数理解析研究所講究録
第 1845 巻 2013 年 121-144

Olsen's inequality and its applications to the MHD equations

京都大学・理学研究科　澤野嘉宏 (Yoshihiro Sawano)
Department of Mathematics
Kyoto University
東京大学・数理科学研究科　田中仁 (Hitoshi Tanaka)
Department of Mathematical Science
The University of Tokyo
神戸市立高専・一般科　菅野聡子 (Satoko Sugano)
Kobe City College of Technology
Mostaganem University Sadek Gala

Abstract

The aim of this talk is to obtain a sharp version of the Olsen inequality in terms of Orlicz norms and to apply it to the MHD equations. Our new result will loosen the assumption needed for the uniqueness of the solutions. We want to propose a new result that promises many applications to PDEs in general and we intend to take up the MHD equations just as an example.

Contents

Part I

モレー空間に関する我々の結果

1 モレー空間の基礎事項

$1 \leq q \leq p < \infty$ とする．このとき，モレーノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_q^p}$ は

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} := \sup_{x \in \mathbf{R}^n, r>0} r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \tag{1}$$

で与えられる．

ヘルダーの不等式を用いると，$p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq 1$ のときに，

$$L^{p_0} = \mathcal{M}_{p_0}^{p_0} \hookrightarrow \mathcal{M}_{p_1}^{p_0} \hookrightarrow \mathcal{M}_{p_2}^{p_0} \tag{2}$$

を示すことができる．(確率測度のヘルダーの不等式の証明を連想すると良い.) これから証明する定理 2.9 からも，埋め込みが厳密なものであることがわかる．

(2) よりわかることとして，特に今回着眼したいのは，

$$\|S(f,g)\|_X \leq C \|g\|_{\mathcal{M}_q^p} \|f\|_Y$$

なる評価を得ようとするときに，X, Y, p を固定しておきながら，如何にして q を下げるかという問題である．

2 オルセンの不等式 (trace 不等式)

2.1 分数べき積分作用素のモレー空間有界性に関する基本事項

分数べき積分作用素は

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \, dy, \; 0 < \alpha < n \tag{3}$$

で与えられる.

アダムスによる，基本的な定理は以下のとおりである.

定理 2.1 ([1], [9, 非全射性の証明]).

$$1 < q \le p < \infty,\ 1 < t \le s < \infty,\ \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n},\ \frac{q}{p} = \frac{t}{s} \tag{4}$$

とすると，I_α を定義している積分は $f \in \mathcal{M}^p_q$ に対してもほとんどいたるところ絶対収束して，I_α は $\mathcal{M}^p_q$ から $\mathcal{M}^s_t$ への非全射有界線形作用素となる．つまり，すべての $Q \in \mathcal{Q}$(立方体全体のなす集合) に対して，

$$|Q|^{1/s}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |I_\alpha f(x)|^t\,dx\right)^{1/t} \le C\|f\|_{\mathcal{M}^p_q},\quad \frac{1}{t} = \frac{q}{p}\frac{1}{s},\ \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{n} \tag{5}$$

が成り立つ.

2.2 オルセンの不等式

我々は次の定理を得た.

定理 2.2. $0 < \alpha < n,\ 1 < p \le p_0 < \infty,\ 1 < q \le q_0 < \infty,\ 1 < r \le r_0 < \infty$ とする．ここで，

$$q > r,\ \frac{1}{p_0} > \frac{\alpha}{n},\ \frac{1}{q_0} \le \frac{\alpha}{n}, \tag{6}$$

かつ

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n},\ \frac{r}{r_0} = \frac{p}{p_0} \tag{7}$$

を仮定すると，正値可測関数 f, g に依らない定数が存在して，

$$\|g \cdot I_\alpha f\|_{\mathcal{M}^{r_0}_r} \le C\|g\|_{\mathcal{M}^{q_0}_q} \cdot \|f\|_{\mathcal{M}^{p_0}_p},$$

が成り立つ.

(2) によると，定理中の q の値は小さいほうが良いことがわかる.

アダムスの定理 (定理 2.1) とヘルダーの不等式を用いると，定理 2.2 のうち，$\frac{p}{p_0}q_0 \le q \le q_0$ の場合はたしかに簡単に証明できる.

証明. $\frac{r}{r_0} = \frac{p}{p_0},\ \frac{1}{r_0} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$ より，

$$\frac{1}{r} = \frac{p_0}{p}\left(\frac{1}{q_0} + \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}\right) = \frac{p_0}{p}\frac{1}{q_0} + \frac{1}{s}$$

となるから，$\dfrac{r}{r_0}=\dfrac{p}{p_0}=\dfrac{q}{q_0}$ である限り，

$$|Q|^{1/q_0+1/s_0}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |g(x)I_\alpha f(x)|^r\,dx\right)^{1/r}\le C\|g\|_{\mathcal{M}^{q_0}_q}\|f\|_{\mathcal{M}^{p_0}_p}$$

となる．包含関係 (2) から

$$\frac{p}{p_0}q_0\le q\le q_0$$

なら定理が成立することがわかる．ここで，分数式を計算すると，$\dfrac{1}{r_0}=\dfrac{1}{q_0}+\dfrac{1}{p_0}-\dfrac{\alpha}{n}>\dfrac{1}{q_0}$ だから，$q_0>r_0$ である．□

よって，$q>r$ より，定理 2.2 の本質は $\dfrac{p}{p_0}r_0<q<\dfrac{p}{p_0}q_0$ の場合である．

定理 2.2 のような現象は I_α の非全射性から発生するのではないかと考える．

2.3 先行結果と定理 2.2 との比較，問題点

定理 2.2 を今まで知られていた Fefferman-Phong の不等式と突き合わせてみて何が言えているのかを考える．

定理 2.3 (Fefferman-Phong の不等式). $1<p\le n/2,\ n\ge 3$ とする．十分良い関数 $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ と荷重 $w\in\mathcal{M}^{p,n/2}$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2w(x)\,dx\le C\|w\|_{\mathcal{M}^{p,n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|^2\,dx,\quad f\in H^1(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．

フーリエ変換と 2 進分解を用いて得られる不等式

$$|f(x)|\le CI_1[|\nabla f|](x)$$

が知られているので，分数べき積分作用素の言葉で，この定理を書き換えると次のようになる．

定理 2.4 (Fefferman-Phong の不等式). $1<p\le n/2,\ n\ge 3$ とする．十分良い関数 $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ と荷重 $w\in\mathcal{M}^{p,n/2}$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^n}|I_1f(x)|^2w(x)\,dx\le C\|w\|_{\mathcal{M}^{p,n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\,dx,\quad f\in L^2(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．

このことから，定理 2.2 は Fefferman-Phong の不等式のモレー空間に関する拡張であるといえる．しかし，定理 2.2 を L^2 に適用しても，同じ結果が出るだけで,「改良」にはなっていない．

注意 2.5. なお，重要なこととして，$p=1$ の場合には反例があることが知られている．[7] を参照のこと．

注意 2.6. ルマリエによると，$0<s\le n/2$ とするとき，

$$\|g\cdot f\|_{\dot{B}^s_{21}}\le C\|g\|_{\mathcal{M}_2^{n/s}}\|f\|_{L^2}$$

が成り立ち，$\mathcal{M}_2^{n/s}$ はこの条件によって特徴づけられる．

2.4 結果の改良に関する考え方

無限級数を用いて，どのようなことを考えているのかを例示すると直感に働きかけられると思う．周知のとおり，

$$\frac{1}{1^a}+\frac{1}{2^a}+\cdots+\frac{1}{n^a}+\cdots$$

が収束する実数 a の条件は $a>1$ である．$a=1$ の場合，つまり，

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

は非常に巧妙（少なくとも初学のときは）な方法で発散することを示した．これは，解析学の時間にやる収束判定の基本的な場合である．収束判定に関して，この性質は基本的であるが，次に「応用」問題として，

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\cdots+\frac{1}{n\log n}+\cdots$$

が考えられるであろう．これが発散することは，$\log\log x$ の導関数を考えれば良いこともよく知られていることである．これが発散するのは事実であるが，$a>1$ に対して，

$$\frac{1}{2(\log 2)^a}+\frac{1}{3(\log 3)^a}+\cdots+\frac{1}{n(\log n)^a}+\cdots$$

は収束する．$(\log x)^{1-a}$ を考えればよいことは周知の事実であると思われる．

定理 2.2 において冪 q の限界が $q>r$ と分かってしまった以上 ([7], 注意 2.5 を参照), $q=r$ を考えることはもはや無意味であるが,「$q=r+0$」を考えることには意味を見いだせると思われる．アイデアはこのように簡単であるが，実解析的な道具を正確に使いこなさないといけないために，証明はかなり複雑である．

2.5 主結果

今までの方針に従って，関数空間を定義しよう．

定義 2.7. 実数 $P\in\mathbb{R}$ と $1<u<v<\infty$ に対して，オーリッツモレー空間 $\mathcal{M}^v_{\mathrm{L^u\,log^P\,L}}$ はノルム

$$\|f\|_{\mathcal{M}^v_{\mathrm{L^u\,log^P\,L}}}:=\sup\left\{r^{n/v}\|f\|_{B(x,r),\mathrm{L^u\,log^P\,L}}\,:\,x\in\mathbb{R}^n,\,r>0\right\},\quad f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \tag{8}$$

によって与えられる．ここで，$\|f\|_{B(x,r),\mathrm{L}^u\log^P\mathrm{L}}$ とは，

$$\|f\|_{B(x,R),\mathrm{L}^u\log^P\mathrm{L}}$$
$$:=\inf\left\{\lambda>0\ :\ \frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^u\log\left(3+\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^P dx\le 1\right\}$$

によって与えられる $t^u\log^P(3+t)$-平均である．

我々方程式に応用する定理は以下のとおりである．

定理 2.8. $n=3,\ 0<\alpha<3/2$ とする．$P>1$ なら，

$$\|g\cdot I_\alpha f\|_{L^2}\le C\,\|g\|_{\mathcal{M}^{3/\alpha}_{\mathrm{L}^2\log^P\mathrm{L}}}\|f\|_{L^2},\quad f,g\in L^2(\mathbb{R}^3)\tag{9}$$

が成り立つ．

2.6 従来の結果との関係

我々は「$\mathrm{L}^2\log^P\mathrm{L}^{3/\alpha}$」という新しい関数 g を入れる「入れ物」を考えることにしたが，これは本当に大きな「入れ物」であろうか？

以下のような厳密な包含関係が存在する．

定理 2.9. $P>0,\ 0<u<\tilde{u}<v$ とする．このとき，連続埋込みの意味合いで，

$$L^v(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^{v,\infty}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{M}^v_{\tilde{u}}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{M}^v_{\mathrm{L}^u\log^P\mathrm{L}}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{M}^v_u(\mathbb{R}^n)\tag{10}$$

が成り立ち，各段階で埋込みは真の埋め込みである．ここで，$L^{v,\infty}(\mathbb{R}^n)$ はノルム

$$\|f\|_{L^{v,\infty}}=\sup_{t>0}t|\{|f|>t\}|^{1/v}$$

で与えられる．

証明. 埋め込みのそれぞれ左から順に (1), (2), (3), (4) と名前をつけておく．

(1) (a) 埋込みが成り立つことは，

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^v\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{|f(x)|}v\lambda^{v-1}\,d\lambda\right)dx=\int_0^\infty v\lambda^{v-1}|\{|f|>\lambda\}|\,d\lambda$$

がフビニの定理によって成り立つから明らかである．

(b) 埋め込みが真であることは，$f(x)=|x|^{-n/v}\in L^{\infty,v}\setminus L^v$ を考えればよい．

(2) (a) 埋込みが成り立つことは，任意の球 B に対して，

$$|B|^{1/v-1/u}\left(\int_B |f(x)|^u\,dx\right)^{1/u}$$
$$=|B|^{1/v-1/u}\left(\int_0^\infty u\lambda^{u-1}|\{x\in B\,:\,|f(x)|>\lambda\}|\,d\lambda\right)^{1/u}$$

が成り立つから，$L^{v,\infty}$ ノルムの情報から，分布関数を評価していけば良い．

(b) 埋め込みが真であることは，$u,\tilde{u}$ が条件を満たす限り任意に取れることと，(4) の埋め込みが真であることから分かるので，ここではとりあえず証明はしない．

(3) (a) 埋込みが成り立つことを示そう．$f\in\mathcal{M}^v_{\tilde{u}}$ と球 B を取る．$C_0\gg 1$ ならば，

$$t^u\log^P(3+t)\le C_0(3+t)^{\tilde{u}}\quad(t>0) \tag{11}$$

となる．ここで，

$$\lambda_1:=\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)|^{\tilde{u}}\,dx\right)^{1/\tilde{u}}. \tag{12}$$

と書こう．$\lambda_1>0$ ならば，(11) から，

$$\frac{1}{|B|}\int_B\frac{|f(x)|^u}{\lambda_1{}^u}\log^P\left(3+\frac{|f(x)|}{\lambda_1}\right)dx\le\frac{C_0}{|B|}\int_B\left(3+\frac{|f(x)|}{\lambda_1}\right)^{\tilde{u}}dx\le 4\cdot 3^{\tilde{u}}C_0 \tag{13}$$

となる．よって，$\lambda_1\ne 0$ なら，

$$\|f\|_{B,\mathrm{L}^u\log^P\mathrm{L}}\le 4\cdot 3^{\tilde{u}}C_0\cdot\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)|^{\tilde{u}}\,dx\right)^{1/\tilde{u}} \tag{14}$$

が成り立つ．$\lambda_1=0$ とすると，f は a.e. 消えているから， 不等式は自明である．C_0 を用いて，いま得られた結論を整理すると，

$$\|f\|_{\mathcal{M}^v_{\mathrm{L}^u\log^r\mathrm{L}}}\le 4\cdot 3^{\tilde{u}}C_0\|f\|_{\mathcal{M}^v_{\tilde{u}}} \tag{15}$$

が得られる．

(b) 埋め込みが真であることは，(4) の埋め込みが真であることから分かるので，ここではとりあえず証明はしない．

(4) (a) 埋込みが成り立つことは，(3) と同じように $f\in\mathcal{M}^v_{\mathrm{L}^u\log^r\mathrm{L}}$ と球 B を取ることから始める．今度は

$$\lambda_2=\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)|^u\,dx\right)^{1/u} \tag{16}$$

とおこう．すると，

$$\frac{1}{|B|}\int_B\frac{|f(x)|^u}{\lambda_2{}^u}\log^P\left(3+\frac{|f(x)|}{\lambda_2}\right)dx\ge\frac{1}{|B|}\int_B\frac{|f(x)|^u}{\lambda_2{}^u}\,dx=1 \tag{17}$$

だから，

$$\|f\|_{B,\mathrm{L}^u\log^P\mathrm{L}}\ge\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)|^u\,dx\right)^{1/u} \tag{18}$$

となる．B は任意であったので，包含関係が得られた．

(b) この埋め込みが真であることを示すのが一番骨折りである．他の場合も同じようにできるから，$v=4$，$u=2<\tilde{u}$ としよう．$E=\{0,1\}^n$ とおく．フラクタルの構成をするときに使う関数系 $\{f_e\}_{e\in E}$ を

$$f_e(x) := \frac{1}{2}e + \frac{1}{4}x \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

で定めて，フラクタルを構成する要領で，

$$E_0 = [0,1]^n,\ E_{k+1} = \bigcup_{e\in E} f(E_k) \quad (k = 0,1,2,\cdots).$$

とおいて，$E_0, E_1, \cdots$ を定める．すると，幾何学的な考察によって，

$$C^{-1}\|\chi_{E_k}\|_{L^2} \le \|\chi_{E_k}\|_{\mathcal{M}^4_2} \le C\|\chi_{E_k}\|_{L^2} = C2^{-kn/2}$$

が得られる．[6, 10] を参照のこと．定義より，

$$\|\chi_{E_k}\|_{\mathcal{M}^4_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}} \ge C\text{ “}\frac{1}{\lambda^2}\log^P\left(3+\frac{1}{\lambda}\right) = 4^{kn} \text{ の一意解 } \lambda_k > 0\text{”}$$

となる．このことから，$k\to\infty$ のときに $\lambda_k \to 0$ となる．したがって，

$$\limsup_{k\to\infty} 2^{kn}(\|\chi_{E_k}\|_{\mathcal{M}^4_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}})^2 \ge C \limsup_{k\to\infty} \log^{2P}\left(3+\frac{1}{\lambda_k}\right) = \infty$$

が得られた．以上の関係から，(4) の包含関係は真に違う．

□

この命題中における (4) の包含関係の差が我々の定理が Fefferman-Phong の定理の「改良」になっていることに相当する．

2.7 $\mathcal{M}^v_{\mathrm{L}^u\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}$ の自然性

$\mathcal{M}^v_{\mathrm{L}^u\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}$ は一見すると人工的であるが，次の命題が示すように，自然な関数空間であることがわかる．

定理 2.10. $v>1$ とするとき，

$$\|f\|_{\mathcal{M}^v_1} \sim \|Mf\|_{\mathcal{M}^v_{\mathrm{L}^1\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}}$$

が成り立つ．

ここで，$\gtrsim$ ではなく，$\sim$ が成り立っていることに注目していただこう．

2.8 ハーディー・リトルウッドの極大作用素の性質

まず，主定理の log を少し一般化して，Ψ-平均を定義しよう．$t^2\log^P(3+t)$ の共役関数に関しても平均を考える必要があるからである．$\|f\|_{B(x,R),\Psi}$ は Ψ-平均と呼ばれて，

$$\|f\|_{B(x,R),\Psi} := \inf\left\{\lambda>0 : \frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} \Psi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right) dx \le 1\right\} \tag{19}$$

で定義される．Ψ と Φ が，共役関係

$$\Psi(t) = \sup\{st - \Phi(s) : s \ge 0\} \tag{20}$$

を満たしているならば，この関係式と斉次性の議論から

$$\frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} |f(x)g(x)|\, dx \le C\,\|f\|_{B(x,R),\Phi}\|g\|_{B(x,R),\Psi} \tag{21}$$

となる．特に，我々の考えている $P>1$ に対する $\Phi(t)=t^2\log^P(3+t)$ では共役関数は実質的に

$$\Psi(t) = t^2\log^{-P}(3+t) \tag{22}$$

等しいことがわかる．[10] には詳しい計算が載っているが，直接的に計算するのもそれほど苦ではないであろう．

以上のことをまとめると，ヘルダーの不等式の一般化が得られる．ここで，定数 C はルベーグ空間とは違って外すことが出来ないことに注意しよう．この場合に (21) を繰り返すと，以下のようになる．

命題 2.11. f, g は球 $B(x,R)$ における可測関数であるとする．このとき，

$$\frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} |f(x)g(x)|\, dx \le C\|f\|_{B(x,R),\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}\|g\|_{B(x,R),\mathrm{L}^2\log^{-\mathrm{P}}\mathrm{L}} \tag{23}$$

が成り立つ．

次に，分数べき積分作用素の解析の要となる極大作用素を 2 種類用意しよう．ひとつは，分数べき極大作用素

$$M_\alpha f(x) := \sup_{R>0} |B(x,R)|^{\alpha/n}\frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} |f(y)|\, dy \tag{24}$$

で，もうひとつは $t^2\log^{-P}(3+t)$-冪極大作用素

$$M^{\mathrm{L}^2\log^{-\mathrm{P}}\mathrm{L}} f(x) := \sup_{R>0} \|f\|_{B(x,R),\mathrm{L}^2\log^{-\mathrm{P}}\mathrm{L}} \tag{25}$$

である．最初の M_α は補助的で，主役は $t^2\log^{-P}(3+t)$-冪極大作用素である．

命題 2.12. $P>1$ のとき，$M^{\mathrm{L}^2\log^{-\mathrm{P}}\mathrm{L}}$ は L^2-有界である．

この証明を追っていけば，定理2.8で使う事実である M が L^2-有界であることもわかるであろう．

証明. $\Psi(t) = t^2 \log^{-P}(3+t)$ と共役関数を書くことにしよう．

主張 2.13. （命題 *2.12* の証明の下に略証明を付ける）立方体 Q に対して，

$$\left|\left\{x \in Q : M^{\Psi}[f\chi_Q](x) > t\right\}\right| \leq C \int_{\{x\in Q:\, f(x)>t/2\}} \Psi\left(\frac{f(y)}{t}\right) dy \tag{26}$$

が成り立つ．[10, Lemma 2.10] を参照．

Q の任意性より，

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\Psi} f(x) > t\right\}\right| \leq C \int_{\{x\in \mathbb{R}^n:\, f(x)>t/2\}} \Psi\left(\frac{f(y)}{t}\right) dy \tag{27}$$

となる．ここで，

$$\int_0^{2a} t\Psi\left(\frac{a}{t}\right) dt = a^2 \int_0^2 t\Psi\left(\frac{1}{t}\right) dt = a^2 \int_0^2 \frac{1}{t\log^P(3+t^{-1})}\, dt < \infty, \quad a > 0 \tag{28}$$

が成り立つから，(27) を重みつき測度 $t\,dt$ に関して，$(0,\infty)$ 上積分すれば，(28) から所望の結果が成り立つ． □

主張の証明は，$\left\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\Psi} f(x) > t\right\}$ に属する点は，Ψ 平均が t を超える「極大」の立方体の和として表される．このような立方体を介して，主張は証明される．

2.9 主結果 (定理 2.8) の証明

P にしたがって，次の各点評価を用いる．2 進立方体全体のなす集合 $\mathcal{D} = \{2^{-k}m + 2^{-k}[0,1)^n : k \in \mathbb{Z},\, m \in \mathbb{Z}^n\}$ と定める．

補題 2.14. f が正値可測関数のときに，

$$I_\alpha f(x) \leq C \sum_{Q\in\mathcal{D}} |Q|^{\alpha/n} \left(\frac{1}{|Q|}\int_{3Q} f(y)\, dy\right) \chi_Q(x) \tag{29}$$

が成り立つ．

証明. $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ を

$$\mathbb{R}^n \setminus \{x\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(B(x, 2^{-k}) \setminus B(x, 2^{-k-1})\right) \tag{30}$$

と分解して，積分核を評価すると，

$$I_\alpha(f)(x) \leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k(n-\alpha)} \int_{B(x,2^{-k})} f(y)\, dy \tag{31}$$

を得る．各 k に対して，$\mathcal{D}_k := \{2^{-k}m + 2^{-k}[0,1)^n : m \in \mathbb{Z}^n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の分割だから，

$$I_\alpha f(x) \le C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k(n-\alpha)} \int_{B(x,2^{-k})} f(y)\,dy = C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|^{1-\alpha/n}} \int_{B(x,2^{-k})} f(y)\,dy \quad (32)$$

となる．ここで，$Q \in \mathcal{D}_k$ が $x \in \mathbb{R}^n$ を含めば，$B(x,2^{-k}) \subset 3Q$ であるから，(32) より，

$$I_\alpha f(x) \le C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|^{1-\alpha/n}} \int_{3Q} f(y)\,dy \le C \sum_{Q \in \mathcal{D}} |Q|^{\alpha/n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{3Q} f(y)\,dy \right). \quad (33)$$

よって，証明が完成した． □

次の補題も必要とする．$\mathcal{D}_1(Q_0)$ で，Q_0 からスタートして，辺を 2 等分しながら得られる立方体全体を表すこととする．

補題 2.15. $h \in L^\infty(Q_0)$ を正値関数とする．$\gamma_0 := m_{Q_0}(h)$，$c_0 := 2^{n+1}$ と略記する．$k = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$D_k = \bigcup \{Q : Q \in \mathcal{D}_1(Q_0),\, m_Q(h) > \gamma_0 {c_0}^k\} \quad (34)$$

と定める．包含関係に関する極大族を考えることで，

$$D_k = \bigcup_j Q_{k,j} \quad (35)$$

と内点を共有しない部分族 $\{Q_{k,j}\} \subset \mathcal{D}_1(Q_0)$ を用いてあらわす．

1. $Q_{k,j}$ の極大性によって，

$$\gamma_0 {c_0}^k < m_{Q_{k,j}}(h) \le 2^n \gamma_0 {c_0}^k \quad (36)$$

であるが，

$$E_0 = Q_0 \setminus D_1 \text{ かつ } E_{k,j} = Q_{k,j} \setminus D_{k+1} \quad (37)$$

とおくと，$\{E_0\} \cup \{E_{k,j}\}$ は Q_0 の分割で，

$$|Q_0| \le 2|E_0| \text{ かつ } |Q_{k,j}| \le 2|E_{k,j}| \quad (38)$$

を満たしている．

2. さらに，

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \{Q \in \mathcal{D}_1(Q_0) : m_Q(h) \le \gamma_0 c\} && (39) \\ \mathcal{D}_{k,j} &= \{Q \in \mathcal{D}_1(Q_0) : Q \subset Q_{k,j},\, \gamma_0 {c_0}^k < m_Q(h) \le \gamma_0 {c_0}^{k+1}\}. && (40) \end{aligned}$$

とおくと，

$$\mathcal{D}_1(Q_0) = \mathcal{D}_0 \cup \bigcup_{k,j} \mathcal{D}_{k,j} \quad (41)$$

と分割される．

それでは，定理 2.8 を証明しよう．

単調収束定理によって，

$$\int_{Q_0} g(x)^2 I_\alpha f(x)^2\,dx \le C\|g\|^2_{\mathcal{M}^{n/\alpha}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}}\|f\|_2^2 \tag{42}$$

をすべての 2 進立方体 Q_0 に対して示せば良い．補題 2.14 によって，(42) は

$$\int_{Q_0} g(x)^2 \left\{ \sum_{Q\in\mathcal{D}} |Q|^{\alpha/n} \left(\frac{1}{|Q|}\int_{3Q} f(y)\,dy \right) \chi_Q(x) \right\}^2 dx \le C\|g\|^2_{\mathcal{M}^{n/\alpha}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}}\|f\|_2^2 \tag{43}$$

に帰着される．(43) の左辺を固定された Q_0 に応じて分解する．

$$\int_{Q_0} g(x)^2 \left\{ \sum_{\substack{Q\in\mathcal{D}\\ Q\supset Q_0}} |Q|^{\alpha/n} \left(\frac{1}{|Q|}\int_{3Q} f(y)\,dy \right) \chi_Q(x) \right\}^2 dx \le C\|g\|^2_{\mathcal{M}^{n/\alpha}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}}\|f\|_2^2 \tag{44}$$

と

$$\int_{Q_0} g(x)^2 \left\{ \sum_{\substack{Q\in\mathcal{D}\\ Q\subset Q_0}} |Q|^{\alpha/n} \left(\frac{1}{|Q|}\int_{3Q} f(y)\,dy \right) \chi_Q(x) \right\}^2 dx \le C\|g\|^2_{\mathcal{M}^{n/\alpha}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}}\|f\|_2^2 \tag{45}$$

を示すことにしよう．評価 (44) の証明は簡単である．2 進立方体に関する幾何学的な性質から，与えられた $k\in\mathbb{N}$ に対して，2 進立方体 Q で，$Q\supset Q_0$ かつ $|Q| = 2^{kn}|Q_0|$ となるものは 1 つしか存在しない．このこととヘルダーの不等式によって，$x\in Q$ なら，

$$\sum_{\substack{Q\in\mathcal{D}\\ Q\supset Q_0}} |Q|^{\alpha/n} \left(\frac{1}{|Q|}\int_{3Q} f(y)\,dy \right) \chi_Q(x) \le C|Q|^{\alpha/n-1/2}\|f\|_2 \tag{46}$$

となる．(44) の証明はこれで終わる．

難しい (45) の証明をしたいが，L^2 双対性から目標の (45) を書き換える．つまり，次の (47) に変形する．

$$\sum_{\substack{Q\in\mathcal{D}\\ Q\subset Q_0}} |Q|^{\alpha/n} \left(\int_Q g(y)w(y)\,dy \right) \left(\frac{1}{|Q|}\int_{3Q} f(y)\,dy \right) \le C\|f\|_2\|g\|_{\mathcal{M}^{n/\alpha}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}}\|w\|_2. \tag{47}$$

何らかの積分における収束定理を用いることで，g と w は有界と仮定しても構わない．補題 2.15 を $h = g\cdot w\in L^\infty$ に対して使う．分割 $\{E_0\}\cup\{E_{k,j}\}$ を用いて，

$$\sum_{Q\in\mathcal{D}_0} |Q|^{\alpha/n-1} \left(\int_Q g(y)w(y)\,dy \right) \left(\int_{3Q} f(y)\,dy \right) \le C\|f\|_2\|g\|_{\mathcal{M}^{n/\alpha}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}}\|w\|_2 \tag{48}$$

および

$$\sum_{k,j}\sum_{Q\in\mathcal{D}_{k,j}}|Q|^{\alpha/n-1}\left(\int_Q g(y)w(y)\,dy\right)\left(\int_{3Q}f(y)\,dy\right)\le C\|f\|_2\|g\|_{\mathcal{M}^{n/\alpha}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}}\|w\|_2 \quad (49)$$

を証明しよう．

前者 (48) の証明は易しい．実際に，(39) より，

$$(48)\text{ の右辺} \le c\gamma_0\sum_{Q\in\mathcal{D}_0}|Q|^{\alpha/n}\left(\int_{3Q}f(y)\,dy\right) \quad (50)$$

が従う．(50) の右辺を辺長で分けて，さらに評価していく．

$$\begin{aligned}(48)\text{ の右辺} &\le c\gamma_0\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\sum_{Q\in\mathcal{D}_0,\,|Q|=2^{-ln}|Q_0|}|Q|^{\alpha/n}\left(\int_{3Q}f(y)\,dy\right)\right\}\\ &\le c\gamma_0|Q_0|^{\alpha/n}\left(\int_{3Q_0}f(y)\,dy\right).\end{aligned}$$

γ_0 の定義式を代入して，

$$(48)\text{ の右辺}\le c\left(\int_{3Q_0}f(y)^2\,dy\right)^{1/2}\|g\|_{\mathcal{M}^{n/\alpha}_2}\|w\|_2\le c\|f\|_2\|g\|_{\mathcal{M}^{n/\alpha}_2}\|w\|_2$$

となる．よって，(48) は証明された．

次に (49) を証明したいが，ここで，今まで考えた新しい条件 $g\in\mathcal{M}^{n/\alpha}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}$ が本質的な役割を果たす．(36) より，

$$(49)\text{ の右辺}\le c\gamma_0\sum_{k,j}\sum_{Q\in\mathcal{D}_{k,j}}{c_0}^k|Q|^{\alpha/n}\left(\int_{3Q}f(y)\,dy\right)$$

となる．(50) を得るのと同じ論法で，

$$(49)\text{ の右辺}\le c\gamma_0\sum_{k,j}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}_{k,j},\,|Q|=2^{-ln}|Q_0|}{c_0}^k|Q|^{\alpha/n}\left(\int_{3Q}f(y)\,dy\right)$$

となる．(38) と極大作用素 M の定義によって，

$$(49)\text{ の右辺} \le c\gamma_0\sum_{k,j}{c_0}^k|Q_{k,j}|^{\alpha/n}\left(\int_{E_{k,j}}Mf(y)\,dy\right)$$

となる．分数べき極大作用素

$$M_\alpha F(x)=\sup_{x\in Q:\text{立方体}}|Q|^{\alpha/n}\frac{1}{|Q|}\int_Q|F(x)|\,dx$$

の定義式から，

$$(49)\ の右辺 \le c\sum_{k,j}\left(\int_{E_{k,j}} M_\alpha[g\cdot w](y)Mf(y)\,dy\right) \tag{51}$$

である．$\Psi(t)=t^2\log^{-P}(3+t)$ と書くことにすると，

$$M_\alpha[g\cdot w](y)\le \|g\|_{\mathcal{M}^{n/\alpha}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}} M^\Psi w(y)\quad (y\in\mathbb{R}^n). \tag{52}$$

(51) と (52) と，M^Ψ と M の L^2-有界性から (49) を得る．

Part II

応用に関する我々の結果

Serrin 型の条件を改良することを目的とする．

3 MHD 方程式に関する用語

3.1 主結果と用語の整理

$\mathbb{R}^3$ における MHD 偏微分方程式を考える．点 $x\in\mathbb{R}^3$, $t\in[0,T)$ における流体の測度を $u=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$ と表す．$\omega=(\omega_1(x,t),\omega_2(x,t),\omega_3(x,t))$ と $b=(b_1(x,t),b_2(x,t),b_3(x,t))$ と $p=p(x,t)$ はそれぞれ局所回転速度 (micro-rotational velocity), 磁場 (magnetic field) と静水圧 (hydrostatic pressure) を表す．ここでは，微分方程式

$$\begin{cases} \partial_t u+(u\cdot\nabla)u-(\mu+\chi)\Delta u-(b\cdot\nabla)b+\nabla(p+b^2)-\chi\nabla\times\omega=0,\\ \partial_t\omega-\gamma\Delta\omega-\kappa\nabla\mathrm{div}\omega+2\kappa\omega+(u\cdot\nabla)\omega-\chi\nabla\times u=0,\\ \partial_t b-\nu\Delta b+(u\cdot\nabla)b-(b\cdot\nabla)u=0,\\ \mathrm{div}\,u=\mathrm{div}\,b=0,\\ u(x,0)=u_0(x),b(x,0)=b_0(x),\omega(x,0)=\omega_0(x), \end{cases} \tag{53}$$

に関して考える．ここで，u_0 と ω_0 と b_0 は所与で，$\mathrm{div}\,u_0=0$ および $\mathrm{div}\,b_0=0$ を満たしているとする．また，定数 μ は動粘性率 (kinematic viscosity) を，χ は渦の粘性 (vortex viscosity) を，κ と γ は回転粘性率 (spin viscosities) を表している．μ の逆数は磁性レイノルド数 (magnetic Reynold) と呼ばれる．$b=0$ なら，(53) はマイクロ分極流体系 (micropolar fluid system) に帰着される．

記号を用意する．

$$C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^3):=\left\{\varphi\in\left(C^\infty_0(\mathbb{R}^3)\right)^3\,:\,\mathrm{div}\varphi=0\right\}\subseteq\left(C^\infty_0(\mathbb{R}^3)\right)^3 \tag{54}$$

と書くことにする.

次に, L^2-ノルム $\|.\|_{L^2}$ による $C^\infty_{0,\sigma}$ における閉包

$$L^2_\sigma(\mathbb{R}^3) := \overline{C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^3)}^{\|\cdot\|_{L^2}} = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \,:\, \mathrm{div}u = 0\right\}, \tag{55}$$

を定義する. 関数空間 H^r_σ とは $C^\infty_{0,\sigma}$ のノルム

$$\|u\|_{H^r} := \left\|(1-\Delta)^{\frac{r}{2}}u\right\|_{L^2}, \quad \text{for} \quad r \geq 0 \tag{56}$$

による閉包を表すものとする. (53) の弱解を以下のようにして定義する. ([13] を参照のこと.)

定義 3.1. $(u_0, b_0) \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$, $\omega_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $T > 0$ が与えられたとする. $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ における関数 (u,ω,b) が (53) の弱解とは, 次の 2 条件が成り立つことである.

a) (u,b,ω) は以下の関数空間に属する.

$$L^\infty\left((0,T); L^2_\sigma \cap H^1_\sigma(\mathbb{R}^3)\right)^2 \times \left(L^\infty\left((0,T);L^2\right) \cap L^2\left((0,T);H^1\right)\right). \tag{57}$$

b) 各 $\phi(T) = \varphi(T) = \psi(T) = 0$ を満たす $(\phi,\varphi) \in H^1\left((0,T)\,;H^1_\sigma\right)$ と $\psi \in H^1\left((0,T)\,;H^1\right)$ に対して,

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left\{-\langle u, \partial_\tau \phi\rangle + \langle (u\cdot\nabla)u, \phi\rangle + (\mu+\chi)\langle \nabla u, \nabla\phi\rangle\right\} d\tau \\ &\quad - \int_0^T \left\{\langle (b\cdot\nabla)b, \phi\rangle + \chi\langle \nabla\times\omega, \phi\rangle\right\} d\tau = \langle u_0, \phi(0)\rangle,\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left\{-\langle \omega, \partial_\tau\varphi\rangle + \gamma\langle\nabla\omega,\nabla\varphi\rangle + \kappa\langle \mathrm{div}\omega, \mathrm{div}\varphi\rangle\right\} d\tau \\ &+ \int_0^T \left\{2\chi\langle\omega,\varphi\rangle + \langle (u\cdot\nabla)\omega,\varphi\rangle - \chi\langle\nabla\times u,\varphi\rangle\right\} d\tau = -\langle \omega_0, \varphi(0)\rangle\end{aligned}$$

と

$$\int_0^T \left\{-\langle b,\partial_\tau\psi\rangle + \langle (u\cdot\nabla)b,\psi\rangle + \nu\langle\nabla b,\nabla\psi\rangle - \langle (b\cdot\nabla)u,\psi\rangle\right\} d\tau = -\langle b_0,\psi(0)\rangle. \tag{58}$$

が成り立つ.

一般に, $H^1((0,T);X)$ は X に値をとる一様連続関数からなることに注意しよう.

我々は以下の定理を得ることができた. 他の関数空間上例えば弱 L^p 空間などの結果に関しては, [2, 14, 15, 16] などを参考にすること.

定理 3.2. $(u_0, b_0) \in \dot{H}^1_\sigma(\mathbb{R}^3)$, $\omega_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ とする．ここで,

$$(u, b, \omega) \in C\left((0,T); \dot{H}^1_\sigma \cap \dot{H}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\right)^2 \times C\left((0,T); \dot{H}^1 \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)\right) \tag{59}$$

が (53) の解であるとする．もし,

$$u \in L^{\frac{2}{1-r}}\left((0,T); \mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}(\mathbb{R}^3)\right) \quad 0 < r < 1,\ P > 1, \tag{60}$$

なら，$t = T$ を超えて解 (u, ω, b) は接続される.

定理 3.3. $(u_0, b_0) \in \dot{H}^1_\sigma(\mathbb{R}^3)$, $\omega_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ とする．ここで,

$$(u, b, \omega) \in C\left((0,T); \dot{H}^1_\sigma \cap \dot{H}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\right)^2 \times C\left((0,T); \dot{H}^1 \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)\right) \tag{61}$$

が (53) の解であるとする．もし,

$$\int_0^T \|\nabla u(\tau)\|^{\frac{2}{2-r}}_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}(\mathbb{R}^3)} d\tau < \infty \quad 0 < r < 2,\ P > 1, \tag{62}$$

なら，$t = T$ を超えて解 (u, ω, b) は接続される.

定理 3.4. $(u_0, b_0) \in \dot{H}^1_\sigma(\mathbb{R}^3)$, $\omega_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ とする．ここで,

$$(u, b, \omega) \in C\left((0,T); \dot{H}^1_\sigma \cap \dot{H}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\right)^2 \times C\left((0,T); \dot{H}^1 \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)\right) \tag{63}$$

が (53) の解であるとする．もし，$r \in (0,1)$ に対して,

$$(u, b) \in L^{\frac{2}{1-r}}\left((0,T); \mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}(\mathbb{R}^3)\right)$$

が成り立つならば，(u, b) は初期条件 (u_0, b_0) を満たす $(0, T)$ 上の一意解である.

これらの方程式と関数空間に関する先行結果は次のような関係がある.

1. [2]：通常のモレー空間で解の延長可能性を考察している.
2. [13]：L^p 空間における解の延長可能性を考察している.
3. [14, 15, 16]：ローレンツ空間における解の延長可能性を考察している.

3.2 定理 3.2 の証明

(53) を x_i に関して微分して，それぞれの式と $\partial_{x_i} u, \partial_{x_i}\omega, \partial_{x_i} b$ の内積を考え，$\mathbb{R}^3$ 上で積分する．ここで，関係式

$$\langle \nabla \times \partial_{x_i} u, \partial_{x_i}\omega \rangle = \langle \nabla \times \partial_{x_i}\omega, \partial_{x_i} u \rangle$$

$$\langle (b\cdot\nabla)\partial_{x_i}b,\partial_{x_i}u\rangle+\langle (b\cdot\nabla)\partial_{x_i}u,\partial_{x_i}b\rangle=0 \tag{64}$$

$$\langle (u\cdot\nabla)\partial_{x_i}u.,\partial_{x_i}u\rangle=\langle (u\cdot\nabla)\partial_{x_i}b,\partial_{x_i}b\rangle=0. \tag{65}$$

が成り立つことに注意する．これを用いて，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\partial_{x_i}u,\partial_{x_i}\omega,\partial_{x_i}b)\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla.\partial_{x_i}\omega\|_{L^2}^2+2\chi\|\partial_{x_i}\omega\|_{L^2}^2\\
&\quad+\sum_{j=1}^{3}\left((\mu+\chi)\left\|\partial_{x_ix_j}^2u\right\|_{L^2}^2+\gamma\left\|\partial_{x_ix_j}^2\omega\right\|_{L^2}^2+\nu\left\|\partial_{x_ix_j}^2b\right\|_{L^2}^2\right)\\
\le\ & |\langle\partial_{x_i}(u\cdot\nabla)u,\partial_{x_i}u\rangle|+|\langle\partial_{x_i}(b\cdot\nabla)b,\partial_{x_i}u\rangle|+|\langle\partial_{x_i}(u\cdot\nabla)b,\partial_{x_i}b\rangle|\\
&+|\langle\partial_{x_i}(b\cdot\nabla)u,\partial_{x_i}b\rangle|+|\langle\partial_{x_i}(u\cdot\nabla)\omega,\partial_{x_i}\omega\rangle|+2\chi\,|\langle\nabla\times\partial_{x_i}u,\partial_{x_i}\omega\rangle|\\
=\ &\sum_{k=1}^{6}A_k
\end{aligned} \tag{66}$$

が $t\in(0,T)$, $i=1,2,3$ に対して成り立つ．A_1 は部分積分によって

$$A_1=\left|-\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla)u\cdot\partial_{x_i^2}^2u\,dx\right|$$

と表されるが，これにヘルダーの不等式を用いて，

$$A_1\le\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}\left\|D^2u\right\|_{L^2}\le C\left\|\left(u\cdot I_r\,(-\Delta)^{\frac{r}{2}}\,\nabla\right)u\right\|_{L^2}\left\|D^2u\right\|_{L^2}.$$

ここで，我々の定理 2.8 を用いると，

$$A_1\le C\,\|u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\,log^P\,L}}}\left\|(-\Delta)^{\frac{r}{2}}\,\nabla u\right\|_{L^2}\left\|D^2u\right\|_{L^2}\le\left\|D^2u\right\|_{L^2}\|u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\,log^P\,L}}}\|\nabla u\|_{\dot{H}^r} \tag{67}$$

と評価される．$\dot{H}^r(\mathbb{R}^n)$ のノルムの定義によって，$0<r<1$ に対して

$$\|w\|_{\dot{H}^r}=\||\xi|^r\,\widehat{w}\|_{L^2}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^{2r}\,|\widehat{w}|^{2r}\,|\widehat{w}|^{2-2r}\,d\xi\right)\le\|w\|_{L^2}^{1-r}\,\|\nabla w\|_{L^2}^{r} \tag{68}$$

が成り立つ．(68) を (67) に代入して，

$$A_1\le C\,\left\|D^2u\right\|_{L^2}\|u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\,log^P\,L}}}\|\nabla u\|_{\dot{H}^1}^{r}\,\|\nabla u\|_{L^2}^{1-r}$$

が得られる．ここで，ヤングの不等式を用いて

$$\begin{aligned}
A_1\ &\le\ C\left\|D^2u\right\|_{L^2}^{1+r}\left(\|u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\,log^P\,L}}}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1-r}{2}}\\
&\le\ \frac{\chi}{12}\left\|D^2u\right\|_{L^2}^2+C_r\,\|u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\,log^P\,L}}}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla u\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{69}$$

が得られる．

同じようにして,

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \left|\int_{\mathbb{R}^3} (u\cdot\nabla) b \cdot \partial_{x_i^2}^2 b dx\right| \\
&\leq \|(u\cdot\nabla)b\|_{L^2}\left\|D^2 b\right\|_{L^2} \\
&\leq C\left\|(u\cdot I_r(-\Delta)^{\frac{r}{2}}\nabla)b\right\|_{L^2}\left\|D^2 b\right\|_{L^2}. \qquad (70)
\end{aligned}
$$

に定理 2.8 とヤングの不等式を用いて,

$$
A_2 \leq C\|u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\,log^P\,L}}}\|\nabla b\|_{\dot{H}^r}\left\|D^2 b\right\|_{L^2} \leq \frac{\nu}{12}\left\|D^2 b\right\|_{L^2}^2 + C_r\|u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\,log^P\,L}}}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla b\|_{L^2}^2. \qquad (71)
$$

が得られる.

A_3, A_4, A_5 についても, 同じで, 計算していくと,

$$
A_3, A_4 \leq \frac{\nu}{18}\left\|D^2 b\right\|_{L^2}^2 + C_r\|u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\,log^P\,L}}}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla b\|_{L^2}^2 \qquad (72)
$$

$$
A_5 \leq \frac{\gamma}{6}\left\|D^2 \omega\right\|_{L^2}^2 + C_r\|u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\,log^P\,L}}}^{\frac{2}{1-r}}\|\nabla \omega\|_{L^2}^2. \qquad (73)
$$

が得られる.

最後に A_6 については, ヘルダーの不等式とヤングの不等式を用いて

$$
A_6 \leq \frac{\chi}{2}\|\nabla\times\partial_{x_i} u\|_{L^2}^2 + 2\chi\|\nabla\omega\|_{L^2}^2 \qquad (74)
$$

となる. (69), (71), (72), (73), (74) を $1 \leq i \leq 3$ にわたって足せば,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|(\nabla u, \nabla\omega, \nabla b)\|_{L^2}^2 + \left(2\mu + \frac{1}{2}\chi\right)\left\|D^2 u\right\|_{L^2}^2 \\
&\qquad + \gamma\left\|D^2\omega\right\|_{L^2}^2 + \nu\left\|D^2 b\right\|_{L^2}^2 + 2\kappa\|\nabla\mathrm{div}\omega\|_{L^2}^2 \\
&\leq C_r\|u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\,log^P\,L}}}^{\frac{2}{1-r}}\|(\nabla u, \nabla\omega, \nabla b)\|_{L^2}^2. \qquad (75)
\end{aligned}
$$

となる. グローンウォールの不等式と (75) から,

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T}\|(\nabla u(t), \nabla\omega(t), \nabla b(t))\|_{L^2}^2 \\
&\leq \|(\nabla u_0, \nabla\omega_0, \nabla b_0)\|_{L^2}^2 \exp\left(C\int_0^t \|u(s)\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\,log^P\,L}}}^{\frac{2}{1-r}} ds\right) \qquad (76)
\end{aligned}
$$

となるので, 再び $t = T$ でこの方程式に関する局所存在定理を用いて, 定理 3.2 は証明される.

3.3 定理 3.3 の証明

定理 3.2 と同様にして，$t \in (0,T)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\partial_{x_i}u,\partial_{x_i}\omega,\partial_{x_i}b)\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla.\partial_{x_i}\omega\|_{L^2}^2+2\chi\|\partial_{x_i}\omega\|_{L^2}^2\\
&\quad+\sum_{j=1}^{3}\left((\mu+\chi)\left\|\partial_{x_ix_j}^2u\right\|_{L^2}^2+\gamma\left\|\partial_{x_ix_j}^2\omega\right\|_{L^2}^2+\nu\left\|\partial_{x_ix_j}^2b\right\|_{L^2}^2\right)\\
&\le |\langle\partial_{x_i}(u\cdot\nabla)u,\partial_{x_i}u\rangle|+|\langle\partial_{x_i}(b\cdot\nabla)b,\partial_{x_i}u\rangle|+|\langle\partial_{x_i}(u\cdot\nabla)b,\partial_{x_i}b\rangle|\\
&\quad+|\langle\partial_{x_i}(b\cdot\nabla)u,\partial_{x_i}b\rangle|+|\langle\partial_{x_i}(u\cdot\nabla)\omega,\partial_{x_i}\omega\rangle|+2\chi|\langle\nabla\times\partial_{x_i}u,\partial_{x_i}\omega\rangle|\\
&= \sum_{k=1}^{6}B_k
\end{aligned}
\tag{77}
$$

が得られる．ヘルダーの不等式から

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \left|\int_{\mathbb{R}^3}\partial_{x_i}(u\cdot\nabla)u.\partial_{x_i}u\,dx\right|\\
&\le \|\nabla(u\cdot\nabla)u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}\\
&\le \left\|\nabla(u\cdot I_r(-\Delta)^{\frac{r}{2}}\nabla)u\right\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

となる．定理 2.8 より，

$$
B_1\le C\|Du\|_{L^2}\|\nabla u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\log^P L}}}\|Du\|_{\dot{H}^r}. \tag{78}
$$

ヤングの不等式によって，

$$
\begin{aligned}
B_1 &\le C\|Du\|_{L^2}\|\nabla u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\log^P L}}}\left\|D^2u\right\|_{L^2}^r\|Du\|_{L^2}^{1-r}\\
&\le C\left(\left\|D^2u\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{r}{2}}\left(\|\nabla u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\log^P L}}}^{\frac{2}{2-r}}\|Du\|_{L^2}^2\right)^{\frac{2-r}{2}}.
\end{aligned}
$$

したがって，再びヤングの不等式より，

$$
B_1\le\frac{\chi}{12}\left\|D^2u\right\|_{L^2}^2+C_r\|\nabla u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\log^P L}}}^{\frac{2}{2-r}}\|Du\|_{L^2}^2 \tag{79}
$$

となる．$B_2,\ldots,B_5$ も同様で，

$$
B_2,B_3,B_4\le\frac{\nu}{18}\left\|D^2b\right\|_{L^2}^2+C_r\|\nabla u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\log^P L}}}^{\frac{2}{2-r}}\|Db\|_{L^2}^2 \tag{80}
$$

$$
B_5\le\frac{\gamma}{6}\left\|D^2\omega\right\|_{L^2}^2+C_r\|\nabla u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\log^P L}}}^{\frac{2}{2-r}}\|D\omega\|_{L^2}^2. \tag{81}
$$

となる．$i=1,2,3$ にわたって，(78), (79), (80), (81) を足せば，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|(\nabla u,\nabla\omega,\nabla b)\|_{L^2}^2 \\
&\qquad+\left(2\mu+\frac{1}{2}\chi\right)\left\|D^2u\right\|_{L^2}^2+\gamma\left\|D^2\omega\right\|_{L^2}^2+\nu\left\|D^2b\right\|_{L^2}^2+2\kappa\left\|\nabla\mathrm{div}\omega\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq\quad C_r\|\nabla u\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\log^P L}}}^{\frac{2}{2-r}}\|(\nabla u,\nabla\omega,\nabla b)\|_{L^2}^2\,.
\end{aligned}\tag{82}$$

となる．グローンウォールの不等式と (82) によって，

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T}\|(\nabla u(t),\nabla\omega(t),\nabla b(t))\|_{L^2}^2 \\
&\leq\|(\nabla u_0,\nabla\omega_0,\nabla b_0)\|_{L^2}^2\exp\left(C\int_0^t\|\nabla u(s)\|_{\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2\log^P L}}}^{\frac{2}{2-r}}ds\right).
\end{aligned}\tag{83}$$

となる．定理 3.2 と同じ趣旨の不等式が示せたので，定理 3.3 も証明された．

3.4 定理 3.4 の証明

$\left(\widetilde{u},\widetilde{b}\right)$ が (u_0,b_0) を出発点とする $(0,T)$ 上の解で，

$$\left(\widetilde{u},\widetilde{b}\right)\in L^\infty\left((0,T)\,;L^2_\sigma\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\cap L^2\left((0,T);\dot{H}^1_\sigma\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$$

を満たしていたとしよう．$\mathcal{D}'$ の $(0,T)$ における次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\partial_t\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot\widetilde{u}dx+2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(u\cdot\nabla)\widetilde{u}dx \\
=\;&\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot(u\cdot\nabla)\widetilde{u}dx-\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot(\widetilde{u}\cdot\nabla)\widetilde{u}dx+\int_{\mathbb{R}^3}\widetilde{u}\cdot(b\cdot\nabla)bdx+\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot(\widetilde{b}\cdot\nabla)\widetilde{b}dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_t\int_{\mathbb{R}^3}b\cdot\widetilde{b}dx+2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla(b\cdot\nabla)\widetilde{b}dx \\
=\;&\int_{\mathbb{R}^3}b\cdot(u\cdot\nabla)\widetilde{b}dx-\int_{\mathbb{R}^3}b\cdot(\widetilde{u}\cdot\nabla)\widetilde{b}dx+\int_{\mathbb{R}^3}\widetilde{b}\cdot(b\cdot\nabla)udx+\int_{\mathbb{R}^3}b\cdot(\widetilde{b}\cdot\nabla)\widetilde{u}dx.
\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}
&\partial_t\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\widetilde{u}+b\cdot\widetilde{b})dx+2\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla u\cdot\nabla\widetilde{u}+\nabla b\cdot\nabla\widetilde{b}\right)dx \\
=\;&\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot[(u-\widetilde{u})\cdot\nabla]\,\widetilde{u}dx+\int_{\mathbb{R}^3}b\cdot[(u-\widetilde{u})\cdot\nabla]\,\widetilde{b}dx+\int_{\mathbb{R}^3}\widetilde{u}\left[\left(b-\widetilde{b}\right).\nabla\right]bdx \\
&+\int_{\mathbb{R}^3}\widetilde{b}\cdot[(b-\widetilde{b})\cdot\nabla]udx.
\end{aligned}$$

ここで，(u,b) と $\left(\widetilde{u},\widetilde{b}\right)$ はルレー・ホップの弱解であるから，

$$\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2+2\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2\,d\tau\le\|u_0\|_{L^2}^2+\|b_0\|_{L^2}^2\,, \tag{84}$$

$$\|\widetilde{u}\|_{L^2}^2+\left\|\widetilde{b}\right\|_{L^2}^2+2\int_0^T\|\nabla\widetilde{u}\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\widetilde{b}\right\|_{L^2}^2\,d\tau\le\|u_0\|_{L^2}^2+\|b_0\|_{L^2}^2\,. \tag{85}$$

ここで，差 $w=u-\widetilde{u}$, $z=b-\widetilde{b}$ を考えて，

$$\mathrm{I}_1=-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot(w\cdot\nabla)w\,dxd\tau,\quad \mathrm{I}_2=-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}b\cdot(w\cdot\nabla)z\,dxd\tau$$

$$\mathrm{I}_3=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}b\cdot(z\cdot\nabla)w\,dxd\tau,\quad \mathrm{I}_4=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot(z\cdot\nabla)z\,dxd\tau$$

とする．すると，

$$\begin{aligned}\|w\|_{L^2}^2+\|z\|_{L^2}^2 &= \|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2+\|\widetilde{u}\|_{L^2}^2+\|\widetilde{b}\|_{L^2}^2-2\int_{\mathbb{R}^3}u.\widetilde{u}\,dx-2\int_{\mathbb{R}^3}b\cdot\widetilde{b}\,dx\\ &\le -2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla w|^2\,dxd\tau-2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla z|^2\,dxd\tau+\sum_{j=1}^4\mathrm{I}_j.\end{aligned} \tag{86}$$

また，

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot(w\cdot\nabla)u\,dxd\tau=0=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}b\cdot(w\cdot\nabla)b\,dxd\tau.$$

(86) の I_1 ヘルダーの不等式を用いて以下のようにして評価していく．

$$|\mathrm{I}_1|\le C\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}\right)}\left(\int_0^t\|\nabla w\|_{L^2}^2\,d\tau\right)^{\frac12}\left(\int_0^t\|w\|_{\dot{H}^r}^{\frac{2}{r}}\,d\tau\right)^{\frac{r}{2}}. \tag{87}$$

ノルムの定義から，

$$\|w\|_{\dot{H}^r}\le\|w\|_{L^2}^{1-r}\|\nabla w\|_{L^2}^r\,. \tag{88}$$

(88) を (87) に代入して，

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_1| &\le C\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}\right)}\left(\int_0^t\|\nabla w\|_{L^2}^2\,d\tau\right)^{\frac12}\left(\int_0^t\|w\|_{\dot{H}^1}^2\|w\|_{L^2}^{\frac{2(1-r)}{r}}\,d\tau\right)^{\frac{r}{2}}\\ &\le C\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}\right)}\|w\|_{L^\infty(0,t,L^2)}^{1-r}\|\nabla w\|_{L^2(0,t,L^2)}^{1+r}.\end{aligned}$$

ヤングの不等式

$$a^{\alpha}b^{1-\alpha} \le \alpha a + (1-\alpha)b \le a+b, \quad a,b \ge 0, \quad 0 \le \alpha \le 1$$

から,

$$|\mathrm{I}_1| \le C\,\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}\right)} \left(\|\nabla w\|^2_{L^2(0,t,L^2)} + \|w\|^2_{L^\infty(0,t,L^2)}\right).$$

同様に, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}=1$ ならば,

$$s_1.s_2....s_n = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\log s_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\log s_i^{p_i}\right) \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\exp(\log s_i^{p_i}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{s_i^{p_i}}{p_i}$$

となるから,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}_2| &\le C\,\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}\right)} \|\nabla z\|_{L^2(0,t,L^2)} \left(\int_0^t \|w\|^{\frac{2}{r}}_{\dot{H}^r}\,d\tau\right)^{\frac{r}{2}} \\
&\le C\,\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}\right)} \|w\|^{1-r}_{L^\infty(0,t,L^2)} \|\nabla w\|^{r}_{L^2(0,t,L^2)} \|\nabla z\|_{L^2(0,t,L^2)} \\
&\le C\,\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}\right)} \left(\|w\|^2_{L^\infty(0,t,L^2)} + \|\nabla z\|^2_{L^2(0,t,L^2)} + \|\nabla z\|^2_{L^2(0,t,L^2)}\right),
\end{aligned}$$

となる.

I_3 については,

$$|I_3| \le C\,\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}\right)} \left(\|w\|^2_{L^\infty(0,t,L^2)} + \|\nabla z\|^2_{L^2(0,t,L^2)} + \|\nabla z\|^2_{L^2(0,t,L^2)}\right).$$

と評価する.

I_4 も同じで,

$$|I_4| \le C\,\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}\right)} \left(\|w\|^2_{L^\infty(0,t,L^2)} + \|\nabla z\|^2_{L^2(0,t,L^2)} + \|\nabla z\|^2_{L^2(0,t,L^2)}\right) \quad (89)$$

となる. (86) と上の不等式から, ある $C_0 > 0$ が存在して,

$$\begin{aligned}
&\|w\|^2_{L^\infty(0,t,L^2)} + \|z\|^2_{L^\infty(0,t,L^2)} \\
&\le -2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w|^2\,dxd\tau - 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla z|^2\,dxd\tau \\
&\quad + C_0\left(\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}\right)} + \|b\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L}^2\log^{\mathrm{P}}\mathrm{L}}\right)}\right) \\
&\quad \times\left(\|w\|^2_{L^\infty(0,t,L^2)} + \|z\|^2_{L^\infty(0,t,L^2)} + \|w\|^2_{L^2(0,t,L^2)} + \|z\|^2_{L^2(0,t,L^2)}\right).
\end{aligned}$$

となる．$t \in (0,T)$ の任意性より，t を十分に小さくとって，

$$C_0 \left(\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2 \log^p L}}\right)} + \|b\|_{L^{\frac{2}{1-r}}\left(0,t,\mathcal{M}^{3/r}_{\mathrm{L^2 \log^p L}}\right)} \right) < 1.$$

したがって，ある $\tau > 0$ に対して，$\tau \leq T$ なら，

$$w = z = 0 \quad \text{on} \quad [0,\tau].$$

となる．つまり，

$$\{\tau > 0 : w = z = 0 \quad \text{on} \quad [0,\tau]\}$$

は $(0,\infty)$ における開集合である．これは一意性を示しているので，定理 3.4 の証明が終わった．

References

[1] David R. Adams, A note on Riesz potentials, Duke Math. J., **42** (1975), 765–778.

[2] S. Gala, Regularity criteria for the 3D magneto-micropolar fluid equations in the Morrey-Campanato space, Nonlinear Differential Equations and Applications **17** (2010), 181-194.

[3] S. Gala, Y. Sawano and H. Tanaka, A new Beale-Kato-Majda criteria for the 3D magneto-micropolar fluid equations in the Orlicz-Morrey space, submitted.

[4] S. Gala, Y. Sawano and H. Tanaka, On the uniqueness of weak solutions of the $3D$ MHD equations in the Orlicz-Morrey space, submitted.

[5] P. Olsen, Fractional integration, Morrey spaces and Schrödinger equation, Comm. Partial Differential Equations, **20** (1995), 2005–2055.

[6] C. Pérez, Sharp L^p-weighted Sobolev inequalities, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **45** (1995), 809–824.

[7] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces, to appear in Trans. Amer. Math. Soc..

[8] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, A note on generalized fractional integral operators on generalized Morrey spaces, Bound. Value Probl. 2009, Art. ID 835865, 18 pp.

[9] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, Identification of the image of Morrey spaces by the fractional integral operators, Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, **148**, (2009), 87–93.

[10] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, Orlicz-Morrey spaces and fractional operators, in preparation.

[11] S. Sugano and H. Tanaka, Boundedness of fractional integral operators on generalized Morrey spaces, Sci. Math. Jpn., **58** (2003), 531–540.

[12] H. Tanaka, Morrey spaces and fractional operators, J. Aust. Math. Soc., **88**(2010), no.2, 247–259.

[13] B. Q. Yuan, Regularity of weak solutions to magneto-micropolar fluid equations, Acta Mathematica Sinica, **30** No. 5 (2010), 1469-1480.

[14] Y. Zhou, Remarks on regularities for the 3D MHD equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2005, **12**, 881-886.

[15] Y. Zhou, Regularity criteria for the 3D MHD equations in terms of the pressure, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 2006, **41**, 1174-1180.

[16] Y. Zhou, Regularity criteria for the generalized viscous MHD equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2007, **24**, 491-505.