数理解析研究所講究録
第 1852 巻 2013 年 185-191

セクター理論に基づくエントロピー論の再構成

京都大学数理解析研究所
岡村 和弥 [1]

1 導入

前世紀中ごろに Shannon によって通信理論の数学的基礎が確立されて以降，通信技術を含む情報処理に革新的進歩が起き，その技術が浸透することで生活基盤を支える大きな影響力をもつまでに至った。今世紀では，より安全な暗号技術の実装や通信データの大容量化が実用上の観点からの通信理論および技術の課題となっている。物理学者にこれらの問題に関与する余地があるとすれば，通信技術の実装は物理的媒体によってなされるという事実を受け止め，物理的な通信媒体として物理的対象を研究することであろう。量子論的対象を情報処理に利用することを焦点とした「量子情報理論」はその一環の代表格であるといえる。量子情報理論では量子論の原理の利用と従来の情報理論の根幹の再認識・再構成を土台とした新展開が理論と応用双方の課題となっている。本稿では Shannon の創始した情報理論の中心概念である**エントロピー**の数学的量子論的な再検討を目論む。「物理的な媒体を利用して情報処理を行う」という観点に整合するように，「近似・精度の厳密な取扱い」を数学的に保証することを本稿では目下の課題としている。

以後，$\mathcal{X}$ を C*-代数とし，本稿で登場する C*-代数は単位的であると仮定する。そして，$\mathcal{X}$ 上の状態 ω と。任意の $\omega \in E_{\mathcal{X}}$ に対し，Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\omega$, 単位ベクトル $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ と $\mathcal{X}$ から $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_\omega)$ への表現 π_ω で $\omega(X) = \langle\Omega_\omega|\pi_\omega(X)\Omega_\omega\rangle$, $\mathcal{H}_\omega = \overline{\pi_\omega(\mathcal{X})\Omega_\omega}$ を満たす 3 つ組 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega)$ （$\mathcal{X}$ の ω に伴う GNS 表現）を考察する。そして，$\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X}) = \pi_\omega(\mathcal{X})'' \cap \pi_\omega(\mathcal{X})'$ を von Neumann 代数 $\pi_\omega(\mathcal{X})''$ の中心と呼ぶ。

2 セクター，中心測度と冨田分解定理

状態 ω は自明な中心 $\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X}) = \mathbb{C}1$ をもつとき，因子状態と呼び，因子状態の全体を $F_{\mathcal{X}}$ で表す。2 つの状態 π_1, π_2 は (直和による) 多重度を無視したユニタリー同値にあるとき準同値であると呼ばれ，$\pi_1 \approx \pi_2$ と表す。因子状態の準同値類をセクター [11, 12, 13] と呼ぶ。各々のセクターはそれぞれ 1 つの表現を単位としてつくられる直和表現によって構成されており，セクターが異なればそこには繋絡作用素 (intertwiner) が存在しない (即ち**無縁** (disjoint))。言い換えれば，2 つの因子状態は準同値と無縁の二択の関係にあることが知られていて，因子状態を基準とする観点からは準同値でないものは無縁であるが故にセクターが状態空間の基本単位であって，同時に表現のレベルに物理的操作的意味が生まれるのである。

量子論においてセクターはマクロに見て異なる構造の分類指標の一単位として用いられる。一般化された純粋相および根源事象の統合概念であって，ミクロから創発する動的な背景を持ちながら熱力学的な安定性に支えられており，マクロな一単位でありながら内部

[1] 連絡先 kazuqi@kurims.kyoto-u.ac.jp

にミクロな動的構造を含んでいる。とはいえ，このように定義されたセクターが現実的に意味を持つためには，一般の状態が準備された状況からセクターを考察する状況への移行が自然に行える必要がある。その根拠になるのが次の定理である。

定理 1 (冨田分解定理 ([2] 参照)). $\mathcal{X}$ を C^*-代数とし，ω を $\mathcal{X}$ 上の状態とする．次の *3* つの集合に 1 : 1 対応が存在する：
(1) 直交測度 $\mu \in \mathcal{O}_\omega(E_\mathcal{X})$；
(2) 可換 *von Neumann* 代数 $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathcal{X})'$；
(3) $\mathcal{H}_\omega$ 上の射影作用素 P で，$P\Omega_\omega = \Omega_\omega$，$P\pi_\omega(\mathcal{X})P \subseteq \{P\pi_\omega(\mathcal{X})P\}'$ を満たす．
$\mu, \mathfrak{B}, P$ は上の対応があるとき，次を満たす：
(i) $\mathfrak{B} = \{\pi_\omega(\mathcal{X}) \cup P\}'$;
(ii) $P = [\mathfrak{B}\Omega_\omega]$．ただし，$[\mathfrak{B}\Omega_\omega]$ は $\mathfrak{B}\Omega_\omega = \{B\Omega | B \in \mathfrak{B}\}$ から生成される $\mathcal{H}_\omega$ の閉部分空間への射影である;
(iii) μ を $\widehat{\mathcal{X}}$ 上の状態とみなすとき，

$$\mu(\widehat{X}_1\widehat{X}_2\cdots\widehat{X}_n) = \langle\Omega_\omega|\pi_\omega(X_1)P\pi_\omega(X_2)P\cdots P\pi_\omega(X_n)\Omega_\omega\rangle; \tag{1}$$

(iv) $\mathfrak{B}$ は次で定義される写像 $L^\infty(\mu) \ni f \mapsto \kappa_\mu(f) \in \pi_\omega(\mathcal{X})'$ の像に *-同型である：

$$\langle\Omega_\omega|\kappa_\mu(f)\pi_\omega(X)\Omega_\omega\rangle = \int d\mu(\rho)\ f(\rho)\ \widehat{X}(\rho) \tag{2}$$

そして，$X, Y \in \mathcal{X}$ に対し

$$\kappa_\mu(\widehat{X})\pi_\omega(Y)\Omega_\omega = \pi_\omega(Y)P\pi_\omega(X)\Omega_\omega \tag{3}$$

が成立する．

$\mathfrak{B}$ として中心 $\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X})$ の部分 von Neumann 代数に対応する直交測度を ω の準中心測度と呼び，$\mu_\mathcal{B}$ もしくは $d^\mathfrak{B}\omega$ で表す。特に，$\mathfrak{B}$ が中心である場合に対応した直交測度を中心測度と呼び，μ_ω もしくは $d\omega$ で表す。任意の $\Delta \in \mathcal{B}(E_\mathcal{X})$ に対し，2 つの正値線型汎関数

$$\int_\Delta d\mu(\rho)\ \rho, \quad \int_{E_\mathcal{X}\setminus\Delta} d\mu(\rho)\ \rho \tag{4}$$

が無縁になる $\mu \in \mathcal{O}_\omega(E_\mathcal{X})$ は準中心測度である場合に限られ，また，状態の因子状態への分解を与えるのは中心測度のみであることが知られている [2]。それ故，物理的状況・実験設定を指定することに対応した状態 ω を与えるごとに，その状態の中心測度 μ_ω を考察することで指定された状態で関与するセクターを事後的に了解することができるのである。セクター理論の基本的な応用先として測定過程があり，(準) 中心測度を主軸に据えることで Born の公式を導出可能となる [15, 17]。このように，セクター概念と (準) 中心測度は従来の理論に新たな知見を与えることも可能であり，しかも，セクター概念を積極的に解析する契機となった DHR-DR 理論での利用も同じ文脈で扱えるが故に本稿で議論したセクター概念は量子論の中心概念足りうる。次章ではその統計的側面を説明しよう。

3 日合・大矢・塚田の定理と大偏差原理

定理 2 (日合・大矢・塚田の定理). φ, ψ それぞれを μ, ν を重心測度とする $\mathcal{X}$ 上の状態とする。$\mu, \nu \ll m$ となる準中心測度 m が存在ならば，$S(\varphi\|\psi) = D(\mu\|\nu)$。ただし，$S(\varphi\|\psi)$ は量子相対エントロピーで，$D(\mu\|\nu)$ は相対エントロピーである。

この定理は量子相対エントロピーをデータの確率分布にあたる各状態の準中心測度に対する相対エントロピーで評価可能であることを示している。この結果を用いれば次が示される [14, 16]：

- 合成系としての適切な測定の記述を行えば，**Sanov の定理の量子版**が成立し，量子相対エントロピーはレート関数の役割を果たす。
- 2 つの状態を比較できる測定 (通常の量子推定理論での POVM の最適化に相当) が存在すれば，その測定を用いて Stein の補題や Chernoff 限界等の，仮説検定の漸近論を古典論の設定を利用して証明可能である。このとき，量子相対エントロピーが現れる。

4 エントロピー論の定式化

4.1 量子エントロピーに関わる諸問題

今後，C*-代数 $\mathcal{X}$ は可分であると仮定する。[19, 7] に従って量子情報理論ではすっかりお馴染みの **von Neumann(-Narnhofer-Thirring) エントロピー** (von Neumann(-Narnhofer-Thirring) entropy) を一般の C*-代数上で定義する：

定義 3 (von Neumann(-Narnhofer-Thirring) エントロピー). C^*-代数 $\mathcal{X}$ 上の任意の状態 ω に対して，ω のエントロピー $S(\omega)$ を次で定める：

$$S(\omega) = \sup\{\sum_{j\in J} \lambda_j S(\omega_j\|\omega)\}. \tag{5}$$

ただし, sup は ω の有限（もしくは可算）個の状態族 $\{\omega_j\}_{j\in J}$ への状態の分解 $\omega = \sum_{j\in J} \lambda_j \omega_j$ の取り方に対してとっている。

量子相対エントロピーの統計的意味は前章で与えられていることに注意しよう。von Neumann エントロピーに対して次の決定的な結果が知られている [10]：

定理 4. (1)

$$S(\omega) = \inf\{-\sum_{j\in J} \lambda_j \log \lambda_j\}. \tag{6}$$

ただし, inf は ω の有限（もしくは可算）個の状態族 $\{\omega_j\}_{j\in J}$ への状態の分解 $\omega = \sum_{j\in J} \lambda_j \omega_j$ の取り方に対してとっている。そして，ω が純粋状態の可算個の凸結合で表せないならば，$S(\omega) = \infty$.

(2) $\mathcal{M}$ が II 型もしくは III 型の因子環ならば，任意の $\omega \in E_{\mathcal{M}}$ に対し，$S(\omega) = \infty$.

それゆえ，もしvon Neumannエントロピーを Shannonエントロピーの非可換版だと捉えるならば，以下のような理解をするべきである：

暫定的結論

von Neumann エントロピーは一般の物理系には適用不可能で，例外はI型環の純粋状態の可算個の凸結合で表せる状態だけであり，このときのみ有限な意味のある量である。

けれども，光を用いた通信等の観点からはvon Neumannエントロピーがそれほど有用でないとしても，無限自由度系である電磁場の量子論的記述に踏み込むならば無限自由度系にも適用可能なエントロピーを定義し利用するのが妥当であろう。

注意 5. 微分エントロピーを用いればよいと考えるかもしれないが，特定の測度を固定して，その測度で押さえられる測度のみが対象になる。しかし今のところ押さえる測度の定め方に関する根拠になる議論はないので，微分エントロピーに関しては本稿では触れないことにする。

今後の方針をまとめておこう：

方針 6. 現実的かつ有意なエントロピーを定義し，*von Neumann* エントロピーをはじめとした過去の研究で定義されている各エントロピーに意味と適用条件を与える。

新しいエントロピーを導入する前に基本的な復習をする。Shannon エントロピー $H(\mu)$ の妥当性は

1. McMillan の定理 (+ Ornstein の定理)
2. Shannon の第一定理，Shannon の第二定理

に基づくデータ圧縮 (物理的には増幅過程とも関連) の理論にあることを思い出そう。特に，Shannon エントロピーは**定常時系列**という力学系に対する K-S エントロピーの一形態と解釈できる。つまり，生成されたデータの系列に備わったエントロピーであり，マクロ化されて意味を持つデータの利用に他ならない。量子系においてはセクターを抽出する状況と適合しており，そのような観点から次の**冨田エントロピー** (Tomita entropy) を定義する：

定義 7 (冨田エントロピー). 中心 $\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X})$ の任意の *von Neumann* 部分代数 $\mathfrak{B}$ に対して，

$$S_{\mathfrak{B}}(\omega) = \begin{cases} H(d^{\mathfrak{B}}\omega), & (\mathfrak{B} \cong l^\infty(S), |S| \leq \aleph_0), \\ +\infty, & \textit{otherwise}. \end{cases} \tag{7}$$

と定義する。この量を冨田エントロピーと名付ける。

注意 8. 冨田エントロピー $S_{\mathfrak{B}}(\omega)$ はより一般に，可換 *von Neumann* 代数 $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathcal{X})'$ に対し定義可能である。

4.2 冨田エントロピーと$\mathcal{S}$-エントロピー

冨田エントロピーは以下の性質を持つ：

命題 9. (1) $S_{\mathfrak{B}}(\omega) \geq 0$.
(2) $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2$ ならば，$S_{\mathfrak{B}_1}(\omega) \leq S_{\mathfrak{B}_2}(\omega)$.
(3)
$$S_{\mathfrak{B}}(\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2) \leq \lambda S_{\mathfrak{B}}(\omega_1) + (1-\lambda) S_{\mathfrak{B}}(\omega_2).$$
(4) $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{Z}_{\omega_1}(\mathcal{X})$, $\mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{Z}_{\omega_2}(\mathcal{X})$ ならば，
$$S_{\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2}(\omega_1 \otimes_{min} \omega_2) = S_{\mathfrak{B}_1}(\omega_1) + S_{\mathfrak{B}_2}(\omega_2).$$

(2) は Shannon-Khinchin 公理系の条件の一つから示される。冨田エントロピーは**測定過程**と**定常時系列**という 2 つの力学系の合成に対する不変量と解釈可能。冨田エントロピーの欠点は通常 ω を固定してしか議論できないところ。他のエントロピーとの橋渡しすることでこの欠点をクリアする。

[8] で定義された$\mathcal{S}$-エントロピー $S^{\mathcal{S}}(\varphi)$ を用いることで，一つの状態 ω 以外の関連のある状態に対しても考察可能な展望が開ける。

定義 10 ($\mathcal{S}$-エントロピー). $\mathcal{S}$ を $E_{\mathcal{X}}$ の弱 $*$-コンパクトな凸集合とし，$\mathcal{S}$ の可算部分集合に台を持つ φ の重心測度の全体を $D_{\varphi}(\mathcal{S})$ で表す。$\mathcal{S}$-エントロピー $S^{\mathcal{S}}(\varphi)$ を次で定める：
$$S^{\mathcal{S}}(\varphi) = \inf\{H(\mu) \mid \mu \in D_{\varphi}(\mathcal{S})\}. \tag{8}$$

基準状態 ω と中心 $\mathfrak{Z}_{\omega}(\mathcal{X})$ の部分 von Neumann 代数 $\mathfrak{B}$ に対し，$\mathcal{S}_{\omega}^{\mathfrak{B}}$ を次で定義する：
$$\mathcal{S}_{\omega}^{\mathfrak{B}} = \overline{\text{conv.span.} \bigcup_{\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}} \text{supp } d^{\mathfrak{C}}\omega}^{w*}. \tag{9}$$

ただし，$\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ は可換 von Neumann 代数としての包含関係である。明らかに，$S_{\mathfrak{B}}(\omega) = S^{\mathcal{S}_{\omega}^{\mathfrak{B}}}(\omega)$ を満たす。ω および $\mathfrak{B}$ を固定する状況が通信理論では通常仮定されるため，$\{\varphi \in E_{\mathcal{X}} \mid S^{\mathcal{S}_{\omega}^{\mathfrak{B}}}(\varphi) < \infty\}$ となる状態族は考察対象として自然で，古典通信理論の議論は此処まできて漸くなぞることが可能となる。古典的な通信理論では使用するアルファベットを一度固定すればその起源を問わないが，物理系を利用する観点からはそのアルファベットを変更する自由度を考慮するのは自然であって，固定するごとに如何に物理系を制御すべきかが決まる。

4.3 von Neumann エントロピーの役割

前節の議論から，$\mathcal{S}$ として $\mathcal{S}_{\omega}^{\mathfrak{B}}$ を想定する。$\mathcal{S}_{\omega}^{\mathfrak{B}}$ および$\mathcal{S}$-エントロピーの定義から次が成立する：
$$\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2 \Longrightarrow \text{「} \mathcal{S}_{\omega}^{\mathfrak{B}_1} \subseteq \mathcal{S}_{\omega}^{\mathfrak{B}_2} \text{ かつ } S^{\mathcal{S}_{\omega}^{\mathfrak{B}_1}}(\varphi) \leq S^{\mathcal{S}_{\omega}^{\mathfrak{B}_2}}(\varphi) \text{」}. \tag{10}$$
この最も特別な場合として次の関係式が成立する：

命題 11 (情報量の上限).
$$S^{\mathcal{S}}(\varphi) \leq S^{E_{\mathcal{X}}}(\varphi) = S(\varphi). \tag{11}$$

すなわち，

> von Neumann エントロピーは，I 型環で記述される自由度に対する，
> 状態の純粋状態への (可算な) 分解に対応する $\mathcal{S}$-エントロピーの上限。

(ユニタリー相互作用による) 測定過程を考慮する場合も成立：

$$S^{\mathfrak{B}}(T\varphi) \leq S(T\varphi) = S(\varphi). \tag{12}$$

ただし，$T\varphi = (\tilde{\varphi} \otimes \psi)(\alpha((\pi_\omega \otimes id)(\cdot)))$，$\alpha$ は合成系の物理量代数の自己同型写像，ψ は $S(\psi) = 0$ を満たす測定器の物理量代数上の状態である。

結論

精度を与えるごとの基準状態における冨田エントロピーが，その精度と基準状態からそれほど遠くない状況で考察可能な状態族における $\mathcal{S}$-エントロピーが Shannon エントロピーを考察する状況に対応する。そのうえで，von Neumann エントロピーは冨田エントロピーおよび $\mathcal{S}$-エントロピーの上限を与える。

参考文献

[1] S. Amari and H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, Translations of mathematical monographs; v. 191, Amer. Math. Soc. & Oxford Univ. Press (2000).

[2] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* (vol. 1), Springer-Verlag (1979).

[3] I. Csiszár, A simple proof of Sanov's theorem, Bull. Brazilian Math. Soc. **37**, (2006) 453-459.

[4] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large deviations techniques and applications* (2nd ed.), (Springer, 2002).

[5] F. Hiai, M. Ohya and M. Tsukada, Sufficiency and relative entropy in *-algebras with applications in quantum systems, Pacific J. Math. **107**, 117-140 (1983).

[6] N. Muraki, M. Ohya and D. Petz, Entropies of general quantum states, Open Sys. Info. Dyn. **1** (1992), 43-56.

[7] H. Narnhofer and W. Thirring, From relative entropy to entropy, Fizika **17** (1985), 257-265.

[8] M. Ohya, Entropy transmission in C*-dynamical systems, J. Math. Anal. Appl. **100** (1984), 222-235.

[9] M. Ohya, Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes, Rep. Math. Phys. **27** (1989), 19-47.

[10] M. Ohya and D. Petz, *Qunatum Entropy and Its Use*, (Springer, Berlin, 1993).

[11] I. Ojima, Order Parameters in QFT and Large Deviation, RIMS Kokyuroku **1066** 121-132 (1998), (in Japanese), http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/62481/1/1066-10.pdf.

[12] I. Ojima, A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria -Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions-, Open Sys. Inform. Dyn. **10**, 235-279 (2003).

[13] I. Ojima,"Micro-Macro Duality in Quantum Physics", pp.143-161 in Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum (World Scientific, 2005), arXiv:math-ph/0502038.

[14] I. Ojima and K. Okamura, Large Deviation Strategy for Inverse Problem I, Open Syst. Inf. Dyn. **19**, 1250021 (2012), DOI: 10.1142/S1230161212500217; II, Open Syst. Inf. Dyn. **19**, 1250022 (2012), DOI: 10.1142/S1230161212500229.

[15] I. Ojima, K. Okamura and H. Saigo, in preparation.

[16] K. Okamura, The quantum relative entropy as a rate function and information criteria, Quantum. Inf. Process., DOI: 10.1007/s11128-013-0540-x.

[17] K. Okamura, From Born rule to large deviations, AIP Conf. Proc. **1508**, pp. 433-437; DOI: http://dx.doi.org/10.1063/1.4773161.

[18] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, (Springer, 1979).

[19] von Neumann, J., *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer-Verlag, 1932.

[20] 大矢 雅則，梅垣 寿春,『確率論的エントロピー』，共立出版，(1983)；『量子論的エントロピー』，共立出版，(1984).