数理解析研究所講究録
第1846巻 2013年 14-18

一様遅れ演算の完全性

Completeness of uniformly delayed operations

疋田 輝雄 Teruo HIKITA

明治大学 情報科学科

Dept of Computer Science, Meiji University

1 はじめに

「計算時間つき演算（素子）」の一様遅れ合成における完全性（一様遅れ完全性）を判定する問題について報告する．この合成に関する極大不完全集合をすべて決定することが目標である．タイプＡとタイプＣは済んでいて，タイプＢでは５種にまで決まったが，そのうちの２種においてはまだ精密に決まってはいない．

一様遅れ合成は，一般代数（universal algebra）とオートマトン理論のちょうど中間に位置する．そこでの完全性問題を解決するためには，3つのタイプの極大集合を決定すればよいことがわかっている [2]．タイプＡは通常の一般代数でのもの，タイプＢはそれを「分解」した周期型のもの，タイプＣは縮退したものである．タイプＢの極大集合の決定が残っている．

遅れのない通常の代数にあたる場合には，一般の k 値の場合（$k \geq 2$），1965年に Rosenberg[7] が完全に決定した．計算時間つきの場合は，1960年に Kudryavtsev[4] が導入し，2値の場合に極大集合をすべて与えた．1970年の野崎 [5] をもとに，疋田-野崎は1977年に，極大集合が3つのタイプ，つまりＡ，Ｂ，Ｃからなることを見つけた [2]．これらは関係の無限列によって記述される．また疋田は3値の場合にすべての極大集合を決定した [1]．

ここではタイプＢの極大集合の決定について報告する [3]．5つの種類に絞られ，そのうちの3つについては完全に決定した．

2 準備：基本的定義

$\mathbf{k} := \{0, 1, \ldots, k-1\}$ とおく．$\mathbf{k}$ 上のすべての n 項演算の集合を $\mathcal{O}^{(n)}$ と記し，さらに $\mathcal{O} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}^{(n)}$ とおく．

一様遅れ演算（素子）とは，(f,δ) のことである．ここで $f \in \mathcal{O}$ は通常の $\mathbf{k}$ 上の演算で，δ は計算時間（delay）を表す非負整数である．$\mathbf{k}$ 上のすべての遅れつき n 項演算の集合は $\mathcal{U}^{(n)} := \mathcal{O}^{(n)} \times \mathbb{N}$ であり，$\mathcal{U} := \mathcal{O} \times \mathbb{N}$ は $\mathbf{k}$ 上のすべての遅れつき演算の集合である．演算の合成は，図のように，各演算での時間遅れを揃えるようにして行う．

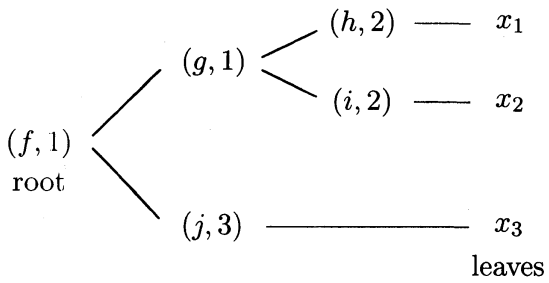

Figure 1

$\mathbf{k}^h$ の部分集合 ρ（$\mathbf{k}$ 上の h 組の集合）を，$\mathbf{k}$ 上の h 項関係（h-ary relation）という．ρ と σ が $\mathbf{k}$ 上の h 項関係で，$f \in \mathcal{O}^{(n)}$ とする．f が ρ を σ 中に移すとは，$\mathbf{k}$ 上のすべての $h \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ において，その列ベクトルがすべて ρ に属するならば，A の行の f による像からなる h 項が σ にはいっていることである．式で書けば，

$$(a_{1j}, \ldots, a_{hj}) \in \rho \ (j = 1, \ldots, n) \Rightarrow (f(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, f(a_{h1}, \ldots, a_{hn})) \in \sigma.$$

ρ を σ に移すすべての $f \in \mathcal{O}$ からなる集合を $\mathrm{Pol}(\rho, \sigma)$ で表す．また，$\mathrm{Pol}\rho = \mathrm{Pol}(\rho, \rho)$ と書き，$f \in \mathrm{Pol}\rho$ のとき関数 f は関係 ρ を保つ（preserve）という．

通常の合成の場合の極大集合は $\mathrm{Pol}\,\sigma$ の形をしていて，ここで関係 σ は 6 つの種類からなる [7]．それらのうちのいくつか（全部ではない）をあげておくと，

1. 1 項関係で全体 $\mathbf{k}$ の空でない真部分集合．

2. 2 項関係 $\{xs(x) \mid x \in \mathbf{k}\}$，ここで s は $\mathbf{k}$ 上の置換で，素数の長さ p の k/p 個のサイクルをもつ．

3. $\mathbf{k}$ 上の有界半順序，すなわち，推移的，反射的，反対称的な関係で最小と最大要素をもつもの．

4. 真の同値関係（つまり $\iota_2 = \{(x,x) \mid x \in \mathbf{k}\}$ と $\mathbf{k}^2$ 以外）．

5. 2 項セントラル関係すなわち，反射的対称的な関係で，$\mathbf{k}^2$ でなく，ある $c \in \mathbf{k}$ に対して $c \times \mathbf{k} \subseteq \sigma$．

$\mathbf{k}$ 上の h 項関係の無限列 $\rho := (\rho_0, \rho_1, \ldots)$ を，$\mathbf{k}$ 上の h 項の多関係（polyrelation）と名づける．$\mathbf{k}$ 上の h 項の多関係全体を $\mathcal{R}_h$ と記し，$\mathcal{R} := \bigcup_{h=1}^{\infty} \mathcal{R}_h$ とおく．次の条件を満たすとき，$(f, \delta) \in \mathcal{U}$ は h 項の多関係 $\rho = (\rho_0, \rho_1, \ldots)$ を保つ（preserve）という：

$$f \in \mathrm{Pol}_{\delta}\rho := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Pol}(\rho_i, \rho_{i+\delta}).$$

そこで

$$\mathrm{Pold}\,\rho := \bigcup_{\delta=0}^{\infty} (\mathrm{Pol}_{\delta}\rho \times \delta).$$

と定義する．これにより多関係が一様クローンを定義する．

$\mathbf{k}$ 上の一様不完全クローン C が極大（maximal, precomplete）とは，C を真に含む $\mathbf{k}$ 上の一様クローンがすべて，完全であることである．

[2] によると，極大一様クローンは，タイプ A，B，C のいずれかである．関係 σ に対して $\sigma^* = (\sigma, \sigma, \ldots)$ とおく．$\mathrm{Pol}\,\sigma$ が極大クローンのとき，多関係 σ^* はタイプ A であるという．周期的な多関係 ξ が，k 以下の項だとして，$\mathrm{Pold}\xi$ がどのタイプ A の $\mathrm{Pold}\sigma^*$ にも含まれないとき，タイプ B であるという．タイプ C に対しては次の若干の定義が必要である．$\mathbf{k}$ の真の部分集合 P の上の，$\{pp \mid p \in P\}$ 以外の同値関係を，真の部分同値関係（proper partial equivalence）という．$\iota_2 := \{aa \mid a \in \mathbf{k}\}$ とおく．

2.1 Definition 2 項多関係 $(\rho_0, \iota_2, \iota_2, \ldots)$ がタイプ C とは，

1. ある $c \in \mathbf{k}$ に対して $\rho_0 = c \times \mathbf{k}$，または

2. ρ_0 は $\mathbf{k}$ 上の真の部分同値関係，または

3. $\rho_0 = \{ps(p) \mid p \in P\}$，ここで $\emptyset \neq P \subseteq \mathbf{k}$，そして次のいずれか
   i) s は P 上の素数位数の置換．
   ii) s は P から $\mathbf{k}$ への単射で，
      a) $s(P) \neq P$ かつ
      b) $s(p) \in P \Leftrightarrow s(p) = p$.

3 タイプ B の極大集合

$h \geq 3$ に対して，タイプ B の h 項の多関係の極大一様クローンが存在しないことを示すことができ，さらに，タイプ B の極大一様クローンは（多関係の言葉を使うと）次の 5 種類に絞ることができる [3]．多関係を $\rho = (\rho_0, \rho_1, \ldots)$ とする．

1. 1 項関係．

2. 2項関係．周期 $p = 2^m (m > 0)$, ρ_0 有界半順序, $\rho_{2^{m-1}}$ その逆関係，それ以外は $\rho_i = \iota_2 := \{(a,a) \mid a \in \mathbf{k}\}$, $0 < i < 2^m$, $i \neq 2^{m-1}$.

3. 2項関係．空集合でない $\rho_i = \{(a, s_i(a)) \mid a \in \mathbf{k}\}$，ここで s_i は $\mathbf{k}$ の置換で，これらの置換は互いに群論的に関連している（これらの生成する群として可換群しか現れないことを示すのがポイントとなる）．

4. それぞれの関係が，$\mathbf{k}$ 上の同値関係．

5. 2項のセントラル関係または $\mathbf{k}^2$.

3.1 Proposition 極大一様クローンを与える *1* 項多関係 ρ は次の形である．ρ_0 はトリビアルでなく（空でも全体でもなく），周期は $p = p_1^{d_1} \cdots p_\ell^{d_\ell}$，ここで $\ell \geq 1$, $p_1, \ldots, p_\ell$ は互いに異なる素数で，$d_1, \ldots, d_\ell$ は正整数．すると $r = p_1^{c_1} \cdots p_\ell^{c_\ell}$ があって

1. $i = 1, \ldots, \ell$ にたいして整数 c_i は $0 \leq c_i < d_i$ を満たす，

2. $\rho_0, \rho_r, \ldots, \rho_{p-r}$ は互いに共通部分がなく，空集合でない，一方，r で割りきれない j に対しては $\rho_j = \emptyset$.

上記の5種の多関係のうちで，同値関係とセントラル関係の2種については，部分的結果は得ているが，最終的な形の決定に至っていない．

$k = 3$ のときは，同値関係とセントラル関係からは極大一様クローンは存在しない [1].

一般に，$\mathbf{k}$ 上の同値関係 $\theta_0, \ldots, \theta_{p-1}$ が互い同士でコミューティング（pairwise commuting）つまり $\theta_i \circ \theta_j = \theta_j \circ \theta_i$（$0 \leq i < j < p$）かつ $\theta_0 \cap \ldots \cap \theta_{p-1} = \iota_2$ のとき，$\theta = (\theta_0, \ldots, \theta_{p-1}, \theta_0, \ldots)$ に対して $\mathrm{Pold}\,\theta$ は極大一様クローンであることを示すことができる．

参考文献

[1] T. Hikita, Completeness criterion for functions with delay defined over a domain of three elements, *Proc. Japan Acad.* **54** (1978), 335–339.

[2] T. Hikita, and A. Nozaki, A completeness criterion for spectra, *SIAM J. Comput.* **6** (1977), 285–297. Corrigenda, ibid., **8** (1979), 656.

[3] T. Hikita, I. G. Rosenberg : Completeness of uniformly delayed operations, in “Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra”, NATO Science Series II, Vol. 207, pp. 109–147, Springer, 2005.

[4] V. B. Kudryavtsev, Completeness theorem for a class of automata without feedback couplings (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **132** (1960), 272–274.

[5] A. Nozaki, Réalisation des fonctions definies dans un ensemble fini à l'aide des organes élémentaires d'entrée-sortie, *Proc. Japan Acad.* **46** (1970), 478–482.

[6] R. Pöschel, and L.A. Kaluzhnin, *Funktionen- und Relationenalgebren*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.

[7] I. G. Rosenberg, La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini, *C. R. Acad. Sci. Paris* Sér. A-B, **260** (1965), 3817–3819.