数理解析研究所講究録
第 1859 巻 2013 年 31-40



# 準相対論的 Pauli-Fierz モデルの基底状態について
# On the ground state of the semi-relativistic Pauli-Fierz model

信州大学理学部数理自然情報科学科　佐々木 格
Itaru Sasaki
Department of Mathematical Sciences, Shinshu University

## 1 概要

量子系のハミルトニアン $H$ が与えられたときにそのスペクトルの下限 $\inf \mathrm{spec}(H)$ が $H$ の固有値であるときに $H$ は基底状態を持つまたは，量子系の基底状態は存在するという．以下，$\inf \mathrm{spec}(H)$ を基底状態エネルギーと呼ぶが，これは基底状態が存在することを意味しない．

一体のシュレディンガー作用素 $H^V := -\Delta + V(\mathbf{x})$ に対しては，$V$ が $-\Delta$ に対して相対コンパクトなら，基底状態の存在の問題は単純である．基底状態エネルギーを $E^V := \inf \mathrm{spec}(H^V)$ とするとき，もし不等式

$$E^V < E^0 \tag{1.1}$$

が成り立つなら $H^V$ は基底状態を持つ．ここに $E^0$ は $-\Delta$ の基底状態エネルギーであり 0 である．これは $V$ が $-\Delta$ の真性スペクトルを変えないことから直ちに導かれる．そして，変分原理より適当なベクトル $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ によって $\langle \Psi, H^V \Psi \rangle < 0$ となる事を示せば，$H^V$ の基底状態の存在が証明される．次に，$N$ 体のシュレディンガー作用素

$$H^V(N) := \sum_{j=1}^{N} (-\Delta_{\mathbf{x}_j} + V(\mathbf{x}_j)) + \sum_{i<j} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \tag{1.2}$$

を考える．これの基底状態の存在に対しては次の事が示される．$E^V(N)$ を $H^V(N)$ の基底状態エネルギーとする．$V(\mathbf{x}), W(\mathbf{x})$ は $-\Delta$ に対して相対コンパクトであるとする．こ

のとき

$$E^V(N) < \min\{E^V(N-M) + E^0(M) | M = 1, 2, \cdots, N\} \tag{1.3}$$

が成り立つならば，$H^V$ は基底状態を持つ．$E^V(N-M) - E^0(M)$ は $N$ 粒子系から $M$ 個の粒子が無限遠に飛び去るときの全系の最小エネルギーである．(1.3) は，いくつかの粒子が遠方に飛び去るときより，すべての粒子が原点付近にいる方がエネルギーが小さいという状況である．このようにして多くの量子系の基底状態の存在の問題は基底状態エネルギーに対する不等式に帰着される．(1.3) よりさらに弱い条件

$$E^V(N) < E^0(N) \tag{1.4}$$

が成り立つときに，少なくとも一つの粒子が束縛される (at least one particle is bound) と呼ぶことにする．

以下では，$N$ 個の相対論的な粒子系が量子電磁場と相互作用する系を考える．目標はその量子系に対して (1.4) に対応する不等式を証明することである．

以下で量子系の定義を与える．$N$ 粒子に対するヒルベルト空間は

$$\mathcal{H}_{\mathrm{part}} = L^2(\mathbb{R}^{3N}). \tag{1.5}$$

と定義される．$N$ 粒子はボース統計もしくはボルツマン統計に従うものとする．粒子がボース統計に従うときは (1.5) の代わりに対称化した空間 $\otimes_{\mathrm{sym}}^N L^2(\mathbb{R}^3)$ を考える．ただし，以下の議論はそれら二つの統計の取り方によらないので (1.5) だけを考える事とする．粒子の位置を $\underline{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ とする，ここに $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \cdots, N$. 量子電磁場に対するヒルベルト空間はフォック空間

$$\mathcal{H}_{\mathrm{phot}} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[ \bigotimes_{\mathrm{sym}}^{n} L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\}) \right], \tag{1.6}$$

である．ここに $\otimes_{\mathrm{sym}}^0 L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\}) =: \mathbb{C}$. 準相対論的 Pauli-Fierz モデルの状態のヒルベルト空間は次で定義される：

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathrm{part}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{phot}}. \tag{1.7}$$

$\Omega_{\mathrm{phot}} := 1 \oplus 0 \oplus 0 \cdots \mathcal{H}_{\mathrm{phot}}$ を真空ベクトルという．$\mathcal{H}_{\mathrm{phot}}$ 上の生成・消滅作用素をそれぞれ $a(f)^*, a(f), f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$ とする．一般に，$L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$ 上の閉作用素 $T$ に対してその第 2 量子化を $d\Gamma(T) : \mathcal{H}_{\mathrm{phot}} \to \mathcal{H}_{\mathrm{phot}}$ と書く．$\omega : \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ を

$0 < \omega(\mathbf{k}) < \infty$ を満たす関数とする．$\omega$ による $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$ 上の掛け算作用素も同じ記号で書く．光子に対する自由なハミルトニアンは

$$H_f := d\Gamma(\omega) \tag{1.8}$$

で定義される．$\mathbf{e}^{(\lambda)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \lambda = 1,2$ を偏極ベクトルとする：

$$\mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}^{(\mu)}(\mathbf{k}) = \delta_{\lambda,\mu}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = 0, \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3,\ \lambda, \mu \in \{1,2\}. \tag{1.9}$$

これの成分表示を $\mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = (e_1^{(\lambda)}(\mathbf{k}), e_2^{(\lambda)}(\mathbf{k}), e_3^{(\lambda)}(\mathbf{k}))$ と書く．$\Lambda \in L^2(\mathbb{R}^3)$ を

$$\omega^{-1/2}\Lambda \in L^2(\mathbb{R}^3) \tag{1.10}$$

を満たす関数とし，$j = 1,2,3$ に対して関数 $g_j$ を

$$g_j(\mathbf{k}, \lambda; \mathbf{x}) := \omega(\mathbf{k})^{-1/2}\Lambda(\mathbf{k})e_j^{(\lambda)}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \qquad (\mathbf{k}, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times \{1,2\},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{1.11}$$

と定義する．各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $g_j(\mathbf{x}) = g_j(\cdot, \cdot; \mathbf{x})$ は $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$ のベクトルと考えられる．このとき，点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ における量子電磁場を

$$A_j(\mathbf{x}) := \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{[a(g_j(\mathbf{x})) + a^*(g_j(\mathbf{x}))]}, \tag{1.12}$$

によって定義する．量子化されたベクトルポテンシャルは $\mathbf{A}(\mathbf{x}) := (A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{x}), A_3(\mathbf{x}))$ である．$\mathcal{H}$ を次のように同一視する：

$$\mathcal{H} \cong \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\mathrm{phot}} d^{3N}\underline{X}, \qquad \underline{X} = (\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}. \tag{1.13}$$

このとき $\mathcal{H}$ に作用する量子化されたベクトルポテンシャルは次で定義される：

$$A_j(\hat{\mathbf{x}}_i) := \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} A_j(\mathbf{x}_i) d\underline{X}. \tag{1.14}$$

準相対論的 Pauli-Fierz モデルのハミルトニアンは次で定義される：

$$H^V := \sum_{i=1}^{N} T_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_i) + \sum_{i=1}^{N} V(\mathbf{x}_i) + H_f + \sum_{i<j} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \tag{1.15}$$

ここに $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_i)$ は $i$ 番目の粒子の相対論的な運動エネルギー

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_i) := \sqrt{(\mathbf{p}_i - q\mathbf{A}(\mathbf{x}_i))^2 + M^2} - M \tag{1.16}$$

である．$M>0$ は粒子の質量を表す．$V$ は固定された核子によるポテンシャル，$W$ は粒子間のポテンシャルである．$V, W$ は $-\sqrt{\Delta+1}$ に対して相対コンパクトであると仮定する．ハミルトニアン $H^V$ によって記述される量子系を準相対論的 Pauli-Fierz モデルと呼ぶ．粒子の運動エネルギーとして (1.16) ではなく非相対論的なエネルギー

$$\frac{1}{2M}(\mathbf{p}_i - q\mathbf{A}(\mathbf{x}_i))^2 \tag{1.17}$$

を採用したモデルは，Pauli-Fierz モデルと呼ばれこれまで多く研究されてきた．$E^V(N)$ を $H^V(N)$ の基底状態エネルギーとする．このとき $H^V$ の基底状態の存在を証明するための一つのステップとして，次の不等式を示すことが重要である事が知られている：

$$E^V(N) < \min\{E^V(N-N') + E^0(N') | N' = 1, 2, \dots, N\}. \tag{1.18}$$

この条件を束縛条件とよぶ．以下で

$$E^V(N) \le E^0(N) - e_0, \tag{1.19}$$

を示す．ここに $-e_0$ は 1 粒子ハミルトニアン

$$h^V = \sqrt{-\Delta + M^2} - M + V(\mathbf{x}). \tag{1.20}$$

の基底状態エネルギーである．不等式 $-e_0 < 0$ を仮定すると，(1.19) は不等式 $E^V(N) < E^0(N)$ を意味する，これは (1.18) の一部と考えられる．量子場のモデルに対するこの種の議論は [7] によって最初に議論され、不等式 (1.18) から基底状態の存在が導かれることが証明された．続く論文 [5] で原子のクーロン系に対する束縛条件が示された．

準相対論的 Pauli-Fierz モデルに対して (1.19) を示すことのむずかしさは、相対論的な運動エネルギー (1.16) から生じる．これは明らかに非局所な作用素である．我々の証明の基本的アイディアは運動エネルギー $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_i)$ の凸性を利用することである．運動エネルギーの凸性はハミルトニアンの半群が正値性保存作用素であるという事実から導かれる ([6])．ここで特筆すべき点は，古典的なベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ をもつ相対論的シュレディンガー作用素はおそらく凸性を持たないが，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が量子場ならば $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_i)$ は凸性を持つことである．

## 2 主結果

$C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$ によって張られる有限粒子部分空間を

$$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}} := \mathcal{L}[\{a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)\Omega_{\mathrm{phot}}, \Omega_{\mathrm{phot}} | f_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\}), j = 1, \cdots, n,\ n \in \mathbb{N}\}] \tag{2.1}$$

とする．代数的テンソル積で作られる部分空間

$$\mathcal{D} := (\hat{\otimes}^{N}_{\mathrm{sym}} C^{\infty}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3))\hat{\otimes}\mathcal{F}_{\mathrm{fin}} \tag{2.2}$$

は $\mathcal{H}$ で稠密である．$H^0 := H^V|_{V=0}$ と置く．次の条件を仮定する：

(H.1) $\omega^{3/2}\Lambda \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

(H.2) $V(\mathbf{x})$ と $W(\mathbf{x})$ は 3 次元相対論的シュレディンガー作用素 $\sqrt{-\Delta_{\mathbf{x}}+1}-1$ に関して相対コンパクトである．

(H.3) $h^V := \sqrt{-\Delta + M^2} - M + V(\mathbf{x})$ は負エネルギー $-e_0 < 0$ の基底状態を持つ．

(H.4) すべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $V(\mathbf{x}) \le 0$.

ハミルトニアンの本質的自己共役性は [6, Corollary 7.60] によって示されている．

**Theorem 2.1** (At least one particle is bound). *(H.1)–(H.4)* を仮定する．このとき，すべての $q \in \mathbb{R}$ と $M \ge 0$ に対して，不等式

$$E^V(N) \le E^0(N) - e_0 \tag{2.3}$$

が成り立つ．

# 3 2.1 の証明

次の基本的な事実に注目する

**Lemma 3.1.** $(Q, \Sigma, \mu)$ を $\sigma$ 有限な測度空間，$T$ を $L^2(Q, d\mu)$ 上の正値性保存な有界作用素とする．このとき，すべての非負な $f, g \in L^2(Q, d\mu)$ に対して，次が成り立つ

$$(Tf)(q)^2 + (Tg)(q)^2 \le [(T(f^2+g^2)^{1/2})(q)]^2, \quad \mu\text{-a.e. } q \in Q. \tag{3.1}$$

*Proof.* $f, g$ を非負な単関数とする．すなわち，適当な $\alpha_i, \beta_i \ge 0$ と $A_i \in \Sigma$ によって

$$f(q) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(q), \quad g(q) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{A_i}(q), \tag{3.2}$$

と書かれる．ここで $A_i \cap A_j = \emptyset$ と仮定することができる．このとき $T\chi_{A_i} \ge 0$ に注意す

ることにより，次の不等式が成り立つ：

$$(Tf)^2+(Tg)^2=\sum_i\sum_j(\alpha_i\alpha_j+\beta_i\beta_j)(T\chi_{A_i})(T\chi_{A_j}) \tag{3.3}$$

$$\leq\sum_i\sum_j(\alpha_i^2+\beta_i^2)^{1/2}(\alpha_j^2+\beta_j^2)^{1/2}(T\chi_{A_i})(T\chi_{A_j}) \tag{3.4}$$

$$=\left(T\sum_i(\alpha_i^2+\beta_i^2)^{1/2}\chi_{A_i}\right)^2 \tag{3.5}$$

$$=\left(T(\sum_i\alpha_i^2\chi_{A_i}+\sum_i\beta_i^2\chi_{A_i})^{1/2}\right)^2 \tag{3.6}$$

$$=(T(f^2+g^2)^{1/2})^2 \tag{3.7}$$

すべての $f,g\in L^2(Q,d\mu)$ に対して，単関数 $f_n$，$g_n$ で $0\leq f_n\leq f$，$0\leq g_n\leq g$ かつ $f_n(q)\nearrow f(q)$, $g_n(q)\nearrow g(q)$, $\mu$-a.e.$q(n\to\infty)$ となるものが存在する．(3.7) より

$$(Tf_n)(q)^2+(Tg_n)(q)^2\leq[(T(f_n^2+g_n^2)^{1/2})(q)]^2\leq[(T(f^2+g^2)^{1/2})(q)]^2 \tag{3.8}$$

がほとんどすべての $q\in Q$ に対して成り立つ．ここで $T$ は有界だったので $n\to\infty$ のとき $\|T(f-f_n)\|\to 0$ となる．部分列 $\{n_j\}_j$ をとることにより

$$\lim_{j\to\infty}(Tf_{n_j})(q)^2+(Tg_{n_j})(q)^2=(Tf)(q)^2+(Tg)(q)^2\leq[(T(f^2+g^2)^{1/2})(q)]^2, \tag{3.9}$$

を得る． □

下に有界な自己共役作用素 $h$ に対して，それに付随する 2 次形式を $(f,hg)$, $f,g\in Q(h)$ と書く．補題 3.1 によって次が成り立つ：

**Lemma 3.2.** $h$ を $L^2$ 空間上の下に有界な自己共役作用素とし，$e^{-th}$ はすべての $t>0$ に対して正値性保存作用素であるとする．このとき，すべての $f\in\mathrm{Dom}(h)$, $|f|\in Q(h)$ に対して，

$$(|f|,h|f|)\leq\langle f,hf\rangle. \tag{3.10}$$

特に，非負の $f,g\in Q(h)$ に対して $\sqrt{f^2+g^2}\in Q(h)$ と

$$\left(\sqrt{f^2+g^2},h\sqrt{f^2+g^2}\right)\leq(f,hf)+(g,hg) \tag{3.11}$$

が成り立つ．

*Proof.* まず $u \in Q(h)$ であることと $t^{-1}\langle u, (1-e^{-th})u\rangle$ が $t \to 0$ で収束することは同値であることに注意する．$f \in \mathrm{Dom}(h)$ とする．このとき

$$\langle f, hf\rangle = \lim_{t\to 0} t^{-1}(f, (1-e^{-th})f) \geq \lim_{t\to 0} t^{-1}(|f|, (1-e^{-th})|f|) = (|f|, h|f|) > -\infty, \tag{3.12}$$

であり，これは (3.10) を意味する．次に $f, g \in Q(h)$ とする．補題 3.1 より

$$(f, hf) + (g, hg) = \lim_{t\to 0} t^{-1}\left[(f, (1-e^{-th})f) + (g, (1-e^{-th})g)\right] \tag{3.13}$$

$$\geq \lim_{t\to 0} t^{-1}(\sqrt{f^2+g^2}, (1-e^{-th})\sqrt{f^2+g^2}) \tag{3.14}$$

$$= (\sqrt{f^2+g^2}, h\sqrt{f^2+g^2}) > -\infty, \tag{3.15}$$

である．これは $\sqrt{f^2+g^2} \in Q(h)$ かつ (3.11) が成り立つことを意味する． □

定理 *2.1* の証明．汎関数積分に関する事実により次のことが示されている：ある $\sigma$ 有限な測度空間 $(\mathcal{L}_{\mathrm{E}}, \Sigma_E, \mu_E)$ とそこへのユニタリ変換 $U : \mathcal{H}_{\mathrm{phot}} \to L^2(\mathcal{L}_{\mathrm{E}}, d\mu_E)$ が存在して $I \otimes Ue^{-tH^0} I \otimes U^{-1}$ は正値性保存半群である．([6, Corollary 7.64]) $\tilde{H}^0 = I \otimes UH^0 I \otimes U^{-1}$ と置く．任意の固定された $\epsilon > 0$ に対して，単位ベクトル $F \in \mathcal{D}$ と $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ で次を満たすものをとることが出来る：

$$\langle F, H^0 F\rangle < E^0(N) + \epsilon \tag{3.16}$$

$$\langle \phi, h^V \phi\rangle < -e_0 + \epsilon \tag{3.17}$$

$$\phi(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{3.18}$$

それぞれの $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して，並進作用素

$$\mathcal{T}_{\mathbf{y}} := \exp\left(-i\mathbf{y} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i\right) \otimes \exp(-i\mathbf{y} \cdot d\Gamma(\mathbf{k})). \tag{3.19}$$

を定義する．$\mathcal{T}_{\mathbf{y}}\mathcal{D} = \mathcal{D}$ であり $H^0$ は並進不変である．$\widetilde{F} = (I \otimes U)F \in L^2(\mathcal{L}_{\mathrm{E}}, d\mu_{\mathrm{E}})$ と定義する．我々のテスト関数は

$$\Phi_{\mathbf{y}} = \left[\sum_{i=1}^N \phi(\hat{\mathbf{x}}_i)^2\right]^{1/2} \mathcal{T}_{\mathbf{y}} I \otimes U^{-1}|\widetilde{F}|, \tag{3.20}$$

である．ここに $\phi(\hat{\mathbf{x}}_i)$ は関数 $\phi(\mathbf{x}_i)$ による掛け算作用素を表す．まず

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y}\|\Phi_{\mathbf{y}}\|^2 = \sum_{i=1}^N \|\phi(\mathbf{x}_j)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot \||\widetilde{F}|\|^2 = N, \tag{3.21}$$

である．同様の計算と条件 (H.4) より次の不等式を得る：

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \left\langle \Phi_{\mathbf{y}}, \sum_{i=1}^{N} V(\mathbf{x}_i)\Phi_{\mathbf{y}} \right\rangle \tag{3.22}$$

$$= \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y}\phi(\mathbf{x}_i + \mathbf{y})^2 V(\mathbf{x}_j + \mathbf{y}) \left\langle F(\mathbf{X}), F(\mathbf{X}) \right\rangle_{\mathcal{H}_{\mathrm{phot}}} \tag{3.23}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y}\phi(\mathbf{x}_i + \mathbf{y})^2 V(\mathbf{x}_i + \mathbf{y}) \left\langle F(\mathbf{X}), F(\mathbf{X}) \right\rangle_{\mathcal{H}_{\mathrm{phot}}} \tag{3.24}$$

$$= N \left\langle \phi, V\phi \right\rangle, \tag{3.25}$$

補題 3.2 より $\Phi_{\mathbf{y}} \in Q(H^0)$ であり

$$(\Phi_{\mathbf{y}}, H^0\Phi_{\mathbf{y}}) = \left( \left[ \sum_{i=1}^{N} \phi(\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{y})^2 \right]^{1/2} |\widetilde{F}|, \widetilde{H}^0 \left[ \sum_{i=1}^{N} \phi(\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{y})^2 \right]^{1/2} |\widetilde{F}| \right) \tag{3.26}$$

$$= \left( \left[ \sum_{i=1}^{N} \phi(\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{y})^2 |\widetilde{F}|^2 \right]^{1/2}, \widetilde{H}^0 \left[ \sum_{i=1}^{N} \phi(\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{y})^2 |\widetilde{F}|^2 \right]^{1/2} \right) \tag{3.27}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \left( \phi(\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{y})|\widetilde{F}|, \widetilde{H}^0 \phi(\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{y})|\widetilde{F}| \right) \tag{3.28}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \left( \phi(\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{y})\widetilde{F}, \widetilde{H}^0 \phi(\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{y})\widetilde{F} \right) \tag{3.29}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left\langle \phi(\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{y})F, H^0 \phi(\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{y})F \right\rangle \tag{3.30}$$

である．ここで次の不等式がすでに証明されている ([1, Corollary 3.3])：

**Lemma 3.3.** $i = 1, \ldots, N$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \left\langle \phi(\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{y})F, H^0 \phi(\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{y})F \right\rangle \tag{3.31}$$

$$\leq \left\langle F, H^0 F \right\rangle + \left\langle \phi, (\sqrt{-\Delta + M^2} - M)\phi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.32}$$

が成り立つ．

評価 (3.25), (3.30), (3.32) を合わせることにより，不等式

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y}(\Phi_{\mathbf{y}}, H^V\Phi_{\mathbf{y}}) \leq N\left\langle F, H^0F\right\rangle + N\left\langle \phi, h^V\phi\right\rangle \tag{3.33}$$

$$\leq N(E^0(N) - e_0 + 2\epsilon), \tag{3.34}$$

を得る．したがって，ある $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ が存在して $\|\Phi_{\mathbf{y}}\| \neq 0$ かつ

$$E^V(N)\|\Phi_{\mathbf{y}}\|^2 \leq (\Phi_{\mathbf{y}}, H^V\Phi_{\mathbf{y}}) < (E^0(N) - e_0 + 2\epsilon)\|\Phi_{\mathbf{y}}\|^2. \tag{3.35}$$

が成り立つ．$\epsilon > 0$ は任意だったので，不等式 (2.3) が成り立つ． □

## 4 観察

上の結果は非相対論的な場合 [?] を相対論的な場合へ拡張したものである．非相対論的な場合に計算がうまくいく一つの理由は，すべての微分可能な実関数 $g$ に対して

$$[g, [g, -Delta]] = -2|\nabla g|^2 \leq 0 \tag{4.1}$$

が成り立つからである．このことは $\Delta$ を $\sqrt{-Delta + m^2} - m$ に置き換えても成り立つが，これに古典的な磁場を含む場合までは拡張できそうにない．そこで次の事実に着目した：$T$ を

$$(Tf)(q) = \int T(q,r)f(r)dr \tag{4.2}$$

を満たす正値性保存作用素とする．このとき実関数による掛け算作用素 $g$ に対して

$$[g, [g, T]] \tag{4.3}$$

も正値性保存作用素である．なぜなら，$[g, [g, T]]$ の核は $T(q,r)(g(q) - g(r))^2$ だから．この事実が，準相対論的 Pauli-Fierz の運動エネルギーが凸性を持つことの理由になっていると考えられる．

## 参考文献

[1] F. Hiroshima and I. Sasaki, *On the ionization energy of semi-relativistic pauli-fierzmodel for a single particle*, Kokyuroku Bessatsu **B21** (2010), 25–34.

[2] M. Könenberg and O. Matte, *On enhanced binding and related effects in the non- and semi-relativistic Pauli-Fierz models*, ArXiv e-prints (2012).

[3] M. Könenberg, O. Matte, and E. Stockmeyer, *Existence of ground states of hydrogen-like atoms in relativistic QED I: The semi-relativistic Pauli-Fierz operator*, Rev. Math. Phys. **23** (2011), no. 4, 375–407. MR 2804556 (2012i:81286)

[4] M. Könenberg, O. Matte, and E. Stockmeyer, *Existence of Ground States of Hydrogen-Like Atoms in Relativistic QED I:. the Semi-Relativistic Pauli-Fierz Operator*, Reviews in Mathematical Physics **23** (2011), 375–407.

[5] E. H. Lieb and M. Loss, *Existence of atoms and molecules in non-relativistic quantum electrodynamics*, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2003), no. 4, 667–710.

[6] J. Lőrinczi, F. Hiroshima, and V. Betz, *Feynman-Kac-type theorems and Gibbs measures on path space*, vol. 34, Walter De Gruyter, 2011, Seminar on Probability, Studies in Mathematics.

[7] E. H. Lieb M. Griesemer and M. Loss, *Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics*, Invent Math **145** (2001), no. 1, 557–595.

[8] T. Miyao and H. Spohn, *Spectral analysis of the semi-relativistic Pauli-Fierz Hamiltonian*, J. Funct. Anal. **256** (2009), no. 7, 2123–2156.