

## 基底状態のセクター空間について

Hajime Moriya \*

12.11.13(tue) 於京都大学数理研

基底状態 (ground state, vacuum) は温度 0 の時に実現される安定な状態であり, 統計力学, 場の理論で基本的である. この論説では, 基底状態のセクター空間の性質を具体例を通して考察する.

初めに, 用語・定義の導入を行う. 基本的な枠組みは,  $C^*$  代数を用いた量子統計力学であり, 基本文献として, [BR] O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1.2* をあげる.

$A$  は  $C^*$  代数を表す. 簡単のため, 単位元を持つとする.  $\{\alpha_t; t \in \mathbb{R}\}$  は  $A$  上の強連続な時間発展自己同型群とする.  $-i \frac{d}{dt} \alpha_t(A)|_{t=0}$  が存在する  $A \in \mathcal{A}$  に対し時間微分を定義し,  $\delta_0(A)$  と記そう.  $\delta_0$  の定義域  $\mathcal{D}(\delta_0)$  は  $A$  で稠密な  $*$ -部分代数である.  $\{\alpha_t; t \in \mathbb{R}\}$  に対応する基底状態を以下のように与える.

**Definition 1.**  $A$  上の状態  $\varphi$  が  $\alpha_t$ -基底状態とは

$$-i\varphi(A^*\delta_0(A)) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{D}(\delta_0).$$

基底状態は, 要はエネルギー最小の状態である.

$A$  の状態の空間を考察する.  $A$  上の状態全体を  $S$  とする.  $A$  上の  $\alpha_t$ -基底状態全体の集合を  $S_{0, \alpha_t}$  と表す.  $S_{0, \alpha_t}$  は  $S$  の凸閉部分集合 (weak\* 位相) であり, 下添え字はそれぞれ温度 0, 時間発展  $\{\alpha_t; t \in \mathbb{R}\}$  を意味する. また逆温度  $\beta$  における,  $\alpha_t$ -KMS(温度平衡) 状態の全体集合を,  $S_{\beta, \alpha_t}$  とする. (こちらを '逆' 温度に取るのは, 一貫性に欠けるが, 文献に従う.)

一般的な事実として以下がある. 数学的条件など, 文献 [BR] を参照.

**Fact 2.** (i)  $S_{0, \alpha_t}$  は  $S$  の face.  
(ii)  $S_{\beta, \alpha_t}$  は単体 (simplex).

用語の確認をしよう. 集合  $A$  およびその部分集合  $K$  をとる.  $K$  はコンパクト閉凸集合とする.  $K$  が  $A$  の face とは, 集合  $K$  の任意の元の  $A$  の要素への凸分解が, 必ず  $K$  内の凸分解になることを言う. 集合  $A$  が単体とは, 集合  $A$  の任意の要素の集合  $A$  での凸分解が一意であることを言う.

Fact 2. (ii) は KMS 状態の KMS 状態への分解が一意ということである. これを根拠に,  $S_{\beta, \alpha_t}$  の端点を純粋相と見なすことができる. “有限温度の平衡系では, 熱力学相に制限すれば, 古典的な統計平均になる” といつてよい.

\*芝浦工業大学 大宮校舎 埼玉県 さいたま市 見沼区

一方,  $S_{0, \alpha_t}$  は単体とは限らない. これは有限量子系の簡単な例から, 直ちに確かめられる. 任意の純粋状態の組は, 量子的に重畳可能だからである.

多体系の理想化である無限系を考えよう. そこで  $S_{0, \alpha_t}$  の構造はどうなるのか. 対称性の破れなどによる基底状態の縮退があっても, それらが互いに素であれば, KMS 状態の場合のように,  $S_{0, \alpha_t}$  は単体になる. これはいつも成立する話か. 我々はそうではないと考える:

「自明な例を排しても,  $S_{0, \alpha_t}$  は単体とは限らない.」

上記の主張を明らかにしていく.

**Definition 3** (基底状態の一次元条件).  $\varphi$  を  $\alpha_t$ -基底状態とする.  $\varphi$  に付随する GNS 表現の三つ組みを  $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \Omega_\varphi)$  と記す.  $H_\varphi$  は  $H_\varphi \Omega_\varphi = 0$  を満たす正值自己共役作用素で,  $U_\varphi(t) = e^{itH_\varphi}$  は  $\mathcal{H}_\varphi$  上で  $\alpha_t$  を実現するユニタリー作用素:

$$U_\varphi(t)\pi_\varphi(A)U_\varphi(t)^{-1} = \pi_\varphi(\alpha_t(A)), \quad A \in \mathcal{A}.$$

もし以下を満たすならば

$$\dim\{\xi \in \mathcal{H}_\varphi | H_\varphi \xi = 0\} = 1, \quad (1)$$

すなわち  $H_\varphi$  の固有値 0 の固有ベクトルが巡回ベクトル  $\Omega_\varphi$  の定数倍のみならば, 基底状態  $\varphi$  は一次元条件を満たすという.

この定義は [Sak] S. Sakai. Operator Algebras in Dynamical Systems: The theory of unbounded derivations in C\*-Algebras の Def 4.2.6 で与えられ, “physical ground state” と命名されている. 当然ながら,  $S_{0, \alpha_t}$  が唯一であれば, その基底状態は一次元条件を満たす. しかし, 一次元条件は相転移の存在を排除しない. これはセクター空間 (重畳可能空間) 内部の様子についての条件である 5.

任意の基底状態が「一次元条件」を満たしたらどうであろう. この場合には,  $S_{0, \alpha_t}$  の構造が ‘古典的’ になることが以下のように知られている.

**Theorem 4** (C.J.K. Batty 1980). 以下は同値である.

- (i)  $\forall \varphi \in S_{0, \alpha_t}$  は一次元条件を満たす.
- (ii)  $\forall \varphi \in S_{0, \alpha_t}, \pi_\varphi(\mathcal{A})'$  は可換.
- (iii)  $S_{0, \alpha_t}$  は単体.
- (iv)  $\varphi \in S_{0, \alpha_t}$  が純粹相 (factor-状態)  $\implies \varphi$  は純粹状態, すなわち  $S$  で端点.
- (v)  $\varphi_1, \varphi_2 \in S_{0, \alpha_t}, \varphi_1 \neq \varphi_2 \implies \varphi_1$  と  $\varphi_2$  は互いに素 (disjoint) である.
- (vii)  $\varphi \in S_{0, \alpha_t}$  が純粹状態  $\implies \varphi$  は  $\alpha_t$  に関し弱クラスター性を持つ.

[Sak] が, 「一次元条件」を満たす基底状態を “physical” と呼ぶ含意は何であろうか. 場の理論の一般論の中では, しばしば, セクター空間での vacuum の一意性が仮定される. しかし, 「一次元条件」を無限系の基底状態に期待される一般的な要請であると見なすのは, 十分に妥当であろうか.

以下では Theorem 4 の同値条件を破る物理モデルを二つ与えよう. これらを “unphysical” とするのは, 不自然であると筆者は考える.

◇ 一次元強磁性 XXZ 模型, パラメーター  $\Delta = \frac{1}{2}(q + q^{-1}) > 1$

$$H = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{(1 - \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z)}{4} - \frac{q}{2(1 + q^2)} (\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y) \right\} \quad (2)$$

このハミルトニアンに対し, kink 状態が基底状態を与えることが既に知られている:

$$\varphi_{\text{kink}} = \otimes_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^{(k)} \quad (3)$$

$\varphi^{(k)}$  は  $\mathcal{A}_k$  上の純粋状態で, 対応する単位ベクトルは

$$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + q^{2k}}} \begin{pmatrix} 1 \\ q^k \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad (4)$$

$\varphi_{\text{kink}}$  は一次元条件を破る. なぜならば任意の kink 状態の GNS 空間は, 同じ型ののすべての kink 状態を含むからである. これらの kink 状態はすべて基底状態であり, 同じセクター空間内で  $\infty$  に縮退している.

これとは別の一次元条件を破る例を探そう. ただし以下のような要請を課す.

条件 I: 非自明な格子間作用を持つ

条件 II: 平行移動不変な基底状態

条件 I は有限次元のような場合を排除するため, 条件 II は kink では無いものを作るためである.

◇ 一次元 ( $\mathbb{N}$  上) 量子スピンモデル (H. Nicolai):

$$H = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sigma_{2k-1}^z \sigma_{2k+1}^z - \sigma_{2k-1}^z \sigma_{2k}^z - \sigma_{2k}^z \sigma_{2k+1}^z \right\} \\ + 4 \left\{ \sigma_{2k}^+ \sigma_{2k-1}^- \sigma_{2k+2}^- \sigma_{2k+3}^+ + \sigma_{2k-1}^+ \sigma_{2k}^- \sigma_{2k+3}^- \sigma_{2k+2}^+ \right\} \quad (5)$$

ただし  $\sigma_k^+ := \frac{1}{2} (\sigma_k^x + i\sigma_k^y)$ ,  $\sigma_k^- := \frac{1}{2} (\sigma_k^x - i\sigma_k^y)$

平行移動不変な基底状態として

$$\varphi_{\text{fock}} = \otimes_{k \in \mathbb{N}} \varphi_{\text{fock}}(k), \quad (6)$$

ただし  $\varphi_{\text{fock}}(k)$  は  $\mathcal{A}_k$  上の純粋状態で, 対応する単位ベクトルは, 任意の  $k \in \mathbb{N}$  で

$$\chi_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$\varphi_{\text{fock}}$  は格子間では相関が無い自明な状態である. ただしこのセクター空間では, 無限に基底状態が縮退している.

背景を簡単に触れよう。Jordan-Wigner 変換で, (5) の量子スピン系のハミルトニアンを, 格子フェルミオン系のものに変換すると, 隠れた構造が見えてくる。

$$H = \{Q, Q^*\}, \quad (8)$$

$$\{Q, Q\} = \{Q^*, Q^*\} = 0, \quad [Q, H] = [Q^*, H] = 0 \quad (9)$$

$$Q = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{2j+1} a_{2j}^* a_{2j-1} \quad (10)$$

$a_j, a_j^*$  は格子点  $j \in \mathbb{N}$  上の spinless フェルミオンの消滅・生成演算子で, 代数関係

$$\{a_i^*, a_j\} = a_i^* a_j + a_j a_i^* = \delta_{i,j} 1$$

$$\{a_i^*, a_j^*\} = \{a_i, a_j\} = 0$$

を満たす。

(8) のハミルトニアンは Dirac 型と類似する分離型である。そのために, 基底状態空間は特徴的で, 基底状態の縮退度が高い。(体積の増大に対し, 縮退が指数的に増加する。) 基底状態のセクター空間にある無数の基底状態は, 量子的な重畳が可能である。これは温度状態の場合には見られない状況である。それゆえ一次元条件は破れる。