

## AKNS 形式の線形散乱問題の区分的近似解法とその応用

キヤノン株式会社光学技術研究所 藤嶋 浩史 (Hironobu FUJISHIMA)\*

Optics R&D Center, CANON INC.

宇都宮大学工学研究科 情報システム科学専攻 矢嶋 徹 (Tetsu YAJIMA)†

Department of Information Systems Science, Graduate School of Engineering,

Utsunomiya University

### Abstract

AKNS 階層に属するソリトン方程式に対し、Zakharov-Shabat の固有値問題を近似的に取り扱う方法を考察する。初期波形を多数の小区間に分割し、各小区間の Jost 関数をつなぐ転送行列を考えることにより、この問題の近似解を数値的に求めることができる。また、任意の初期波形からの時間発展した波束の漸近的情報も抽出できる。ここでは非線形 Schrödinger 方程式に本解析法を適用し、単一及び二連箱型初期波形から生成されるソリトンの個数を求める。特に後者ではソリトンの個数が初期振幅の単調増加関数にならないことを示す。

## 1 序論

ソリトン現象は、古くから様々な物理系で実験的に観測されている [1]。たとえば、戸田格子と等価な電気回路 [2] や光ファイバー中のソリトン [3]、プラズマ中の非線形波動 [4] などがよく知られている。最近の例としては、Bose-Einstein 凝縮系 (BEC) [5] での巨視的波動関数が挙げられる。特に、BEC 系やプラズマなどにおいて、非線形波動の挙動を調べる目的で、一般の初期パルスの時間発展を追跡することは、最近の重要なテーマの 1 つである。なぜならば、これらの実験において実現される初期パルスは、多くの場合 Gauss 型波形であり、完全に理想的なソリトン波形を持つことはほとんどないからである。任意の時刻における解の振る舞いを知ることができなくても、長時間が経過した後に抽出される波形の状態を予測できれば実験と理論の比較は十分なものとなると考えられる。

しかしながら、非線形発展方程式の初期値問題を解くことは、一般には非常に難しい。このことは、可積分方程式の場合であっても同じである。初期条件がソリトン解に一致している場合は、広田の直接法 [6] などを用いて得られる厳密解によって時間発展が完全に予想できる。あるいは、逆散乱法 [7] に従い、無反射条件のもとで単純化された Gel'fand-Levitan-Marchenko (GLM) 方程式を解くことも可能である。だが、初期波形がソリトン

\*E-mail address: fujishima.hironobu@canon.co.jp

†E-mail address: yajimat@is.utsunomiya-u.ac.jp

解とは異なる一般の場合の解析は難しい。初期値問題を直接法によって解くことや、連続スペクトルが存在する場合に GLM 方程式を解くことは共に困難であることは周知の事実である。

もつとも、一般の場合でも物理的考察により、 $t \rightarrow \infty$ での解の漸近的振る舞いのある程度予想することはできる。初期条件として無限遠で十分早く減衰する単一パルスを選んだとしよう。ソリトンは自分の振幅に非線形に依存する自己収束作用と、分散項に起因する拡散作用の釣合によって生じる。したがって、初期パルスの振幅が十分大きくなければ、初期波形は単なる拡散波束となる。また、振幅が大きいならば、束縛ソリトンを含む複数個のソリトンと、ソリトンになるには足りなかった残りのノルムが輻射として小振幅の拡散波となって左右に放出されると予想できる。しかし、初期条件が単一パルスでなく、たとえば有限の距離で隔てられた複数のパルスのような場合、個々のパルスは振幅が足りずに拡散してしまうものであっても、その過程で干渉し合って合体し、ソリトンになるような現象もないとはいえない。また、初期波形が単一パルスである場合にも、何らかの近似によって定量的な時間発展の記述が可能となれば、系の振る舞いの正確な予言が可能となる。

ここでは、このような場合の取り扱い方法として、初期波形を矩形波によって分割し、各波形をつなぐ転送行列を導入して初期値問題を解析する手法を導入する。以下、具体的な例として、非線形ファイバー中の光パルスや、1次元トラップ中に閉じ込められた引力相互作用する希薄中性アルカリ原子気体の BECなどを想定し、1次元非線形 Schrödinger 方程式 (NLSE)

$$i\psi_t = -\psi_{xx} - 2|\psi|^2\psi \quad (1)$$

の初期値問題、特に Zakharov–Shabat の固有値問題の取り扱いを考察しよう。

本稿の構成は次の通りである。次節では問題設定として、NLSE の散乱問題をまとめる。第3節では提案する初期値問題の近似解法を与える。第4節では単一の箱型初期条件に対して提案手法を適用して具体的な計算例を考え、妥当性を検証する。第5節では2連箱型初期条件を考え、Zakharov–Shabat の固有値問題の初期波形依存性を調べる。

## 2 NLSE の散乱問題

一般的な逆散乱法の定式化に従って NLSE(1) は次の2つの連立線形方程式の組に分解される。

$$\begin{pmatrix} \Psi_{1x} \\ \Psi_{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\xi & i\psi^* \\ i\psi & i\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_{1t} \\ \Psi_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\xi^2 - i|\psi|^2 & \psi_x^* - 2i\xi\psi^* \\ -\psi_x - 2i\xi\psi & -2i\xi^2 + i|\psi|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

固有関数  $\Psi$  は補助的な場であって、(2) で決定されるスペクトルパラメタ  $\xi$  は時間に依存しない。従って、時刻  $t=0$  における (1) の解  $\psi(x, 0)$  を用いて決定すればよい。そこからの系の時間発展を支配するのが (3) である。連立微分方程式 (2) は Zakharov–Shabat の固有値問題 [8] と呼ばれ、 $\psi(x, 0)$  をポテンシャルとする線形散乱問題となっている。なお、

線形散乱問題 (2) のようにスペクトルパラメタ  $\xi$  が現れるソリトン方程式を一般に “AKNS 形式で書ける” という [9]。NLSE(1) は KdV 方程式などとともにそのようなクラスに属するソリトン方程式である。以下、本稿で展開する方法は AKNS 形式で記述される全ての方程式に少なくとも原理的には適用可能である。

$|x| \rightarrow \infty$  で  $|\psi(x, 0)| \rightarrow 0$  という境界条件に対応して、Jost 関数  $\phi(x, \xi)$  を境界条件

$$\phi(x, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (4)$$

を満たす (2) の解として定義する。その時  $x \rightarrow \infty$  では

$$\phi(x, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} a(\xi)e^{-i\xi x} \\ b(\xi)e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (5)$$

のようになり、係数  $a(\xi)$  と  $b(\xi)$  は散乱振幅と呼ばれ、以下の関係を満たす。

$$a(\xi)a(\bar{\xi}) + b(\xi)b(\bar{\xi}) = 1 \quad (6)$$

逆散乱法によれば、 $a(\xi)$  の (離散的な) 零点が個々のソリトンのパラメタを与える。よって  $a(\xi)$  の零点の数が漸近的に残存するソリトンの数となる。薩摩と矢嶋 [10] は 1974 年にこの問題を研究し、初期条件が  $\psi(x, 0) = A \operatorname{sech}(x)$  のタイプで与えられるときには、その離散固有値 (残存ソリトン数) が  $[|A|]$  個であることを示した。ここで  $[N]$  は  $N$  内の数値を超えない最大の整数を表す Gauss の記号である。しかし、一般の初期条件の場合に (2) を解析することは難しい。

### 3 初期波形の区間分割と転送行列

一般の初期条件の場合に (2) を解析することは難しいのは  $\psi(x, 0)$  の  $x$  依存性に起因する。そこで  $\psi(x, 0)$  をその区間内では  $\psi_i(x) = V_i$  が一定とみなせるような多数の小区間 ( $x_i \leq x < x_{i+1}$ ) に分割しよう。ただし本節においては説明の簡単のため  $V_i$  は実数であると仮定する。つまりステップ関数  $\theta(x)$  を用いて

$$\psi_i(x) = V_i \{ \theta(x - x_i) - \theta(x - x_{i+1}) \} \quad (7)$$

と定義して、 $\psi(x, 0)$  を

$$\psi(x, 0) \simeq \sum_i \psi_i(x) \quad (8)$$

と近似することになる。 $|\psi(x, 0)|$  が無限遠で十分速く減衰する条件を満たすことを反映して、近似された  $|\psi(x, 0)|$  はコンパクトサポートになっているものとする。

このような小区間への分割を行うと、以下に示すように各小区間内では (2) が解ける。それぞれの区間では (2) は

$$\Psi_{i,x} = \begin{pmatrix} -i\xi & iV_i^* \\ iV_i & i\xi \end{pmatrix} \Psi_i = i(-\xi\sigma_3 + V_i\sigma_1)\Psi_i \quad (9)$$

となる。仮に  $V_i$  が実数でなく一般の複素数であったとしても、 $\sigma_2$  を用いることにより、以下で説明する方法は全く同様に機能する。ここで  $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  は Pauli 行列で  $\{\sigma_1, \sigma_3\} = 0$ 、 $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = 1$  を満たす。微分方程式 (9) は  $\Psi$  の係数行列の指数関数を用いて、

$$\begin{aligned}\Psi_i(x) &= e^{i(-\xi\sigma_3 + V_i\sigma_1)X} \Psi_i(x_i) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(KX) - i\frac{\xi}{K}\sin(KX) & i\frac{V_i}{K}\sin(KX) \\ i\frac{V_i}{K}\sin(KX) & \cos(KX) + i\frac{\xi}{K}\sin(KX) \end{pmatrix} \Psi_i(x_i)\end{aligned}\quad (10)$$

と解ける。ここで、 $X = x - x_i$ 、 $K = \sqrt{\xi^2 + V_i^2}$  である。今、 $i$  番目の小区間の幅  $x_{i+1} - x_i = L_i$  と定義すれば、Jost 関数とその境界条件の定義などから、以下の関係が成立することが分かる。

$$\Psi(L_N + L_{N-1} + \cdots + L_2 + L_1) = \begin{pmatrix} a(\xi)e^{-i\xi(L_N + L_{N-1} + \cdots + L_2 + L_1)} \\ b(\xi)e^{i\xi(L_N + L_{N-1} + \cdots + L_2 + L_1)} \end{pmatrix} = T_N T_{N-1} \cdots T_2 T_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad (11)$$

ここで  $T_i$  は転送行列で、

$$T_i \equiv e^{i(-\xi\sigma_3 + V_i\sigma_1)L_i} = \begin{pmatrix} \cos(KL_i) - i\frac{\xi}{K}\sin(KL_i) & i\frac{V_i}{K}\sin(KL_i) \\ i\frac{V_i}{K}\sin(KL_i) & \cos(KL_i) + i\frac{\xi}{K}\sin(KL_i) \end{pmatrix}\quad (12)$$

と定義する。以上で明らかになったように、小区間への分割近似を行った後の初期波形に対しては散乱振幅  $a(\xi)$  と  $b(\xi)$  が既知の量を用いて explicit に書けてしまうのである。従って、求めるべき  $a(\xi)$  の零点に関する情報なども全て小区間への分割の細かさをパラメタとする任意の精度で求まることになる。

#### 4 静的な単一の箱型初期条件への応用

本節では、前節で議論した方法をもっとも単純な例に適用する。初期条件は単一の小区間区間からなるものとし、その長さを  $L$  とする。初期波形が静的というのは初速度が 0 ということで、位相因子のない実数の振幅を持つということの意味する。したがってその小区間内の振幅を実数  $V_0$  とおこう。つまり初期条件は

$$\psi(x) = V_0\{\theta(x) - \theta(x - L)\}\quad (13)$$

である。このとき (11) と (12) から明らかに

$$a(\xi) = e^{i\xi L} \left\{ \cos(KL) - i\frac{\xi}{K}\sin(KL) \right\}\quad (14)$$

となる。ただし、 $K = \sqrt{\xi^2 + V_0^2}$  である。さて我々は、静的な初期波形を仮定したので、固有値  $\xi$  は実部を持たない純虚数であることが期待される。そこで、

$$\xi = i\eta \quad (\eta > 0)\quad (15)$$

と仮定してよい。ソリトンの特性を決めるパラメタは  $a(i\xi) = 0$  の解である。このとき  $\eta$  の大小によって  $K$  が実数になったり純虚数になったりすることに注意して場合分けを行うと、 $\eta$  を決定する方程式

$$\eta = -\sqrt{V_0^2 - \eta^2} \cot(\sqrt{V_0^2 - \eta^2} L) \quad (V_0 > \eta) \quad (16)$$

$$\eta = -\sqrt{\eta^2 - V_0^2} \coth(\sqrt{\eta^2 - V_0^2} L) \quad (\eta > V_0) \quad (17)$$

が得られる。このうち後者は右辺が必ず負となるので条件  $\eta > 0$  に反し、あり得ないことになる。従って、 $V_0 > \eta$  のケースだけを考えれば十分である。以下簡単のため  $L = 1$  とする。(16)において、 $\cot$  関数の引数が  $\frac{\pi}{2}$  以下の場合、左辺が正である右辺と交点を持つことはないことが分かる。従って

$$V_0 > \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

が少なくとも一つソリトンを持つために要請される。振幅がこれ以下の場合には自己収束作用が弱すぎるため、ソリトンを生成することがないまま全てのノルムが輻射として拡散していつてしまう。更に  $\cot(x)$  が周期  $\pi$  を持つことを勘案すると、二個目の交点は  $\frac{3}{2}\pi$  まで現れない。この場合、一つだけソリトンを生成し、残りのノルムは輻射成分になる。そして振幅が  $\frac{3}{2}\pi$  を超えた時、初めて二個のソリトンが生成される。以降同様に  $n$  を自然数として、

$$(n - \frac{1}{2}) < V_0 \leq (n + \frac{1}{2}) \quad (19)$$

であるとき、漸近的に生成されるソリトンの数は  $n$  個であることが分かる。

## 5 静的な箱型二連パルスからなる初期条件への応用

最後に、簡単ながら非自明な例を考えよう。これまでと同様に NLSE(1) において、以下に説明するような初期波形  $\psi(x, 0)$  からの時間発展を考える。形状は箱型であるので、共に矩形関数であり、2つのパルスに共通の実振幅を前節と同じく  $V_0$  としよう。2つのパルスに共通な小区間の幅  $L$  は簡単のため 1 に固定する。もうひとつのパラメタとして、2つのパルス間の間隔が考えられる。これを  $w$  で表すことにする。定式化すると初期条件は

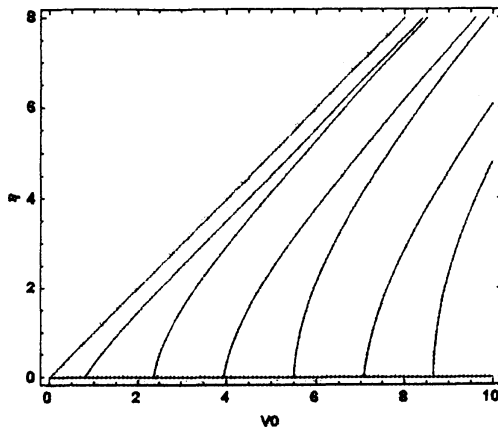
$$\psi(x, 0) = V_0 \{ \theta(x) - \theta(x - L) + \theta(x - L - w) - \theta(x - 2L - w) \} \quad (20)$$

である。この初期条件に対して前節で述べた方法で散乱データ  $a(\xi)$  を計算すると以下のようになる。

$$a(\xi) = e^{i\xi(2L+w)} [ e^{i\xi w} \{ \cos(KL) - i \frac{\xi}{K} \sin(KL) \}^2 - \frac{V_0^2}{K^2} e^{-i\xi w} \sin^2(KL) ] \quad (21)$$

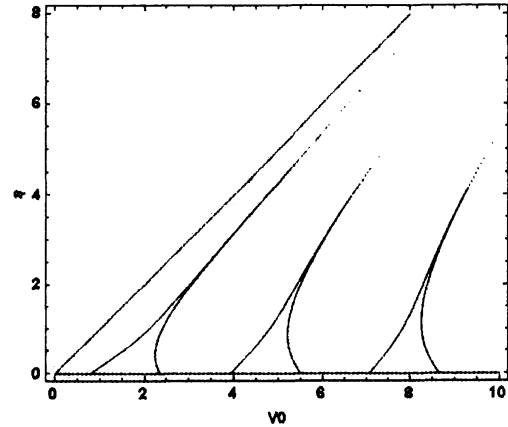
ここで  $K = \sqrt{\xi^2 + V_0^2}$  である。さて我々は、ここでも静的な初期波形を仮定したので、第4節と同様

$$\xi = i\eta \quad (\eta > 0) \quad (22)$$



$w=0.1$

Figure 1:  $a=0$  となる  $\eta$  の軌跡



$w=1.5$

Figure 2:  $a=0$  となる  $\eta$  の軌跡

と仮定し (21) に代入すると実数の式となる。ここで初期波形 (20) が漸近的にいくつのソリトンを生成するかを調べるため、方程式 (21) = 0 の根の個数を数値的に調べた。以下の Fig. 1 に  $w = 0.1$  の時、(21) = 0 となる  $\eta$  の軌跡を  $V_0 - \eta$  平面上に示す。これを見ると、 $V_0$  が 0.8 程度より小さい場合には根が存在しないことが分かる。つまり、振幅が小さすぎて初期波形は全て輻射として拡散してしまう。次におおむね  $0.8 < V_0 < 2.3$  程度の領域では、一つの解が存在し、1 ソリトン状態に相当している。初期条件の左右対称性からこれは二つのパルスの中央にそれぞれの寄与が合体する形でソリトンが一つ残ることを意味している。さらに、それ以上  $V_0$  が大きくなると、ソリトンの数は振幅  $V_0$  と共に単調に増加していく。

一方、Fig. 2 に  $w = 1.5$  の時、(21) = 0 となる  $\eta$  の軌跡を Fig. 1 同様  $V_0 - \eta$  平面上に示す。Fig. 1 の場合より、2 つのパルス間隔を広くした場合に相当するが、この場合グラフには Fig. 1 のグラフと定性的に異なった特徴が認められる。おおむね  $V_0 < 0.75$  まで解がなく、 $V_0 = 2.2$  付近から次の解が現れる。しかし、解の軌跡に接線の傾きの正負が入れ替わる点が存在しており、ただ一点  $V_0 = 2.2$  付近で二重根とみられる解を持った後、直ちに解の数は 3 つに増える。そして、 $2.3 < V_0$  の方へ振幅  $V_0$  を増していくと解の数は一転して 2 個に減少してしまう。このようにパルス間隔  $w$  によっては漸近的ソリトンの個数が振幅  $V_0$  の単調増加関数にならないことが見出された。なおこれらの結果は NLSE(1) を直接数値的に解くことにより確かめたが、別の機会に譲る [11]。

## 6 まとめ

本稿では、AKNS 形式に書けるソリトン方程式の任意の初期条件に対する漸近波形に関する情報を引き出す近似的手法を説明した。NLSE を題材に静的な静的な単一箱型パルスと二連パルスからなる初期波形へその手法を応用し初期条件によっては漸近的ソリトンの個数が振幅の単調増加関数にならないことを見出した。なお、一般には AKNS 形式と

は異なるスペクトルパラメタ依存性を持つソリトン方程式も多く存在するが、これらの系への我々の方式の拡張も可能と考えられ、将来の課題である。

## 謝辞

著者(藤嶋)は、素晴らしい作業場所を提供していただいたことに関して宇都宮大学に謝意を表します。

## 参考文献

- [1] 和達三樹「非線形波動」岩波書店(2000).
- [2] M. Toda: *Theory of Nonlinear Lattices* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1981).
- [3] A. Hasegawa: *Optical Solitons in Fibers* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
- [4] B.B. Kadomtsev: *Collective Phenomena in Plasmas* (Nauka, Moscow, 1976).
- [5] L.P. Pitaevskii and S. Stringari: *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [6] R. Hirota: *Phy. Rev. Lett.* **27** (1971) 1192.
- [7] C.S. Gardiner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura: *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095.
- [8] V.E. Zakharov and A.B. Shabat: *Sov.Phys. JETP* **34** (1972) 62.
- [9] M.J Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur: *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 125.
- [10] J. Satsuma and N. Yajima: *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **55** (1974) 284.
- [11] H. Fujishima and T. Yajima: *in preparation*.