moonshine vertex operator algebra, *J. Lond. Math. Soc.* **83** (2011), 493–516.

[Sh12] H. Shimakura, On isomorphism problems for vertex operator algebras associated with even lattices, *Proc. Amer. Math. Soc.* **140** (2012), 3333–3348.

[田端-田村] 田端俊 and 田村宏樹, in preparation.

[Ve78] B.B. Venkov, On the classification of integral even unimodular 24-dimensional quadratic forms, *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **148** (1978), 65–76.

[Zh96] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.