数理解析研究所講究録
第 1855 巻 2013 年 56-57

カオス的な2次写像力学系のマルチフラクタル解析

鄭 容武 (広島大学)
Yong Moo Chung (Hiroshima University)

閉区間 $X=[-1,1]\subset\mathbb{R}$ 上で2次写像族 $f_a(x)=1-ax^2,\ 0<a\leq 2,$ を考える. パラメータ a が 2 に十分近いとき, 力学系 $f=f_a\colon X\to X$ は「カオス」的である. 特に, 後述する条件のもとで, f が Lebesgue 測度に対して絶対連続な不変確率測度を持つことが知られている [2, 3, 7]. 本稿では, この写像族によってあたえられる力学系のマルチフラクタル解析について, 高橋博樹氏 (京都大学) との共同研究により得られた結果 [6] を紹介する.

関数 $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$ があたえられたとき, その時間平均によるレベル集合

$$K_{\varphi}(\alpha)=\left\{x\in X\colon \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n\varphi(x)=\alpha\right\}$$

の Hausdorff 次元

$$B_{\varphi}(\alpha)=\dim_H K_{\varphi}(\alpha)$$

を α の関数と考えて, これを φ に関する Birkhoff スペクトルとよぶ. ここで, $S_n\varphi(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(f^i(x))$ である. 力学系のマルチフラクタル解析の目的は, このようにしてあたえられるスペクトルを, 力学系に付随したほかの量によって特徴づけ, その連続性や微分可能性, 凸性について調べることにある. 一様双曲型力学系のマルチフラクタルについてはすでによく調べられているが [9], 2次写像のように特異点を持つ可微分力学系については Misiurewicz 条件を満たす特別な場合 [5] を除いては満足な結果が得られていなかった.

さて, 我々は2次写像力学系 $f=f_a$ に対して, 以下の 4 つの条件を仮定する:

(A1) a は 2 に十分近い;

(A2) $|(f^n)'(f(0))|\geq e^{\lambda n}\ \forall n\geq 0;$

(A3) $|f^n(0)|\geq e^{-\alpha\sqrt{n}}\ \forall n\geq 1;$

(A4) f は区間 $[f^2(0),f(0)]$ 上で位相混合的.

ここで, $\lambda=\frac{9}{10}\log 2,\ \alpha=\frac{1}{100}$ である. 条件 (A1)-(A4) を満たすパラメータ $a\in(0,2]$ の集合の Lebesgue 測度は正である [2, 3, 10].

連続関数 $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$ に対して

$$c_{\varphi}=\inf_{x\in X}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n\varphi(x),\qquad d_{\varphi}=\sup_{x\in X}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n\varphi(x)$$

とおく. すると, $c_{\varphi}=\min\{\mu(\varphi)\colon \mu\in\mathcal{M}_f\}$, $d_{\varphi}=\max\{\mu(\varphi)\colon \mu\in\mathcal{M}_f\}$ が成り立つ. ここで, $\mathcal{M}_f$ は X 上の f-不変 Borel 確率測度全体から成るコンパクト距離

科学研究費補助金 基盤研究 (C) 課題番号 24540212
2010 Mathematics Subject Classification: 37D25, 37E05, 60F10.
キーワード: quadratic maps, nonuniform hyperbolicity, multifractal formalism.

空間を表し, $\mu(\varphi) = \int \varphi d\mu$ である. レベル集合による分割

$$X = \left(\bigcup_{\alpha \in [c_\varphi, d_\varphi]} K_\varphi(\alpha) \right) \cup \hat{K}_\varphi,$$

は複雑な位相構造を持つ. ここで, $\hat{K}_\varphi$ は時間平均 $(1/n)S_n\varphi(x)$ が収束しない点 $x \in X$ の集合である. 実際に, 任意の $\alpha \in [c_\varphi, d_\varphi]$ に対し, $K_\varphi(\alpha)$ は X において稠密である. また, $c_\varphi \neq d_\varphi$ ならば, $\hat{K}_\varphi$ も X において稠密であり, その Hausdorff 次元は 1 である [1, 5]. 測度 $\mu \in \mathcal{M}_f$ の (Kolmogorov-Sinai) エントロピーを $h(\mu)$ と表し, Lyapunov 指数を $\lambda(\mu) = \int \log |f'| d\mu$ により定義する. 条件 (A2) より

$$\lambda_{\inf} = \inf\{\lambda(\mu) \colon \mu \in \mathcal{M}_f\} > 0$$

が成り立つ [4, 8]. 我々の結果は次のとおりである.

定理 [6]. 2次写像力学系 $f = f_a : X \to X$ が条件 (A1)-(A4) を満たすとする. このとき, 任意の連続関数 $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ と $\alpha \in [c_\varphi, d_\varphi]$ に対して,

$$B_\varphi(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \left\{ \frac{h(\mu)}{\lambda(\mu)} \colon \mu \in \mathcal{M}_f,\ |\mu(\varphi) - \alpha| < \varepsilon \right\}$$

が成り立つ. さらに, Birkhoff スペクトル $\alpha \mapsto B_\varphi(\alpha)$ は, 区間 $[c_\varphi, d_\varphi]$ において連続かつ上に凸な関数であり, 区間 $[c_\varphi, \mu_f(\varphi)]$ では単調増加し, 区間 $[\mu_f(\varphi), d_\varphi]$ では単調減少する. ここで, μ_f は f の絶対連続不変確率測度を表す.

参考文献

[1] L. Barreira and J. Schmeling. Sets of "non-typical" points have full Hausdorff dimension and full topological entropy. *Israel J. Math.* **116** (2000), 29–70.

[2] M. Benedicks and L. Carleson, On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$. *Ann. of Math.* (2) **122** (1985), 1–25.

[3] M. Benedicks and L. Carleson, The dynamics of the Hénon map. *Ann. of Math.* (2) **133** (1991), 73–169.

[4] H. Bruin and G. Keller, Equilibrium states for S-unimodal maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **18** (1998), 765–789.

[5] Y. M. Chung. Birkhoff spectra for one-dimensional maps with some hyperbolicity. *Stochastics and Dynamics* **10** (2010), 53–75.

[6] Y. M. Chung and H. Takahasi, Multifractal formalism for Benedicks-Carleson quadratic maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* in press, arXiv:1112.1827, 26 pages.

[7] M. Jakobson, Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Comm. Math. Phys.* **81** (1981), 39–88.

[8] T. Nowicki and D. Sands, Non-uniform hyperbolicity and universal bounds for S-unimodal maps, *Invent. Math.* **132** (1998), 633–680.

[9] Y. Pesin. *Dimension Theory in Dynamical Systems*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1997.

[10] L.-S. Young, Decay of correlations of certain quadratic maps. *Comm. Math. Phys.* **146** (1992), 123-138.