

Nash Equilibrium vs. Maximin Strategy

— Extensive Game Revisited —

河野 敬雄 (Norio KÔNO)

abstract

標準形ゲーム (normal game) において, 最悪の事態を想定する中でベストを尽す, という Maximin 戦略は Nash 均衡戦略が必ずしも合理的選択であるとは思われないようなゲームに対して, 妥当な選択基準を与え得ることが既に例証されている (河野 [9]). 本稿では, 展開形ゲーム (extensive game) においても原理的に Nash 均衡戦略とは異なる Maximin 原理に基づく分析が有効な分析概念であり得ることを例証する.

Key Words: Nash equilibrium, Maximin strategy, Extensive game, Rational choice. Nash 合理性と Maximin 合理性.

§ 1. 展開形ゲームにおける Nash 均衡戦略の問題点

標準形ゲームに対して導入された最適応答戦略とそれに基づく Nash 均衡戦略の概念はゲーム理論の基礎概念である. しかし, 展開形ゲームに対して Nash 均衡戦略を適用することには若干の原理的問題がある. それは Nash 均衡戦略の概念には展開形ゲームの特徴である時間発展 (逐次手番であること) が反映していないことである¹. Nash 均衡戦略は相手の戦略を所与とした場合, 自分の戦略を変更する動機を持たない, このことが相手からみても言える状態であると説明されているが, たとえば, 有名な市場参入ゲームにおける信憑性のない脅し, として紹介される Nash 均衡戦略 (不参入) における相手の所与の戦略は彼自身からみて彼の手番において最適戦略ではない, つまり自己の利得を最大にするようにプレイすること, というゲーム理論の大原則から外れた戦略を所与としているにもかかわらず後手番であることによって実現しないプレイであるために Nash 均衡戦略の定義を満たしている, という例が出来てしまうのである.

◆ Nash の非協力ゲームについての確認

公理 I: 各プレイヤーはより高い自己利得が得られるような選択肢を選ぶ (期待効用最大化原理, 要するにゲームに勝つことを目的にプレイしなければならない). ただし, 手番が確率的に実現する場合の効用は数学的期待値を以て効用とする.

公理 II: 各プレイヤーは, 自分はもちろん相手もすべてのプレイヤーの利得表を認識していて, 公理 I に従って戦略を選んでいるに違いないという信念を持っている.

公理 II はいわゆる共有知識と完全合理性の仮定で, 人間は合理的ないし利己的には行動していないと絶えず批判されているゲーム理論の大前提である.

¹この事実はすでに河野 ([7], p.5) において指摘した.

非協力ゲーム理論において、最も重要な分析道具（殆んど唯一と言ってよい）はよく知られているように次の Nash 均衡戦略の概念である。

Nash 均衡戦略: すべてのプレイヤーにとって、自分から選択肢を変更してもより高い利得を得ることが期待出来ないような戦略の組のこと。

以下最も簡単な 2 人のプレイヤーによる展開形ゲームのいくつかの例について Nash 均衡戦略と本稿の主張する Maximin 戦略について比較検討する。

§ 2. 展開形ゲーム (extensive game)

標準形ゲームを展開形ゲームで、逆に展開形ゲームを標準形ゲームで表現することは可能である。展開形ゲームは時間の経過を表わしているために現実のゲームとの対応関係がイメージしやすいが数学的な定式化には困難さが伴う。なお、ノイマン・モルゲンシュテルン ([16], vol. I, 224 頁) には「これら 2 つの型はまったく同値なので,...」とあり、誤解を生じているように思われる。数学的にも社会学的含意からいっても到底同値であるとは思われない。もっとも、ノイマン・モルゲンシュテルンが扱っている特性関数形の協力ゲームの定式化に関しては何等影響しない、という意味では同値ではある。逆に言うと彼らは Nash の非協力ゲームに対しては殆んど何も貢献していない、ということでもある。ただし、Nash 均衡戦略に関しては定義上どちらの型で考えてもよい。つまり、展開形ゲームの Nash 均衡は標準形で表わした時のそれで定義するからである。しかし、展開形ゲームの特徴および含意は時間発展の要素を含んでいるのに対して Nash 均衡には時間発展の概念が考慮されていない。そのために展開形ゲームの Nash 均衡にはさらにいろいろな特徴を兼ね備えた Nash 均衡を求める努力がなされている (Nash 均衡概念の精緻化という) が本稿でも種々指摘するように展開形ゲームに対して Nash 均衡戦略は少々不適切な分析概念ではないかという疑念がある。代りに提案したいのは Maximin 原理に基づく Maximin 戦略である。Maximin 戦略は Nash 均衡戦略とは異なり、自分の利得表のみの情報で求めることが出来る²ことと、少なくとも本稿で考察する例については「自然」が選択をした後においても Maximin 戦略を求めることが出来るという根本的な違いがある。展開形ゲームの場合、時間発展に従って得られる情報は増えて行くわけだから、合理的戦略も当然変化してゆくはずである。この事実は Aumann-Maschler([1]) によって、ある特別な (ある種病理的な) 展開形ゲームについて Nash 均衡戦略は不合理ではないだろうかということがすでに論じられているが、完全記憶を持つ一般の展開形ゲームについても言えることである。何故ならば、Nash 均衡戦略は完全記憶を持つゲームの場合、時間発展を反映していない混合戦略で定義しても時間発展を反映しているはずの行動戦略で定義しても Nash 均

²従って、公理 II を若干緩めることが出来る。詳しくは河野 ([9]) を参照されたい。

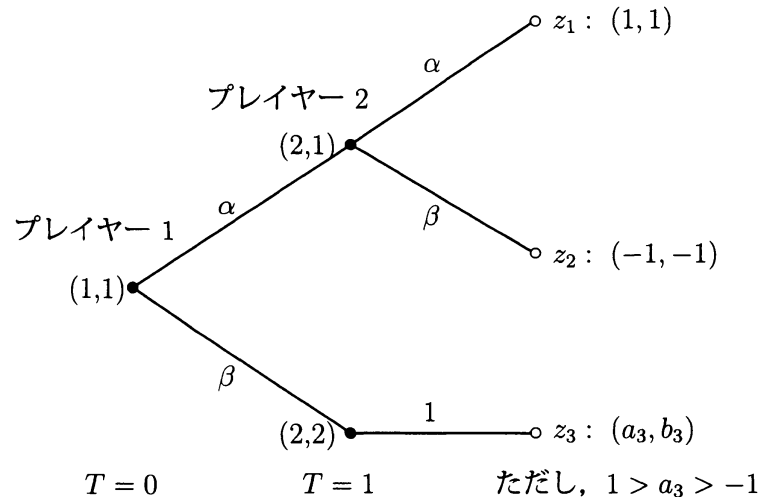
均衡戦略は同値である, という Kuhn の定理 ([10]) によって, 出発時点で決まってしまう, たとえ「自然」がある選択をしてその結果をプレイヤーが知ってもその情報は Nash 均衡戦略には反映されない, という事実があるからである.

なお, 標準形ゲーム, 展開形ゲームの分類はノイマン・モルゲンシュテルン ([16]) によるが現在用いられている展開形ゲームの定式化の原形はもっぱら Kuhn([10]) に従っている.

§ 3. Nash 均衡戦略 vs. Maximin 戦略: 展開形ゲームに対する分析例

展開形ゲームの定式化において, いわゆるゲームツリー上で一般的にプレイヤー分割や情報集合を定義すると後の数学的展開がやっかいとなるので, 本稿では河野 ([7]) に従って, 必要ならばダミーの手番を導入してゲーム終了までのすべてのプレイヤーの手番の数が一定 (有限) であるように定める. ゲームの始点 (時刻 $T = 0$ とする) から始めて各時刻 $T = k$ におけるプレイは必ず同一のプレイヤーのプレイであると仮定し, 隣り合う時刻のプレイヤーは必ず異なるとする. なお, 「自然」が選択を行う可能性があるのは $T = 0$ の場合のみとする.

(3-1) 信憑性のない脅しゲーム



このゲームの Nash 均衡戦略は容易に計算出来て, プレイヤー 2 の利得 b_3 の如何に関わらず次の二組である.

- (1) プレイヤー 1: α , プレイヤー 2: α , を選択する.
- (2) プレイヤー 1: β , プレイヤー 2: $q\alpha + (1-q)\beta$, ($0 \leq q \leq (1+a_3)/2$) (混合戦略).

何故タイプ (2) のような Nash 均衡が発生するかというと, この場合 §1 で述べたように, 相手 (プレイヤー 2) の戦略を所与とする, という Nash 均衡戦略の仮定における所

与の戦略が当該プレイヤー 2 にとって必ずしも合理的選択である必要がないということである。展開形ゲームの特殊性によって自分の戦略が不合理であっても結果的に実現されないために Nash 均衡の定義には抵触しない、という事態が発生しているためである。標準形ゲームの場合、そもそも所与の戦略が合理的であるかどうかの判定基準は存在しない。しかし、展開形ゲームの場合、(2) のような Nash 均衡戦略はいわゆる後ろ向き帰納法によっては得られない不合理なナッシュ均衡戦略であると考えられている。

実は、著者がチェックした限りのすべてのゲーム理論の教科書ではこのゲームにおいて、例えば $a_3 = 0$ とおいて、プレイヤー 2 の利得 b_3 に無関係に Nash 均衡が決定されていることを指摘しないまま、 $b_3 > 1$ となる数値を恣意的に定めて二つの Nash 均衡について次のような解釈を行っている。すなわち、経済学者は、すでに店を構えているプレイヤー 2 にプレイヤー 1 がそのすぐ近くに新規に店を出すか（市場に参入するか）どうかの選択を迫られている、というモデルとして考える。ここで、プレイヤー 2 はプレイヤー 1 が市場に参入してくれない (output z_3) 方が有利だから ($b_3 > 1$ の仮定が必要) 自分は β を選択する、とプレイヤー 1 に何らかの方法で「脅す」というのである。しかし、両プレイヤーとも合理的に判断するならば、安売り競走をして共倒れになる (output z_2) よりは少々利益が落ちても共存の道 (output z_1) を選ぶのが合理的である、つまり、(1) の Nash 均衡（後ろ向き帰納法で得られる Nash 均衡とも一致する）の方が「よりよい」Nash 均衡であるから結果としてプレイヤー 2 は (2) の Nash 均衡戦略は採用しないはずである、つまり「信憑性のない脅し」である、と考える。念を押すが、このストーリーが成り立つのは $b_3 > 1$ である場合に限られることに注意されたい。しかし、Nash 均衡戦略による分析からは境界値 $b_3 = 1$ は出て来ない。

一方、佐藤 (2008, [14], p.68, 信用できない脅しのゲームツリー) は、この話を社会学者らしく、銀行強盗のプレイヤー 2 がプレイヤー 1 の銀行に対して金を要求する、さもないと爆破する、という少々物騒なストーリーで説明している。経済合理性ならばともかく、強盗に、結局はおとなしく捕まった方が身のためだ、という客観合理性を期待できるだろうか。現実問題としても強盗の合理性を信じて警官隊は突入したりはしない。この場合の基本的価値判断は Maximin 原理（最悪の事態を想定してその範囲でベストをつくす）ではないだろうか。

実際、このゲームの場合、Maximin 戦略は容易に計算できる。まず、記号を準備する。

プレイヤー 1 が選択肢 α を確率 p_1 で、選択肢 β を確率 $p_2 = 1 - p_1$ で選んだときの戦略を $\vec{p} = p_1\alpha + p_2\beta$ で表わす。同様にプレイヤー 2 の戦略を $\vec{q} = q_1\alpha + q_2\beta$ とすると、それぞれのプレイヤーの期待利得 $u_n(\vec{p}, \vec{q})$; $n = 1, 2$ は次のように表わされる。

$$u_1(\vec{p}, \vec{q}) = p_1(q_1 - q_2) + p_2a_3, \quad u_2(\vec{p}, \vec{q}) = p_1(q_1 - q_2) + p_2b_3.$$

ここで、Maximi 戦略を求めよう。なお、展開形ゲーム一般の場合の Maximin 戦略の定義は煩雑になるので具体例毎に計算する。一般の標準形ゲームに対する Maximin 戦略の定義（河野 ([9]) を参考にして、出発時点における一般の展開形ゲームの Maximin 戦略の定義を与えることは容易である。ここで、記号

$$a \wedge b \equiv \text{Min}\{a, b\}, \quad a \vee b \equiv \text{Max}\{a, b\}$$

を用いる。

プレイヤー 1 が Maximin 原理に従って期待利得を想定する**想定値** v_1 は次のようにして求められる。

$$v_1 = \text{Max}\{\text{Min}\{u_1(\vec{p}, \vec{q}); \vec{q}\}; \vec{p}\} = \text{Max}\{-p_1 + p_2 a_3; \vec{p}\} = a_3, \quad \text{when } p_1 = 0.$$

($a_3 > -1$ に注意されたい。)

従って、想定値 $v_1 = a_3$ を実現させる可能性のあるプレイヤー 1 の Maximin 戦略 $M_1 \equiv \{\vec{p}^*; v_1 = \text{Min}\{u_1(\vec{p}^*, \vec{q}); \vec{q}\}\} \ni \vec{p}^* = (p_1^*, p_2^*)$ は $p_2^* = 1$ のみとなる。ここで、標準形ゲームとの違いが現れるが、プレイヤー 1 が彼の Maximin 戦略 $p_2^* = 1$ を採用した場合、ゲームはプレイヤー 2 の選択を待たずに結果 (output) $z_3 : (a_3, b_3)$ で終了する。つまり、Nash 均衡戦略 (2) が実現する。しかし、ここで、プレイヤー 2 の立場に立って彼の Maximin 戦略を計算してみよう。彼の想定値 v_2 は

$$\begin{aligned} v_2 &= \text{Max}\{\text{Min}\{u_2(\vec{p}, \vec{q}); \vec{p}\}; \vec{q}\} \\ &= \text{Max}\{\text{Min}\{(q_1 - q_2)p_1 + b_3 p_2; \vec{p}\}; \vec{q}\} \\ &= \text{Max}\{(2q_1 - 1) \wedge b_3; \vec{q}\}. \end{aligned}$$

ここで、場合が別れて $b_3 \geq 1$ ならば、 $q_1 = 1$ のとき、 $v_2 = 1$ が得られ、 $b_3 \leq 1$ ならば $q_1 \geq (1 + b_3)/2$ のとき、 $v_2 = b_3$ となる。実際に実現するのは先にプレイするプレイヤー 1 の Maximin 戦略 $p_2^* = 1$ によって、プレイヤー 2 の実現値 v_2^* は $v_2^* = b_3$ だから、 $b_3 > 1$ ならば $v_2 = 1 < b_3 = v_2^*$ となり、プレイヤー 2 にとっては予期せぬ好ましい結果が得られる。ここで強調したいことはこの「信憑性のない脅しゲーム」においてクリティカルだった $b_3 = 1$ という値が、Nash 均衡分析においては根拠がなく、Maximin 戦略分析からは根拠がある、ということである。さらにこのストーリーを続けるならば、 $b_3 > 1$ の場合、もし、プレイヤー 1 が Nash 均衡分析に従って (1) の Nash 均衡を採用した場合でも想定値 $v_2 = 1$ が実現されて、この場合はプレイヤー 1 の実現値 v_1^* が $v_1^* = 1 > v_1 = a_3$ となり、プレイヤー 2 の方は想定値と同じ実現値 $v_2^* = v_2 = 1$ となるから、プレイヤー 1 の方が予期せぬ利得を得る。ただし、この場合プレイヤー 1 はプレイヤー 2 が何等かの理由で、どう考えても双方にとって不利な選択肢 β を選択するかもしれない、というリスクを負わなければならない。想定値以上が期待できる Nash 均衡戦略には、Maximin 戦略と一致しな

い限り、必ずリスクが伴うことはすでに河野 ([9], 定理 4) で示した。

(3-2) 最後通帳ゲーム ([8])

このゲームも至ってシンプルな構造をしている。プレイヤー 1 は手持ち金 10 ドルを持っていて、選択肢 $S_1 = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ から選んで x ドルをプレイヤー 2 に提供する。プレイヤー 2 はそれを見て、accept する (a) か、reject する (r) かを決める ($S_2 = \{a, r\}$)。accept すればプレイヤー 1 の利得は $u_1(x, a) = 10 - x$ 、プレイヤー 2 の利得は $u_2(x, a) = x$ 、しかし、reject すれば利得は共に 0 とする。このゲームのプレイヤー 1 の Nash 均衡戦略は $x = 0$ (つまり、10 ドルを独り占めすること) であり、プレイヤー 2 の Nash 均衡戦略は任意の確率 $0 \leq q_a \leq 1$ で accept することである。このときの期待利得はそれぞれ、 $u_1(0, q_a) = 10q_a$ 、 $u_2(0, q_a) = 0$ である。しかし、実験結果とはまったく一致しないことが知られている (ギンタス, [5] pp.81-83, 3.6 利他的懲罰の項を参照されたい)。

このゲームに Maximin principle を適用してみる。プレイヤー 1 にとって最悪な期待利得はもちろん相手が reject する場合である。つまり、想定値 v_1 は $v_1 = 0$ である。この場合、プレイヤー 1 はどのような額を提供しても結果は変わらないから、彼の Maximin 戦略としては、混合戦略 $P(S_1)$ (S_1 上の確率分布全体) の要素、あるいは同じことであるが、 S_1 に値を取る確率変数 X_1 なら何を選んででもよい。一方、プレイヤー 2 にとっての最悪な期待利得は相手が 0 ドルしか提供してくれないときで、その場合、accept しようが reject しようが結果は変わらない。つまり、彼の Maximin 戦略も任意の確率 q_a を持つ混合戦略を選択してよい。さて、その結果として各プレイヤーの現実の期待利得はどうなるであろうか。(この結果を実現値という。それぞれ、 v_1^*, v_2^* と記す)。このとき容易に分かるように、

$$v_1^* = q_a(10 - E[X_1]), \quad v_2^* = q_a E[X_1] \quad (E[X_1] \text{ は確率変数 } X_1 \text{ の期待値})$$

となる。つまり、何でもアリ、である。しかし、実際の実験結果と矛盾する理論的結果でないことは確かである。Nash 均衡概念による分析が現実とはかけ離れていたのに比べれば、Maximin 戦略による分析の方がより現実に合わせた解析が可能であることを示唆しているように思われる。つまり、社会全体というより最低 2 人のグループ内の力関係、勢力関係等のグループダイナミックスの実証的研究の分析道具として使えるのではないだろうか。

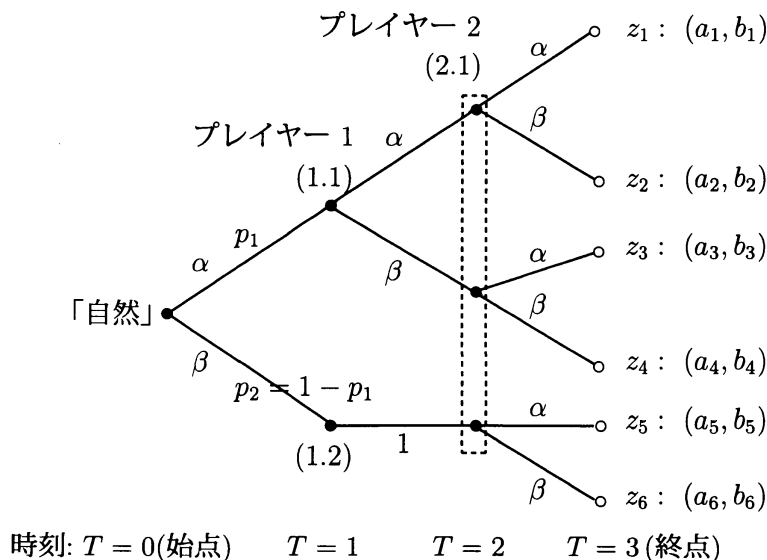
なお、ギンタス (2009, 最後通帳ゲーム pp.81-83, 3.6 利他的懲罰) が実際の実験結果を説明しようと試みている数理モデル (p.96, 定理 3.1) はあまりにも恣意的で到底納得できない。つまり、このゲームを Nash 均衡概念で分析すること自体に無理がある、という印象を受ける。

(3-3) Aumann-Maschler の例

Aumann-Maschler(1972, [1]) が考察した次のような展開形ゲームは行動戦略 = 混合戦略 = 2点集合上の確率測度、という極めて特殊なゲームである。その意味で少々 pathological

example であるとも考えられるが展開形ゲームの問題点が明瞭に現れているので我々の視点で分析してみよう. 本稿ではゲームをプレイする上ではまったく本質的ではないが原論文にはない変更を1箇所だけ行った. それは, 原論文ではプレイヤー1は「自然」が α を選択した場合だけプレイに参加出来て, プレイヤー1が選択を行い, しかし, プレイヤー2は「自然」が何を選択したかの情報を全く知らず(従って, プレイヤー1がプレイしたかどうかは知り得ない)自分の選択をしなくてはならない, という展開形の図式になっているが, 本稿では「自然」が選択肢 β を選択した場合, プレイヤー1は唯ひとつの選択肢 $\{1\}$ を確率1で選択する, というようにダミーの手番を書き加えたことである. つまり, 河野([7])に従って時刻 $T=1$ においては必ずプレイヤー1がプレイする, と仮定してある. このように表現することによって, 実は行動戦略と混合戦略の原理的違いが明らかになる. すなわち, プレイヤー1の情報集合(1.1)における行動戦略とは2点集合 $B_1 \equiv \{\alpha, \beta\}$ 上の確率測度であり, 混合戦略とは2点集合 $S_1 \equiv \{(\alpha, 1), (\beta, 1)\}$ 上の確率測度であって, 数学的には同値であるが, 確率分布が乗っている集合が異なるのである. つまり, B_1 の要素を純粋戦略と呼んではならないのであるが, 数式展開上は純粋戦略の集合 S_1 の要素と同一視してもかまわない. Aumann-Maschlerの議論を見ているとこの違いを意識しないまま様々な認識上の困難を議論しているように見受けられる.

Aumann-Maschler([1])の例



このゲームの構造は次のように記述出来る. ここで, 有限集合 M 上の確率測度全体を $\mathcal{P}(M)$ と記す.

黒丸(●)を手番と呼ぶ. このゲームの場合, 時刻 $T=0$ における手番は「自然」(構造

上はプレイヤーの一人) であるが, その選択は所与の確率で与えられているとする. 次に $T = 1$ における手番はプレイヤー 1 の手番, $T = 2$ における手番はプレイヤー 2 の手番とする (スタンダードなゲーム理論の教科書では手番全体の分割を各プレイヤーに割り当てるが, 先に指摘したようにダミーの手番を付け加えることによって同一時刻に対応する手番は同一のプレイヤーであるとした方が定式化が分かりやすくなる. 同一時刻に属する手番全体の分割した要素を**情報集合**と呼ぶ. 「自然」に属する情報集合は必ず唯一の手番からなると仮定する. 各情報集合には選択枝の集合 (有限集合) を付随させる.

¶ 「自然」: 選択枝の集合: $S_0 = \{\alpha, \beta\}$, $\mathcal{P}(S_0) \ni \vec{p} = p_1\alpha + p_2\beta$ は所与. ただし, $0 < p_1 < 1$ を仮定する. 以後, 戦略は確率ベクトル $\vec{p} = (p_1, p_2)$ のようにベクトル表示する. 確率だから $p_2 = 1 - p_1$, $1 \leq p_1 \leq 1$ の範囲である.

¶ プレイヤー 1: 2 つの情報集合: $I_{1.1} = \{(1.1)\}$, $I_{1.2} = \{(1.2)\}$ を持つ. 情報集合 $I_{1.1}$ 上の行動戦略 = $\mathcal{P}(B_1) \ni \vec{q} = (q_1, q_2)$, ただし, $B_1 = \{\alpha, \beta\}$. 情報集合 $I_{1.2} = \{(1.2)\}$ 上の行動戦略 = 単位分布 (確率 1 で選択枝 1 を選択する). 純粋戦略セット: $S_1 = \{(\alpha, 1), (\beta, 1)\}$, 混合戦略 = $\mathcal{P}(S_1) \ni \vec{q} = (q_1, q_2)$.

(このゲームの場合, 混合戦略と情報集合 (1.1) 上の行動戦略が同じ確率分布で表わされることに注意されたい.)

¶ プレイヤー 2: ひとつの情報集合: $I_{2.1} = \{(2.1), (2.2), (2.3)\}$ のみを持つ, 時刻 $T = 2$ における手番を上から順に (2.1), (2.2), (2.3) とする. 図では手番 (2.2), (2.3) は省略してある. 純粋戦略セット: $S_2 = \{\alpha, \beta\}$, 混合戦略 = 行動戦略 = 情報集合 $I_{2.1}$ 上の行動戦略 = $\mathcal{P}(S_2) \ni \vec{r} = (r_1, r_2)$. なお, 白丸 (○) は output である. 時刻 $T = 3$ で必ずどれかひとつの output に達して各プレイヤーの利得が定まる. ここで確認しておくが, このゲームツリーと output および「自然」が選択した所与の確率はすべてのプレイヤーの共有知識であることを忘れてはならない.

スタンダードな展開形ゲームの考え方では時刻 $T = 0$ の時点におけるプレイヤー 1 の期待利得 $u_1^{(0)}$ とプレイヤー 2 の期待利得 $u_2^{(0)}$ に対して Nash 均衡戦略を求める. すなわち, プレイヤー 1 の戦略 $\vec{q} \in \mathcal{P}(S_1) = \mathcal{P}(B_1)$, プレイヤー 2 の戦略 $\vec{r} \in \mathcal{P}(S_2)$, に対してプレイヤー 1, 2 の期待利得をそれぞれ $u_1^{(0)}(\vec{q}, \vec{r})$, $u_2^{(0)}(\vec{q}, \vec{r})$ とすると,

$$u_1^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}) = (p_1a_1 + p_2a_5)q_1r_1 + (p_1a_2 + p_2a_6)q_1r_2 + (p_1a_3 + p_2a_5)q_2r_1 + (p_1a_4 + p_2a_6)q_2r_2$$

$$u_2^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}) = (p_1b_1 + p_2b_5)q_1r_1 + (p_1b_2 + p_2b_6)q_1r_2 + (p_1b_3 + p_2b_5)q_2r_1 + (p_1b_4 + p_2b_6)q_2r_2.$$

従って, 混合戦略の組 (\vec{q}^N, \vec{r}^N) が Nash 均衡戦略であるための必要十分条件は次のように表わされる.

(i) $0 \leq \forall q_1 \leq 1$ に対して,

$$\begin{aligned} u_1^{(0)}(\bar{q}^N, \bar{r}^N) - u_1^{(0)}(\bar{q}, \bar{r}^N) &= p_1(q_1^N - q_1)((a_1 + a_4 - a_2 - a_3)r_1^N + (a_2 - a_4)) \\ &= p_1(q_1^N - q_1)f(r_1^N) \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

ただし,

$$f(x) \equiv (a_1 + a_4 - a_2 - a_3)x + (a_2 - a_4)$$

とおく. 条件は $p_1 > 0, a_5, a_6$ には依存していないことに注意されたい.

(ii) $0 \leq \forall r_1 \leq 1$ に対して,

$$\begin{aligned} u_2^{(0)}(\bar{q}^N, \bar{r}^N) - u_2^{(0)}(\bar{q}^N, \bar{r}) &= (r_1^N - r_1)((p_1(b_1 + b_4 - b_2 - b_3)q_1^N + p_1(b_3 - b_4) + p_2(b_5 - b_6)) \\ &= (r_1^N - r_1)g(q_1^N) \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

ただし,

$$g(x) \equiv p_1(b_1 + b_4 - b_2 - b_3)x + p_1(b_3 - b_4) + p_2(b_5 - b_6)$$

とおく.

条件不等式 (1), (2) を見れば分かる通り, 混合 Nash 均衡 $0 < q_1^N, r_1^N < 1$ はもし存在するとすれば (存在するための条件は後で示す) それぞれ $g(q_1^N) = 0, f(r_1^N) = 0$ を満たす. つまり, それぞれ線形方程式 $g(x) = 0, f(x) = 0$ の解である.

しかし, これは考えてみるとおかしい (と Aumann-Maschler [1] も指摘している). 「自然」が選択した結果を知っているプレイヤー 1 の混合 Nash 均衡戦略が何故 p_1, p_2 に依存しなければならないのだろうか. ただし, 彼らは重大なことに気がついていない. 既に指摘したように, プレイヤー 1 の混合戦略セット $\mathcal{P}(S_1)$ と行動戦略セット $\mathcal{P}(B_1)$ は確率測度の集合としては等しいが含意が異なる. プレイヤー 1 の戦略 \bar{q} を行動戦略として見るならば, プレイヤー 1 は既に情報集合 (1.1) 上にいるはずだから, 彼の期待利得 $u_1^{(1.1)}$ は $u_1^{(0)}(\bar{q}, \bar{r})$ において, $p_1 = 1, p_2 = 0$ とおいた

$$u_1^{(1.1)}(\bar{q}, \bar{r}) = a_1q_1r_1 + a_2q_1r_2 + a_3q_2r_1 + a_4q_2r_2$$

となるはずである. では, Nash 均衡戦略は 2 人のプレイヤーの期待利得 $(u_1^{(1.1)}(\bar{q}, \bar{r}), u_2^{(0)}(\bar{q}, \bar{r}))$ の間で考えるべきであろうか?! しかしながら, Aumann-Maschler は指摘していないが, この期待利得はプレイヤー 2 との共有知識ではない. 何故ならば, プレイヤー 2 はプレイヤー 1 が情報集合 (1.1) に達した, ということを知らされていないからである. つまり, Aumann-Maschler はしきりに議論しているが, 共有知識ではない 2 人のプレイヤーの期待利得 $(u_1^{(1.1)}(\bar{q}, \bar{r}), u_2^{(0)}(\bar{q}, \bar{r}))$ に対する最適応答や Nash 均衡を議論することはもともと出

来ない、してはいけないのである。これはプレイヤー 1 の混合戦略と行動戦略の原理的違いを無視しているからであり、ちょっとした工夫ではあるが、本稿では展開形ゲームのゲームツリーとして従来のスタンダードな表記法に代えてダミーの手番をひとつ付け加えた理由である。

ここに来て気づくことは、少なくとも Aumann-Maschler の例については、そもそも Nash 均衡分析が不適切なのではないだろうか、ということである。スタンダードな非協力ゲーム理論ではすべての分析はまず Nash 均衡を求めることから始まる。その上で複数の Nash 均衡が存在した場合にそれらの中でより妥当な Nash 均衡はどれか (Nash 均衡の精緻化) という議論に進む。Aumann-Maschler([1] の論文でも (p.56 ↓ 9): “Under these conditions, the use of the equilibrium strategies does not seem reasonable.” と述べている。

一方すでに指摘したように、Maximin 戦略は相手の利得表を知ること無く、自分の利得表のみに基いて計算することが出来る³。従って、まず、時刻 $T = 0$ におけるプレイヤー 1 の Maximin 戦略を求めてみよう。Maximin 戦略を求めるためにはまず、次式で定義されるプレイヤー 1 の想定値 $v_1^{(0)}$ (ノイマン・モルゲンシュテルンのゼロサムゲームの場合には、ゲームの値と呼ばれている) を求める必要がある。

$$\begin{aligned} v_1^{(0)} &= \text{Max}\{\text{Min}\{u_1^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}); \vec{r}\}; \vec{q}\} \\ &= \text{Max}\{f_1(q_1) \wedge f_2(q_1); 0 \leq q_1 \leq 1\}. \end{aligned}$$

ここで、

$$f_1(x) = p_1(a_1 - a_3)x + p_1a_3 + p_2a_5, \quad f_2(x) = p_1(a_2 - a_4)x + p_1a_4 + p_2a_6.$$

このときのプレイヤー 1 の Maximin 戦略とは次式で定義される $\mathcal{P}(S_1)$ の部分集合 $M_1^{(0)}$ に属する要素のことである。

$$M_1^{(0)} \equiv \{\vec{q}^* \in \mathcal{P}(S_1); v_1^{(0)} = \text{Min}\{u_1^{(0)}(\vec{q}^*, \vec{r}); \vec{r}\}\}.$$

Definition 1. $v_1^{(0)}$ をプレイヤー 1 の想定値、 $M_1^{(0)}$ の要素を時刻 $T = 0$ におけるプレイヤー 1 の Maximin 戦略 という。

さて、自然が選択肢 α を選ぶとプレイヤー 1 はプレイを始めるわけであるが、その時彼はその時点における自分の利得表を知ることが出来るから、その時点における Maximin 戦略を求めることが出来る。時刻 $T = 1$ の時点において、プレイヤー 1 が情報集合 (1.1)

³つまり、Nash 均衡概念と違って、相手が合理的に判断してくることを期待しなくてもよい。詳細は河野 ([9]) を参照されたい。

上にいて, 期待利得 $u_1^{(1.1)}(\vec{q}, \vec{r})$ を知っている時の Maximin 戦略を定義しよう.

$$\begin{aligned} v_1^{(1.1)} &= \text{Max}\{\text{Min}\{u_1^{(1.1)}(\vec{q}, \vec{r}); \vec{r}\}; \vec{q}\} \\ &= \text{Max}\{(a_1q_1 + a_3q_2) \wedge (a_2q_1 + a_4q_2); \vec{q}\} \\ &= \text{Max}\{((a_1 - a_3)q_1 + a_3) \wedge ((a_2 - a_4)q_1 + a_4); 0 \leq q_1 \leq 1\} \\ &= \text{Max}\{f_1^{(1.1)}(q_1) \wedge f_2^{(1.1)}(q_1); 0 \leq q_1 \leq 1\} \end{aligned}$$

ここで,

$$f_1^{(1.1)}(x) = (a_1 - a_3)x + a_3, \quad f_2^{(1.1)}(x) = (a_2 - a_4)x + a_4$$

とおく.

$$M_1^{(1.1)} \equiv \{\vec{q}^* \in \mathcal{P}(B_1); v_1^{(1.1)} = \text{Min}\{u_1^{(1.1)}(\vec{q}^*, \vec{r}); \vec{r}\}\}.$$

Definition 2. $v_1^{(1.1)}$ をプレイヤー 1 の情報集合 (1.1) 上の想定値, $M_1^{(1.1)}$ の要素をプレイヤー 1 の, 情報集合 (1.1) 上の Maximin 戦略という.

この場合, プレイヤー 1 の Maximin 戦略は「自然」が選択を行った後に定義出来たことに注意されたい. これに反して Nash 均衡戦略はすべてのプレイヤーの利得表が共有知識になっている必要があり, かつ「自然」が選択を行う前の, 展開形ゲームの始まりの時点における分析結果であるからこの点においても Nash 均衡概念と Maximin 原理とは原理的に異なる.

次に, プレイヤー 2 の Maximin 戦略を求める. このゲームの場合, プレイヤー 2 には情報集合は一つしかないことに注意. プレイヤー 2 は何も情報を知らされないまま選択を迫られるから非協力ゲームの場合とまったく同様である. ただし, 「自然」による選択確率 $0 < p_1 < 1$ は所与とする.

プレイヤー 2 の Maximin 戦略における想定値 $v_2^{(0)}$ は次のように定義される.

$$v_2^{(0)} = \text{Max}\{\text{Min}\{u_2^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}); \vec{q}\}; \vec{r}\} = \text{Max}\{g_1(r_1) \wedge g_2(r_1); 0 \leq r_1 \leq 1\}$$

ここで,

$$g_1(x) = (p_1(b_1 - b_2) + p_2(b_5 - b_6))x + p_1b_2 + p_2b_6,$$

$$g_2(x) = (p_1(b_3 - b_4) + p_2(b_5 - b_6))x + p_1b_4 + p_2b_6$$

とおく.

プレイヤー 2 の Maximin 戦略もプレイヤー 1 の場合と同様に定義される. すなわち,

$$M_2^{(0)} \equiv \{\vec{r}^* \in \mathcal{P}(S_2); v_2^{(0)} = \text{Min}\{u_2^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}^*); \vec{q}\}\}.$$

すべてのプレイヤーがそれぞれ Maximin 戦略を選択したと仮定すると、実際にゲームがプレイされて実現する利得は想定値とは当然異なる可能性がある。従って、想定値とは別に次のような実現値が定義出来る。

Definition 3. プレイヤー 1 の Maximin 戦略 $\bar{q}^* \in M_1^{(0)}$ とプレイヤー 2 の Maximin 戦略 $\bar{r}^* \in M_2^{(0)}$ に対して、 $v_1^{(0)*} \equiv u_1^{(0)}(\bar{q}^*, \bar{r}^*)$ をプレイヤー 1 の $T=0$ に於ける**実現値**、 $v_2^{(0)*} \equiv u_2^{(0)}(\bar{q}^*, \bar{r}^*)$ をプレイヤー 2 の $T=0$ に於ける**実現値**という。

同様にして、プレイヤー 1 の情報集合 (1.1) 上の Maximin 戦略 $\bar{q}^* \in M_1^{(1.1)}$ とプレイヤー 2 の Maximin 戦略 $\bar{r}^* \in M_2^{(0)}$ に対して、 $v_1^{(1.1)*} \equiv u_1^{(1.1)}(\bar{q}^*, \bar{r}^*)$ をプレイヤー 1 の、情報集合 (1.1) 上での**実現値**、 $v_2^{(1.1)*} \equiv u_2^{(0)}(\bar{q}^*, \bar{r}^*)$ をプレイヤー 2 の情報集合 (1.1) 上での**実現値**という。

Remark 1. 想定値は定義上一意に定まるが、Maximin 戦略は必ずしも唯一つとは限らない。従って、**最良の実現値** $v^{**} = \text{Max}\{v^*; M_1 \times M_2\}$ を各実現値に対して定義することが出来る。河野 ([9]) を参照されたい。なお、一般に $v \leq v^* \leq v^{**}$ であるが最良の実現値がすべてのプレイヤーに対して同時に実現できるとは限らない (実現できないゲームもある。例えば、(3.2) の最後通牒ゲームの場合がそうである)。

このゲームの場合、標準形に直すと 2×2 の 2 人ゲームとなるから、Nash 均衡が有限個の場合は 1 個 (純粋戦略または混合戦略) または 3 個 (2 個の純粋戦略と 1 個の混合戦略) に限られる。Nash 均衡戦略の精緻化という場合は複数の Nash 均衡戦略の中からよりましな、尤もらしい Nash 均衡戦略はどれか、という発想で研究されている。例えば、perfect equilibrium にしろ、proper equilibrium にしろ、少なくともひとつは存在することが保証されている。逆に言うと、Nash 均衡戦略が混合 Nash 均衡ただ一つの場合は、存在が保証されているすべての Nash 均衡の精緻化の条件を満たしている尤もらしい Nash 均衡戦略である、ということになる。一方、Maximin 原理による想定値は定義上一意に決まるから、利得の値の分類に際して境界値を除いて Maximin 戦略は一意に定まる。そこで、Nash 均衡戦略が混合 Nash 均衡唯一つの場合に Maximin 戦略によって得られる各プレイヤーの実現値と混合 Nash 均衡戦略によって得られる期待利得を比較してみる。

Lemma 1. 混合 Nash 均衡を持つための必要十分条件は $f(0) \cdot f(1) < 0$ かつ $g(0) \cdot g(1) < 0$ となるときである。

Lemma 2. Nash 均衡戦略が混合 Nash 均衡唯一つであるための必要十分条件は (1) $f(0) > 0, f(1) < 0, g(0) < 0, g(1) > 0$ または (2) $f(0) < 0, f(1) > 0, g(0) > 0, g(1) < 0$ を満たすときである。

プレイヤー 1 の混合 Nash 均衡戦略 $\bar{q}^N = (q_1^N, q_2^N)$ は $g(q_1^N) = 0$ 、プレイヤー 2 の混合 Nash 均衡戦略 $\bar{r}^N = (r_1^N, r_2^N)$ は $f(r_1^N) = 0$ 、を満たさなければならないから、これらの一

次方程式を解いて,

$$q_1^N = \frac{p_1(b_4 - b_3) + p_2(b_6 - b_5)}{p_1(b_1 + b_4 - b_2 - b_3)}, \quad r_1^N = \frac{a_4 - a_2}{a_1 + a_4 - a_2 - a_3}$$

が得られる. この混合 Nash 均衡戦略をよく見ると, Aumann-Maschler が指摘するように, プレイヤー 1 の Nash 均衡戦略は彼がたとえ, 情報集合 (1.1) に達して「自然」が選択した結果を知っていても (つまり, $p_1 = 1$) 彼の Nash 均衡戦略は所与の p_1, p_2 に依存したままなのである.

さて, この時の各プレイヤーの利得 $u_1^{(0)}(\vec{q}^N, \vec{r}^N), u_2^{(0)}(\vec{q}^N, \vec{r}^N)$ はそれぞれ次のようになる.

$$u_1^{(0)}(\vec{q}^N, \vec{r}^N) = \frac{p_1(a_1a_4 - a_2a_3) + p_2(a_5(a_4 - a_2) + a_6(a_1 - a_3))}{a_1 + a_4 - a_2 - a_3},$$

$$u_2^{(0)}(\vec{q}^N, \vec{r}^N) = \frac{p_1(b_1b_4 - b_2b_3) + p_2(b_5(b_4 - b_2) + b_6(b_1 - b_3))}{b_1 + b_4 - b_2 - b_3}.$$

次に, 彼らが Maximin 戦略を採用したときの実現値を計算してみる. Maximin 戦略が混合戦略となるのは次の場合である.

Lemma 3. プレイヤー 1 が唯一の混合 Maximin 戦略を持つための必要十分条件は $f(0) \cdot f(1) < 0$ かつ $(f_1(0) - f_2(0)) \cdot (f_1(1) - f_2(1)) < 0$ となるときであり, Maximin 戦略 $\vec{q}^* = (q_1^*, q_2^*)$ は

$$q_1^* = \frac{p_1(a_4 - a_3) + p_2(a_6 - a_5)}{p_1(a_1 + a_4 - a_2 - a_3)}$$

である.

Lemma 4. プレイヤー 2 が唯一の混合 Maximin 戦略を持つための必要十分条件は $g(0) \cdot g(1) < 0$ かつ $(g_1(0) - g_2(0)) \cdot (g_1(1) - g_2(1)) < 0$ となるときであり, Maximin 戦略 $\vec{r}^* = (r_1^*, r_2^*)$ は

$$r_1^* = \frac{b_4 - b_2}{b_1 + b_4 - b_2 - b_3}$$

である.

このとき, 河野 ([9]) で Aumann-Maschler Paradox と呼んでいる次の事実が起こる.

Theorem 1. Lemma 3, 4 の状況の下で, Maximin 戦略による実現値に関して次の等式が成り立つ. ([9], 定理 5)

$$v_1^{(0)} = v_1^{(0)*} \equiv u_1^{(0)}(\vec{q}^*, \vec{r}^*) = u_1^{(0)}(\vec{q}^N, \vec{r}^N), \quad v_2^{(0)} = v_2^{(0)*} \equiv u_2^{(0)}(\vec{q}^*, \vec{r}^*) = u_2^{(0)}(\vec{q}^N, \vec{r}^N).$$

さらに, $\vec{q}^N \neq \vec{q}^*$ ならば, 必ず $\vec{r} \in \mathcal{P}(S_2)$ が存在して, $v_1^{(0)} > u_1^{(0)}(\vec{q}^N, \vec{r})$ となる (河野 [9],

定理 4). プレイヤー 2 の混合 Nash 均衡戦略の場合も同様の命題が成り立つ. つまり, この場合の Nash 均衡は Maximin 戦略と一致しなければ必ず $v_1^{(0)}$ を下回る期待利得しか得られない可能性があるというリスクを伴っていることを意味するのに対して推定値 $v_1^{(0)}$ は Maximin 戦略を採用することによってリスクなしに実現可能な利得なのである. それでも Nash 均衡戦略の方が Maximin 戦略より合理的選択だと言えるであろうか.

Theorem 2. さらに, プレイヤー 1 が情報集合 (1.1) 上に達したときのプレイヤー 1 の Maximin 戦略とその実現値は Theorem 1 の結果において $p_1 = 1$ として得られる.

Aumann-Maschler([1]) がすでに指摘しているように, Nash 均衡の場合, 自分が Nash 均衡戦略を選択しても相手が Nash 均衡戦略から逸脱していると, 期待利得が Nash 均衡戦略によって得られる利得よりも下回る場合が有り得るのに対して, Maximin 戦略の場合, 自分が Maximin 戦略を採用している限り, 相手が必ずしも彼の Maximin 戦略を採用していなくても得られる期待利得は想定値 $v_n^{(0)}$ ($n = 1, 2$) を下回ることには決していない. さらに, Nash 均衡概念による分析ではプレイヤー 1 が情報集合 (1.1) に達したときの分析は出来ないのに対して, Maximin 原理による分析ではその情報を反映した結果 (Theorem 2) が得られる. 結論として, Nash 均衡分析とは原理的に異なる Maximin 原理に基づく分析も展開形のゲーム理論において有効な分析概念であると言えるのではないだろうか.

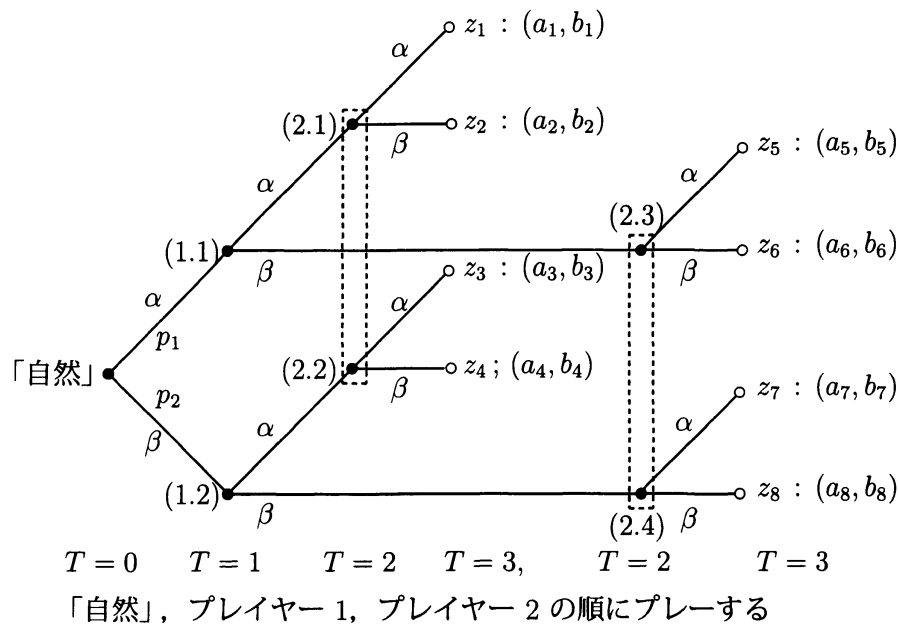
なお, 上記以外の場合については Nash 均衡戦略や Maximin 戦略は必ずしも混合戦略とは限らない. また, 時刻 $T = 0$ において, Nash 均衡戦略によって得られる期待利得と Maximin 戦略の実現値との大小関係は一概には言えない. しかし, Maximin 戦略と一致しない Nash 均衡戦略による期待利得が Maximin 戦略の想定値を下回らない場合は必ずリスクを伴う戦略であるが, Maximin 戦略の想定値はリスクなしに得られることが保証された期待利得である, という事実は一般に成立する (河野 [9], 定理 4 および注意 3 と 4).

(3-3) シグナリング・ゲーム

次に, 自明な完全情報を持つ信憑性のない脅しゲームや若干病理的ではないかと思われる Aumann-Maschler のゲームではなく, かつ標準形ゲームとは明かに含意の異なる典型的な展開形ゲームとして, 次のようないわゆるシグナリング・ゲームについて検討しよう.

このゲームは自明に完全記憶ゲーム (各プレイヤーは一度しかプレイしないから) だから, Kuhn の定理 ([10]) によって, Nash 均衡戦略は混合戦略で定義することと行動戦略で定義することは同値である. よって, 本稿では以後行動戦略を用いて説明する. なお, 岡田の教科書 ([13]) では最初から行動戦略で Nash 均衡戦略を定義してある. 標準形に直すと 4×4 の bimatrix game となり, 混合戦略のパラメータの数は各プレイヤーについて 3 個であるが, 行動戦略で記述すると 2 個であるから, 行動戦略で表現, 定義する方が見通しがよいし, 応用上の含意も理解しやすい.

ゲームの構造は次の通りである。



¶ 「自然」：選択枝の集合： $S_0 = \{\alpha, \beta\}$ ， $\mathcal{P}(S_0) \ni \bar{p} = p_1\alpha + p_2\beta$ は所与。ただし， $0 < p_1 < 1$ を仮定する。

¶ プレイヤー 1：2つの情報集合： $I_{1.1} = \{(1.1)\}$ と $I_{1.2} = \{(1.2)\}$ を持つ。情報集合 $I_{1.1}$ 上の行動戦略 $= \mathcal{P}(B_{11}) \ni \bar{q} = q_1\alpha + q_2\beta$ ，情報集合 $I_{1.2}$ 上の行動戦略 $= \mathcal{P}(B_{12}) \ni \bar{r} = r_1\alpha + r_2\beta$ ，ただし， $B_{11} = B_{12} = \{\alpha, \beta\}$ 。純粋戦略セット： $S_1 = B_{11} \times B_{12}$ ，混合戦略 $= \mathcal{P}(S_1)$ 。

¶ プレイヤー 2：2つの情報集合： $I_{2.1} = \{(2.1), (2.2)\}$ と $I_{2.2} = \{(2.3), (2.4)\}$ を持つ。情報集合 $I_{2.1}$ 上の行動戦略 $= \mathcal{P}(B_{21}) \ni \bar{s} = s_1\alpha + s_2\beta$ ，情報集合 $I_{2.2}$ 上の行動戦略 $= \mathcal{P}(B_{22}) \ni \bar{t} = t_1\alpha + t_2\beta$ ，ただし， $B_{21} = B_{22} = \{\alpha, \beta\}$ 。純粋戦略セット： $S_2 = B_{21} \times B_{22}$ ，混合戦略 $= \mathcal{P}(S_2)$ 。

白丸 (○) は output である。時刻 $T = 3$ で必ずどれかひとつの output に達して各プレイヤーの利得が定まる。ここで確認しておくが、このゲームツリーと output および「自然」が選択した所与の確率はすべてのプレイヤーの共有知識である。

シグナリング・ゲームには少なくとも二つの重要なタイプの違いがあると思われる。つまり、

(1) プレイヤー 1 は正しくシグナルをプレイヤー 2 に伝えることが目的で、正しくシグナルが伝達できたときは双方にとって利得が高い、という場合。標準形でいえば調整ゲーム、あるいは多少のコンフリクトがある場合は男女の争い型ゲームとなる場合である。逆に、

(2) シグナル, 例えば自分の弱点等, 相手に正しく伝わっては困る場合. この場合は当然シグナル伝達の結果の利得は相反する. 従って, プレイヤー 1 の立場に立った場合は, 明かに, 常に同じシグナルを出すか (一括戦略という), ランダムな混合戦略をとる必要がある.

ところが, 多くの教科書でシグナリング・ゲームの含意は十分には説明してなく, かなり形式的にいわゆる完全ベイジアン均衡を説明するための簡単な example としての扱いしかしていないように思われる.

いづれにしろシグナリング・ゲームで混合戦略について詳しく考察してある教科書を見つけることが出来なかった. なお, 分離戦略の場合はそれを見たプレイヤー 2 はシグナルを判別してしまうから具合が悪いような記述もあるが, 上記タイプ (1) の場合はプレイヤー 1 から見てプレイヤー 2 にシグナルを正しく判別して貰いたいわけだからむしろ一括戦略はナンセンスである. いづれにしろ, ゲームは原則として唯一回行われるのであって, プレイヤー 2 は「自然」が選択したシグナルの結果を知らない, というのがこのゲームの大前提である. 1 回限りのプレイの場合, 分離戦略なのか, 一括戦略なのか, はたまた混合戦略の実現値かは区別出来ない. もちろん, 分離戦略が Nash 均衡戦略になる場合は有り得る.

前述したようにこのゲームを 4×4 の bimatrix game とみて一般的に Nash 均衡戦略を求めようとすると場合分けの数が膨大となるので, 本稿ではすべての行動戦略が純粋戦略とはならない場合の数値例を与えて Nash 均衡戦略と時刻 $T = 0$ および「自然」が選択した後の時刻 $T = 1$ における Maximin 戦略とそれらの利得について比較検討してみる.

Lemma 5. 利得および初期確率 p_1 が次の関係式を満たすときはすべての行動戦略 Nash 均衡が純粋戦略である, ということはない.

$$(a-1) \ a_1 > a_5 > a_2 > a_6, \quad (a-2) \ a_8 > a_4 > a_7 > a_3,$$

$$(b-1) \ b_2 > b_1, \quad (b-2) \ b_7 > b_8, \quad (b-3) \ b_3 > b_4, \quad (b-4) \ b_6 > b_5,$$

$$(p-1) \ b_3 - b_4 > (b_2 - b_1 + b_3 - b_4)p_1,$$

$$(p-2) \ b_7 - b_8 < (b_6 - b_5 + b_7 - b_8)p_1.$$

証明は丁寧に場合を分けてチェックすれば初等的に出来る.

以下では, Lemma 5 の条件を満たす次のような数値例について検討を行う.

$$(a) \ a_1 = 4, \ a_2 = 2, \ a_3 = -3, \ a_4 = -1, \ a_5 = 3, \ a_6 = 1, \ a_7 = -2, \ a_8 = 0,$$

$$(b) \ b_1 = 1, \ b_2 = 2, \ b_3 = 3, \ b_4 = 0, \ b_5 = 1, \ b_6 = 4, \ b_7 = 1, \ b_8 = 0,$$

$$(p) \ 1/4 < p_1 < 3/4.$$

Remark 2. Lemma 5 の条件が満たされているゲームにおいてはプレイヤー 1 の Nash 均衡行動戦略はかならず混合戦略となり、従って、Nash 均衡の精緻化である完全ベイジアン均衡という概念は有効性を持たない（新しい知見は何も得られない）。

さて、スタンダードな展開形ゲームの考え方では時刻 $T = 0$ の時点におけるプレイヤー 1 の期待利得 $u_1^{(0)}$ とプレイヤー 2 の期待利得 $u_2^{(0)}$ に対して Nash 均衡戦略を求める。すなわち、

$$\text{プレイヤー 1 の行動戦略: } \vec{q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{P}(B_{11}), \vec{r} = (r_1, r_2) \in \mathcal{P}(B_{12}),$$

$$\text{プレイヤー 2 の行動戦略: } \vec{s} = (s_1, s_2) \in \mathcal{P}(B_{21}), \vec{t} = (t_1, t_2) \in \mathcal{P}(B_{22})$$

に対して、プレイヤー 1 と 2 の期待利得をそれぞれ $u_1^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}; \vec{s}, \vec{t})$, $u_2^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}; \vec{s}, \vec{t})$ とすると、

$$u_1^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}; \vec{s}, \vec{t}) = p_1 q_1 (4s_1 + 2s_2) + p_1 q_2 (3t_1 + t_2) - p_2 r_1 (3s_1 + s_2) - 2p_2 r_2 t_1,$$

$$u_2^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}; \vec{s}, \vec{t}) = p_1 q_1 (s_1 + 2s_2) + p_1 q_2 (t_1 + 4t_2) + 3p_2 r_1 s_1 + p_2 r_2 t_1.$$

Nash 均衡を求める際の際の元になる最適応答は各行動戦略毎に選択できるから、プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の行動戦略の組 $((q_1^N, q_2^N), (r_1^N, r_2^N))$ と $((s_1^N, s_2^N), (t_1^N, t_2^N))$ が Nash 均衡であるための必要十分条件は次の関係式を満たすことである。

$$(i-1) \quad 0 \leq \forall q_1 \leq 1 \text{ に対して, } (q_1^N - q_1) f_1(s_1^N, t_1^N) \geq 0,$$

$$\text{ここで, } f_1(x, y) \equiv 2x - 2y + 1.$$

$$(i-2) \quad 0 \leq \forall r_1 \leq 1 \text{ に対して, } (r_1^N - r_1) f_2(s_1^N, t_1^N) \geq 0,$$

$$\text{ここで, } f_2(x, y) \equiv -2x + 2y - 1.$$

$$(ii-1) \quad 0 \leq \forall s_1 \leq 1 \text{ に対して, } (s_1^N - s_1) g_1(q_1^N, r_1^N) \geq 0,$$

$$\text{ここで, } g_1(x, y) \equiv -p_1 x + 3p_2 y.$$

$$(ii-2) \quad 0 \leq \forall t_1 \leq 1 \text{ に対して, } (t_1^N - t_1) g_2(q_1^N, r_1^N) \geq 0,$$

$$\text{ここで, } g_2(x, y) \equiv -3p_1(1 - x) + p_2(1 - y).$$

これらの関係式を解いて得られるプレイヤー 1 の Nash 均衡戦略 (q_1^N, r_1^N) とプレイヤー 2 の Nash 均衡戦略 (s_1^N, t_1^N) は次のようになる。

$$q_1^N = \frac{12p_1 - 3}{8p_1}, \quad r_1^N = \frac{4p_1 - 1}{8p_2}, \quad (s_1^N, t_1^N) \text{ such that } t_1^N = s_1^N + \frac{1}{2}, \quad (0 \leq s_1^N \leq 1/2).$$

Remark 3. プレイヤー 1 の行動戦略は一組の混合戦略であるが、プレイヤー 2 はそうではないから結局 Nash 均衡戦略の組は無数個（連続濃度）存在する。ただし、プレイヤー 2 については一方の行動戦略は純粋戦略を取り得る。しかし、Lemma 5 が示すように両方とも純粋戦略になることはない。ということも意味している。

Nash 均衡にあるときの利得はそれぞれ次のようになる。

$$u_1^{(0)}(\bar{q}^N, \bar{r}^N; \bar{s}^N, \bar{t}^N) = 2(2p_1 - 1)s_1^N + 3p_1 - 1, \quad u_2^{(0)}(\bar{q}^N, \bar{r}^N; \bar{s}^N, \bar{t}^N) = p_1 + 3/4.$$

Remark 4. Nash 均衡戦略にあるときのプレイヤー 1 の利得はプレイヤー 2 の戦略に依存して決まる。また、そのとき期待し得る最大値は $p_1 \leq 1/2$ の場合は $s_1^N = 0$ のときで、 $u_1^{(0)} = 3p_1 - 1$ であり、 $p_1 \geq 1/2$ の場合は $s_1^N = 1/2$ のときで、 $u_1^{(0)} = 5p_1 - 2$ である。

さて、次に時刻 $T = 0$ におけるプレイヤー 1 とプレイヤー 2 の Maximin 戦略を求めよう。そのためには $T = 0$ におけるプレイヤー 1 の想定値 $v_1^{(0)}$ とプレイヤー 2 の想定値 $v_2^{(0)}$ を求める。

$$\begin{aligned} v_1^{(0)} &= \text{Max}\{\text{Min}\{u_1^{(0)}(\bar{q}, \bar{r}; \bar{s}, \bar{t}); (\bar{s}, \bar{t})\}; (\bar{q}, \bar{r})\} \\ &= \text{Max}\{\{\text{Min}\{(4p_1q_1 - 3p_2r_1)s_1 + (2p_1q_1 - p_2r_1)s_2 + (3p_1q_2 - 2p_2r_2)t_1 + p_1q_2t_2; \bar{s}, \bar{t}\}; \bar{q}, \bar{r}\} \\ &= \text{Max}\{(4p_1q_1 - 3p_2r_1) \wedge (2p_1q_1 - p_2r_1) + (3p_1q_2 - 2p_2r_2) \wedge p_1q_2; \bar{q}, \bar{r}\}. \end{aligned} \quad (3)$$

このときのプレイヤー 1 の $T = 0$ における Maximin 戦略とは次式で定義される $\mathcal{P}(B_{11}) \times \mathcal{P}(B_{12})$ の部分集合 $M_1^{(0)}$ に属する要素のことである。

$$M_1^{(0)} \equiv \{(\bar{q}^*, \bar{r}^*) \in \mathcal{P}(B_{11}) \times \mathcal{P}(B_{12}); v_1^{(0)} = \text{Min}\{u_1^{(0)}(\bar{q}^*, \bar{r}^*; \bar{s}, \bar{t}); (\bar{s}, \bar{t})\}\}.$$

式 (3) を解くには場合を分けて考える必要がある。 p_1q_1 と p_2r_1 をパラメーターとして場合分けすると考えやすい。最終的には $p_1 \geq 1/2$ の場合と $p_1 \leq 1/2$ の場合に分ける必要がある。すなわち、

Theorem 3.

$$(I) \quad p_1 \leq 1/2 \text{ のとき, } v_1^{(0)} = 5p_1 - 2, \quad M_1^{(0)} = \{(\bar{q}^*, \bar{r}^*); p_1q_1^* = p_2r_1^*\}.$$

$$(II) \quad p_1 \geq 1/2 \text{ のとき, } v_1^{(0)} = 3p_1 - 1, \quad M_1^{(0)} = \{(\bar{q}^*, \bar{r}^*); p_1q_1^* = p_2r_1^* + p_1 - p_2\}.$$

プレイヤー 2 の想定値 $v_2^{(0)}$ と Maximin 戦略もプレイヤー 1 の場合と同様に求められる。すなわち、プレイヤー 2 の時刻 $T = 0$ における想定値 $v_2^{(0)}$ は

$$\begin{aligned} v_2^{(0)} &= \text{Max}\{\text{Min}\{u_2^{(0)}(\bar{q}, \bar{r}; \bar{s}, \bar{t}); (\bar{q}, \bar{r})\}; (\bar{s}, \bar{t})\} \\ &= \text{Max}\{\text{Min}\{p_1(s_1 + 2s_2)q_1 + p_1(t_1 + 4t_2)q_2 + 3p_2s_1r_1 + p_2t_1r_2; (\bar{q}, \bar{r})\}; (\bar{s}, \bar{t})\}. \\ &= \text{Max}\{p_1(s_1 + 2s_2) \wedge p_1(t_1 + 4t_2) + 3p_2s_1 \wedge p_2t_1; (\bar{s}, \bar{t})\}. \end{aligned} \quad (4)$$

このときのプレイヤー 2 の $T = 0$ における Maximin 戦略とは次式で定義される $\mathcal{P}(B_{21}) \times \mathcal{P}(B_{22})$ の部分集合 $M_2^{(0)}$ に属する要素のことである。

$$M_2^{(0)} \equiv \{(\bar{s}^*, \bar{t}^*) \in \mathcal{P}(B_{21}) \times \mathcal{P}(B_{22}); v_2^{(0)} = \text{Min}\{u_2^{(0)}(\bar{q}, \bar{r}; \bar{s}^*, \bar{t}^*); (\bar{q}, \bar{r})\}\}.$$

プレイヤー 1 のときと同様に、式 (4) を解くと次の定理が得られる。

Theorem 4.

$$v_2^{(0)} = p_1 + 3/4, \quad M_2^{(0)} = \{s_1^{(0)*} = 1/4, t_1^{(0)*} = 3/4\}.$$

Remark 5. Nash 均衡戦略の場合とは逆に、Maximin 戦略に関してはプレイヤー 1 が無限個の Maximin 戦略を持ち、プレイヤー 2 の Maximin 戦略は唯一組である。

すべてのプレイヤーがそれぞれ Maximin 戦略を選択したと仮定すると、実際にゲームがプレイされて実現する利得は想定値とは当然異なる可能性がある。従って、想定値とは別に次のような実現値が定義出来る。

Definition 4. $T = 0$ に於けるプレイヤー n ($n = 1, 2$) の実現値 $v_n^{(0)*}$ とは

$$v_n^{(0)*} = u_n^{(0)}(\bar{q}^*, \bar{r}^*; \bar{s}^*, \bar{t}^*), \quad (\bar{q}^*, \bar{r}^*) \in M_1^{(0)}, \quad (\bar{s}^*, \bar{t}^*) \in M_2^{(0)}$$

のことである。

Maximin 戦略の定義から一般に $v_n^{(0)} \leq v_n^{(0)*}$ であるが、真に不等号の場合もある。その場合、プレイヤー n は予期せぬ結果であるということにする。予期せぬ結果は常にそのプレイヤーにとって好ましい結果である。Maximin 原理を採用しているから、予期せぬ悪い結果は当然、絶対に起らない。

さて、すでに Nash 均衡戦略と $T = 0$ に於ける両プレイヤーの Maximin 戦略を求めたから、Nash 均衡戦略によって得られる利得 $u_n^{(0)}(\bar{q}^N, \bar{r}^N; \bar{s}^N, \bar{t}^N)$, ($n = 1, 2$) と Maximin 戦略による $T = 0$ に於ける実現値 $v_n^{(0)*}$, ($n = 1, 2$) を比較してみよう。(計算は容易だから省略する)

Theorem 5.

$$(N-1) u_1^{(0)}(\bar{q}^N, \bar{r}^N; \bar{s}^N, \bar{t}^N) = 2(2p_1 - 1)s_1^N + 3p_1 - 1, \quad (0 \leq s_1^N \leq 1/2).$$

$$(N-2) u_2^{(0)}(\bar{q}^N, \bar{r}^N; \bar{s}^N, \bar{t}^N) = p_1 + 3/4.$$

$$\bar{q}^*, \bar{r}^* \in M_1^{(0)}, \quad s_1^{(0)*} = 1/4, \quad t_1^{(0)*} = 3/4 \text{ に対して,}$$

$$(M-1) v_1^{(0)*} = 4p_1 - 3/2 \quad (M_1^{(0)} \text{ の要素に関係ない実現値であることに注意されたい}).$$

$$(M-2) v_2^{(0)*} = v_2^{(0)} = p_1 + 3/4.$$

Remark 6.

(1) $p_1 > 1/2$ のとき, $0 \leq s_1^N < 1/4$ の範囲で $v_1^{(0)*} > u_1^{(0)}(\bar{q}^N, \bar{r}^N; \bar{s}^N, \bar{t}^N)$ となり, $1/4 < s_1^N \leq 1/2$ の範囲で $v_1^{(0)*} < u_1^{(0)}(\bar{q}^N, \bar{r}^N; \bar{s}^N, \bar{t}^N)$ となる. $p_1 < 1/2$ のときはこの関係が逆転する. $p_1 = 1/2$ の場合は s_1^N の値に関わらず両者および $v_1^{(0)}$ とが一致し, 従って, $s_1^N \neq 1/4$ の場合は, 河野 ([9]) で定義した Aumann-Maschler Paradox が発生している. つまり, Nash 均衡戦略を採用した場合はリスクを負うが Maximin 戦略の場合はリスクを負わないにも関わらずプレイヤー 1 の想定値 $v_1^{(0)}$ と Nash 均衡戦略による期待利得は等しい.

(2) $v_2^{(0)} = u_2^{(0)}(\bar{q}^N, \bar{r}^N; \bar{s}^N, \bar{t}^N)$ であることに注意されたい. 従って, $s_1^N \neq 1/4$ の場合は Aumann-Maschler Paradox が発生している.

次に, 時間が経過してプレイヤー 1 が情報集合 $I_{1.1}$ または $I_{1.2}$ に達した時に, プレイヤー 1 が Maximin 戦略を練り直した場合を考察する.

(I-1.1): プレイヤー 1 が情報集合 $I_{1.1}$ 上に居るとき. この時点で彼が認識できる output は z_1, z_2, z_5, z_6 である. 従って, 彼の期待利得 $u_1^{I_{1.1}}(\bar{q}; \bar{s}, \bar{t})$ は

$$u_1^{I_{1.1}}(\bar{q}; \bar{s}, \bar{t}) = 4q_1s_1 + 2q_1s_2 + 3q_2t_1 + q_2t_2$$

だから,

$$\begin{aligned} v_1^{I_{1.1}} &= \text{Max}\{\text{Min}\{u_1^{I_{1.1}}(\bar{q}; \bar{s}, \bar{t}); \bar{s}, \bar{t}\}; \bar{q}\} \\ &= \text{Max}\{4q_1 \wedge 2q_1 + 3q_2 \wedge q_2; \bar{q}\} \\ &= \text{Max}\{2q_1 + q_2; \bar{q}\} = 2. \end{aligned}$$

また, Maximin 戦略は次のような集合となる.

$$M_1^{I_{1.1}} \equiv \{\bar{q}^* \in \mathcal{P}(B_{11}); v_1^{I_{1.1}} = \text{Min}\{u_1^{I_{1.1}}(\bar{q}^*; \bar{s}, \bar{t}); (\bar{s}, \bar{t})\}\} = \{q_1^* = 1\}.$$

(I-1.2): プレイヤー 1 が情報集合 $I_{1.2}$ 上に居るとき. この時点で彼が認識できる output は z_3, z_4, z_7, z_8 である. 従って, 彼の期待利得 $u_1^{I_{1.2}}(\bar{r}; \bar{s}, \bar{t})$ は

$$u_1^{I_{1.2}}(\bar{r}; \bar{s}, \bar{t}) = -3r_1s_1 - r_1s_2 - 2r_2t_1$$

だから,

$$\begin{aligned} v_1^{I_{1.2}} &= \text{Max}\{\text{Min}\{u_1^{I_{1.2}}(\bar{r}; \bar{s}, \bar{t}); \bar{s}, \bar{t}\}; \bar{r}\} \\ &= \text{Max}\{(-3r_1) \wedge (-r_1) - 2r_2; \bar{r}\} \\ &= \text{Max}\{-3r_1 - 2r_2; \bar{r}\} = -2. \end{aligned}$$

また, Maximin 戦略は次のような集合となる.

$$M_1^{I_{1.2}} \equiv \{\bar{r}^* \in \mathcal{P}(B_{12}); v_1^{I_{1.2}} = \text{Min}\{u_1^{I_{1.2}}(\bar{r}^*; \bar{s}, \bar{t}); (\bar{s}, \bar{t})\}\} = \{r_1^* = 0\}.$$

ここで、プレイヤー 1 の実現値がどうなるかを考えてみよう。 $T = 1$ の時点でプレイヤー 1 は「自然」の選択の結果を知って改めて自身の Maximin 戦略を見直して新たな Maximin 戦略を策定することが出来た。しかし、プレイヤー 2 は未だ「自然」が選択した結果を知らないから、この時点でゲームの結果（実現値）を予測できるのはプレイヤー 1 のみであり、彼の実現値は、彼が情報集合 $I_{1.1}$ 上に居る場合は $v_1^{I_{1.1}*} \equiv u_1^{I_{1.1}}(\bar{q}^*; \bar{s}^*, \bar{t}^*)$; $\bar{q}^* \in M_1^{I_{1.1}}$, $(\bar{s}^*, \bar{t}^*) \in M_2^{(0)}$ であり、彼が情報集合 $I_{1.2}$ 上に居る場合は $v_1^{I_{1.2}*} \equiv u_1^{I_{1.2}}(\bar{r}^*; \bar{s}^*, \bar{t}^*)$; $\bar{r}^* \in M_1^{I_{1.2}}$, $(\bar{s}^*, \bar{t}^*) \in M_2^{(0)}$ である。これらを計算すると、

Theorem 6.

$$v_1^{I_{1.1}*} = 2s_1^{(0)*} + 2 = 5/2, \quad v_1^{I_{1.2}*} = -2t_1^{(0)*} = -3/2.$$

この結果を仔細に検討してみると、 $v_1^{I_{1.1}*}$ については $v_1^{(0)*}$ において、 $p_1 = 1$ とした値、 $v_1^{I_{1.2}*}$ については $v_1^{(0)*}$ において、 $p_1 = 0$ とした値となっており、時間経過に関して Maximin 戦略が極めて整合的で合理的な戦略であることがわかる。Nash 均衡概念はもともと時間経過を反映せず、「自然」の選択が行われる以前の合理的判断基準であったから、「自然」が選択をした後で変更することは原理的にできない。

Remark 7. さらに時間が経過してプレイヤー 2 が情報集合の一つに達したときの Maximin 戦略も考察することは出来ると思われるが、複数の手番を含む場合にそれをどう評価するか若干の問題があると思われるので今後の検討課題としたい。以上。

参考文献

- [1] Aumann, R. J. and M. Maschler, 1972. "Some Thoughts on the Minimax Principle." *Management Science*. 18(5): 54–63.
- [2] ———, 1974. "Response to Taylor's "Resolution of a Paradox: Mini-Max Rehabilitated"" *Management Science* 20(9): 1316.
- [3] Davis, M., 1974. "Some Further Thoughts on the Minimax Principle", *Management Science*, 20(9): 1305–10.
- [4] Gibbons, R., 1992. *Game Theory for Applied Economists*. Princeton University Press. 福田正夫・須田伸一訳『経済学のためのゲーム理論入門』創文社, 1995.
- [5] Gintis, H., 2009. *The Bounds of Reason*. Princeton University Press. 成田悠輔他訳『ゲーム理論による社会科学の統合』2011. N T T 出版.

- [6] 河野敬雄, 2003. 『ゲーム理論アラカルト—確率論の立場から—』 Rokko Lectures in Mathematics, No.13. 神戸大学理学部数学教室.
- [7] ———, 2011. 『ゲーム理論アラカルト—確率論の立場から— (続)』 Rokko Lectures in Mathematics, No.21. 神戸大学理学部数学教室.
- [8] ———, 2013. “自明なゲームをどう理解すべきか—ナッシュ均衡に代る合理的選択基準—” 第55回数理社会学会一般研究報告: 2013年3月19-20: 東北学院大学.
- [9] ———, 2013. 「Maximin 原理に基づくゲーム理論構築の試み」, 数理社会学会機関誌『理論と方法』54号.
- [10] Kuhn, H.W., (1953) “Extensive Games and the Problem of Information.” *Contributions to the Theory of Games*, Eds. Kuhn and Tucker, 193–216. Princeton University Press.
- [11] Nash, J.F., 1950. “Equilibrium Points in n-Person Games.” *Proceedings National Academy of Sciences, USA* 36: 48–49.
- [12] ———, 1951, “Non-cooperative Games.” *Annals of Mathematics*, 54: 286–295.
- [13] 岡田 章, 2011, 『ゲーム理論』(新版) 有斐閣.
- [14] 佐藤嘉倫, 2008, 『ゲーム理論—人間と社会の複雑な関係を解く—』新曜社.
- [15] Taylor, P. T., 1972. “Resolution of a Paradox: Mini-Max Rehabilitated”, *Management Science*, 9(4): 466–67.
- [16] von Neumann, John and Oskar Morgenstern, 1944. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press. (銀林浩, 橋本和美, 宮本敏雄監訳, 1953年の third edition の翻訳) 『ゲームの理論と経済行動 I,II,III』ちくま学芸文庫, 2009年.

Otsu-shi Hieidaira 1-18-20,

520-0016 Japan.

e-mail: kono.norio.58x@st.kyoto-u.ac.jp

Norio Kôno