数理解析研究所講究録
第 1859 巻 2013 年 76-100

汎関数積分による Nelson 模型の紫外切断のくりこみ

Fumio Hiroshima (廣島文生)
Faculty of Mathematics, Kyushu University
Fukuoka, 819-0395, Japan
hiroshima@math.kyushu-u.ac.jp

1 はじめに

この論文では N-粒子ネルソン模型を考える. この模型は N 個のスピンのない荷電粒子とスカラーボゾンの線形な相互作用を表す模型である. フォック表現ではそのハミルトニアンは

$$H=H_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}+\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}H_{\mathrm{I}}(x)dx \tag{1.1}$$

で与えられる, ヒルベルト空間 $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^{3N})\otimes\mathscr{F}$ 上の自己共役作用素である. ここで $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ は粒子の状態空間, $\mathscr{F}$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上のフォック空間でボゾンの状態空間を表す. フォック空間とは $\mathscr{F}=\bigoplus_{n=0}^\infty\mathscr{F}^{(n)}$ で定義される. ここで $\mathscr{F}^{(n)}=\otimes_{\mathrm{sym}}^nL^2(\mathbb{R}^3)$ は n-ボゾン部分空間を表す. ただし $\mathscr{F}^{(0)}=\mathbb{C}$. $\mathscr{F}$ 上のノルムは $\|F\|_{\mathscr{F}}^2=\sum_{n=0}^\infty\|f_n\|_{\mathscr{F}^{(n)}}^2$ で与えられる. 真空ベクトルを $\mathbb{1}_{\mathscr{F}}=1\oplus0\oplus0\oplus\ldots\in\mathscr{F}$ で表し, 混乱の危険がないときは簡単に $\mathbb{1}$ と書くことにする. N-粒子シュレディンガー作用素は

$$H_{\mathrm{p}}=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\Delta_j+V$$

で与えられる. $V:\mathbb{R}^{3N}\to\mathbb{R}$ はポテンシャルでかけ算作用素とみなす. $\Delta_j=\Delta_{x_j}$ は 3 次元ラプラシアンである. $a^*(f)$ と $a(f)$, $f\in L^2(\mathbb{R}^3)$, は生成作用素と消滅作用素を表す. それらは正準交換関係 $[a(f),a^*(g)]=(\bar{f},g)$, $[a(f),a(g)]=0=[a^*(f),a^*(g)]$ を満たす. 形式的に $a^\sharp(f)=\int a^\sharp(k)\hat{f}(k)dk$ と書くこともある. $\omega(k)$ は dispersion relation を表す. この論文の大部分では $\omega(k)=|k|$ である. 場の自由ハミルトニアンを H_{f} とかき, これは ω の第 2 量子化作用素で定義される. つまり $H_{\mathrm{f}}\prod_{j=1}^na^*(f_j)\mathbb{1}=\sum_{j=1}^na^*(f_1)\cdots a^*(\omega f_j)\cdots a^*(f_n)\mathbb{1}$, $H_{\mathrm{f}}\mathbb{1}=0$ となる. 形式的には $H_{\mathrm{f}}=\int\omega(k)a^*(k)a(k)dk$ と表される. 相互作用は

$$H_{\mathrm{I}}(x)=g\sum_{j=1}^N\int\frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}}\left(\hat{\varphi}(k)e^{ik\cdot x_j}a(k)+\hat{\varphi}(-k)e^{-ik\cdot x_j}a^*(k)\right)dk \tag{1.2}$$

と定義される. 我々は $\mathscr{H}\cong L^2(\mathbb{R}^{3N};\mathscr{F})$ の同一視をする. つまり $F\in\mathscr{H}$ は $\mathbb{R}^{3N}\ni x\mapsto F(x)\in\mathscr{F}$ で $\int_{\mathbb{R}^{3N}}\|F(x)\|_{\mathscr{F}}^2dx<\infty$ となるもの全体である. この同一視で相互作用は $(H_{\mathrm{I}}F)(x)=H_{\mathrm{I}}(x)F(x)$ となる. 関数 φ は荷電分布を表す. その結果 $\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(x)dx=1$. この関数はハミルトニアンが作用素として well defined になるために必要であり紫外切断の役割を担っている. g は結合定数である. 仮定

$$\hat{\varphi}/\omega^{1/2},\hat{\varphi}/\omega\in L^2(\mathbb{R}^3),\quad\overline{\hat{\varphi}(k)}=\hat{\varphi}(-k) \tag{1.3}$$

のもとで相互作用 H_{I} は well defined で対称かつ $\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}$ に関して無限小になる．よって Kato-Rellich の定理から H は $D(H_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1})\cap D(\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}})$ 上で自己共役になる．さらに赤外切断 (IR) が

$$\widehat{\varphi}/\omega^{3/2}\in L^2(\mathbb{R}^3), \tag{1.4}$$

によって導入されれば，スペクトルの下限に対する固有状態 $\Psi\in\mathscr{H}$ が存在する ([Spo98, BFS98, Ger00, Ara01, Sas05])．つまり基底状態が存在する．[LMS02, Hir06] で示されたように条件 (1.4) は基底状態存在の必要条件にもなっている．

この論文では H の荷電分布の 1 点極限を考える．つまり $\varphi(x)\to(2\pi)^{3/2}\delta(x)$ または $\widehat{\varphi}(k)\to 1$．この極限の存在は [Nel64a] で作用素論的な手法 (Appendix C) で示されているが，我々はこれを汎関数積分を使って証明する．紫外切断の除去に関する論文として [GHPS12, HHS05] を挙げておく．また Nelson 自身も [Nel64b] で汎関数積分によるくりこみを考えていたようである．

さてこの極限をとるために我々は紫外切断関数として $\widehat{\varphi}_\varepsilon(k)=\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2/2}$ をとる．この関数によってハミルトニアン H_ε を定義し $\varepsilon>0$ を UV パラメターとみなす．そして $H_\varepsilon-E_\varepsilon$ の $\varepsilon\downarrow 0$ 極限を考える．ここで E_ε はエネルギーくりこみ項である．これは具体的に後で与える．この論文の主定理は以下である．

(1) 汎関数積分をつかって E_ε をペア相互作用の対角成分として導きだす．

(2) $H_{\mathrm{ren}}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(H_\varepsilon-E_\varepsilon)$ を熱半群の意味で示す．

(3) H_{ren} のペア相互作用を導く．

(4) H_{ren} の弱結合極限 (weak coupling limit) を求める．

2 パス測度によるエネルギーくりこみ

2.1 正則化されたハミルトニアンの汎関数積分表示

はじめに $\omega(k)=|k|$ としよう．いま $\mathbb{1}_\Lambda(k)=\begin{cases}1, & \omega(k)<\Lambda\\ 0, & \omega(k)\geq\Lambda\end{cases}$ とし $\mathbb{1}_\Lambda^\perp(k)=\mathbb{1}-\mathbb{1}_\Lambda(k)$ とおく．$\Lambda>0$ を仮定する．これは (2.24), 補題 2.9 と系 2.21 で必要になる．簡単のために次の仮定をする:

仮定 2.1 ポテンシャル V は有界かつ連続関数．特に *Kato-*クラスである．つまり

$$\lim_{t\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x\left[\int_0^t|V(B_s)|ds\right]=0. \tag{2.1}$$

紫外切断のくりこみでは V は全く本質的ではなく，$V\equiv 0$ としても構わない．Kato-クラスについては Appendix A で性質をまとめてある．Kato-クラスの性質はこの論文のいたるところで使う．カットオフ関数 $\widehat{\varphi}_\varepsilon(k)=\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2/2}\mathbb{1}_\Lambda^\perp(k)$, $\varepsilon\geq 0$, を考えよう．正則化されたハミルトニアンを

$$H_\varepsilon=H_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}+\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}H_{\mathrm{I}}^\varepsilon(x)dx,\quad\varepsilon>0, \tag{2.2}$$

で定義する．ここで

$$H_{\mathrm{I}}^{\varepsilon}(x)=g\sum_{j=1}^{N}\int\frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}}\left(\widehat{\varphi}_{\varepsilon}(k)\mathrm{e}^{ik\cdot x_j}a(k)+\widehat{\varphi}_{\varepsilon}(-k)\mathrm{e}^{-ik\cdot x_j}a^*(k)\right)dk \tag{2.3}$$

である．この論文の主目的は H_ε で $\varepsilon\downarrow 0$ の極限を考えることである．

$$E_\varepsilon=-\frac{g^2}{2}N\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2}}{\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_{\Lambda}^{\perp}(k)dk \tag{2.4}$$

としよう．ここで

$$\beta(k)=\frac{1}{\omega(k)+|k|^2/2}. \tag{2.5}$$

$E_\varepsilon\to-\infty$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ に注意せよ．主定理では $H_\varepsilon-E_\varepsilon$ が $\varepsilon\downarrow 0$ で非自明な自己共役作用素 H_{ren} に収束することを示す．その極限を UV 正則化ネルソンハミルトニアンとよぶ．

定理 2.2 次を満たす自己共役作用素 H_{ren} が存在する：

$$\mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon-E_\varepsilon)}=\mathrm{e}^{-tH_{\mathrm{ren}}},\quad t\geq 0. \tag{2.6}$$

我々はこの定理を汎関数積分をつかって証明する．$(B_t)_{t\in\mathbb{R}}=(B_t^1,\dots,B_t^N)_{t\in\mathbb{R}}$ をブラウン運動とする．ここで $(B_t^j)_{t\in\mathbb{R}}$, $j=1,\dots,N$, は独立な N 個の全実軸上で定義された $\mathbb{R}^3$-値ブラウン運動で，ウィナー測度を備えた連続パス空間上の確率過程である．$\mathbb{E}^x[\cdots]$ で時刻ゼロで x から出発するウィナー測度に関する期待値 (積分) を表す．$(F,\mathrm{e}^{-2TH_\varepsilon}G)$([LHB11, Theorem 6.3]) のファインマン・カッツ公式はよく知られている．特に，$F=f\otimes\mathbb{1}$ と $G=h\otimes\mathbb{1}$ に対しては次のようになる．

命題 2.3 $f,h\in L^2(\mathbb{R}^3)$ としよう．このとき

$$(f\otimes\mathbb{1},\mathrm{e}^{-2TH_\varepsilon}h\otimes\mathbb{1})=\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^{T}V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon}\right].$$

ここで $S_\varepsilon=\sum_{i,j=1}^{N}\int_{-T}^{T}ds\int_{-T}^{T}dtW_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s)$ はペア相互作用でペアポテンシャルは $W_\varepsilon(x,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2\omega(k)}\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2}\mathrm{e}^{-ik\cdot x}\mathrm{e}^{-\omega(k)|t|}\mathbb{1}_{\Lambda}^{\perp}(k)dk$ で与えられる．

2.2　くりこまれた作用

次の関数を考えよう．

$$\varphi_\varepsilon(x,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2}\mathrm{e}^{-ik\cdot x-\omega(k)|t|}}{2\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_{\Lambda}^{\perp}(k)dk,\quad \varepsilon\geq 0. \tag{2.7}$$

ここで $\beta(k)$ は (2.5) で与えられるものである．

命題 2.4 関数 S_0^{ren} で次を満たすものが存在する：

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}^x\left[\mathrm{e}^{-\int_{-T}^{T}V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}(S_\varepsilon-4NT\varphi_\varepsilon(0,0))}\right]=\mathbb{E}^x\left[\mathrm{e}^{-\int_{-T}^{T}V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}\right]. \tag{2.8}$$

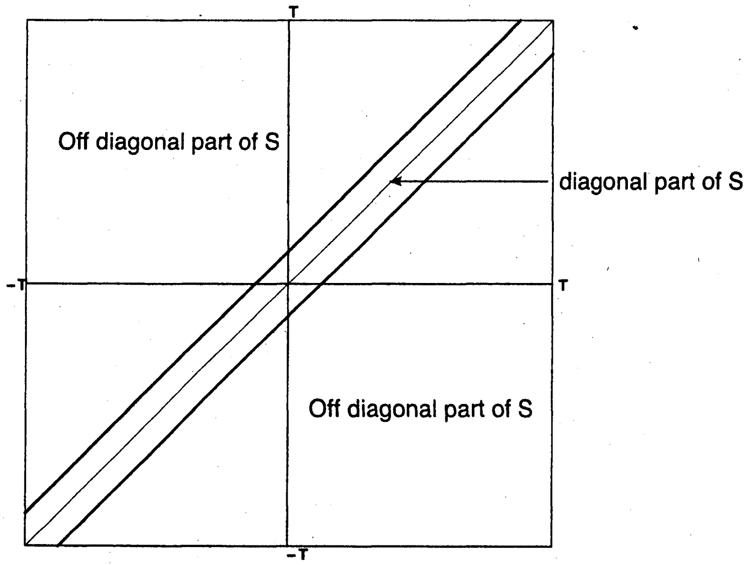

Figure 1: S_ε の対角成分と非対角成分

$W_\varepsilon(x,t)$ は滑らかで, $W_\varepsilon(x,t) \to W_0(x,t)$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ が $(x,t) \neq (0,0)$ で成り立つ. ここで

$$W_0(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-ik\cdot x} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) dk. \tag{2.9}$$

しかし $W_\varepsilon(0,0) \to \infty$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ である. つまり $W_0(x,t)$ は $(0,0)$ で特異性をもつ. (2.8) は非自明である. これを証明しよう.

今から $T > 0$ を固定する. $\varepsilon \downarrow 0$ のとき相互作用の対角成分だけが特異な項である. また $0 < \tau \leq T$ を固定し, $[t]_T = -T \vee t \wedge T$ としよう. 正則化された相互作用を対角成分と非対角成分にわける: $S_\varepsilon = S_\varepsilon^{\mathrm{D}} + S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}$. ここで

$$S_\varepsilon^{\mathrm{D}} = 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} dt\, W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s) \tag{2.10}$$

そして

$$S_\varepsilon^{\mathrm{OD}} = 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{[s+\tau]_T}^T dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s). \tag{2.11}$$

$S_\varepsilon^{\mathrm{D}}$ は S_ε を対角成分の近傍 $\{(t,t) \in \mathbb{R}^2 | |t| \leq T\}$ で積分したもの, そして $S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}$ はそれ以外の部分を表す. $\tau = T$ のときは $S_\varepsilon^{\mathrm{OD}} = 0$ となる. 次の補題はすぐにわかる.

補題 2.5 パスごとに $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} S_\varepsilon^{\mathrm{OD}} = S_0^{\mathrm{OD}}$. ここで S_0^{OD} は $S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}\lceil_{\varepsilon=0}$ である.

確率積分をつかえば解析が困難な項 $S_\varepsilon^{\mathrm{D}}$ を評価できる.

補題 2.6 ε によらない定数 $c > 0$ で次をみたすものがある:

$$|\nabla\varphi_\varepsilon(x,t)| \leq c|t|^{-1}, \quad t \neq 0$$
$$|\nabla\varphi_\varepsilon(x,t)| \leq c|x|^{-1}, \quad |x| \neq 0.$$

さらに $\varphi_0 - \varphi_\varepsilon$ に対しても, 定数 $\mathrm{c}_\varepsilon > 0$ で次を満たすものがある: $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{c}_\varepsilon = 0$ つまり

$$|\nabla\varphi_\varepsilon(x,t) - \nabla\varphi_0(x,t)| \le \mathrm{c}_\varepsilon|t|^{-1}, \quad t \ne 0,$$
$$|\nabla\varphi_\varepsilon(x,t) - \nabla\varphi_0(x,t)| \le \mathrm{c}_\varepsilon|x|^{-1}, \quad |x| \ne 0.$$

証明. はじめの不等式は

$$|\nabla\varphi_\varepsilon(x,t)| \le \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2(\omega(k)+|k|^2/2)} \mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2}\mathrm{e}^{-\omega(k)|t|}\mathbb{1}_\Lambda^\perp(k)dk \le c\int_\Lambda^\infty \mathrm{e}^{-rt}dr$$

よりわかる. 次に第二の不等式を証明しよう. 角度変数で積分すると

$$\varphi_\varepsilon(x,t) = 2\pi\int_\Lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon r^2 - r|t|}}{r(2+r)}\frac{\sin(r|x|)}{|x|}dr. \tag{2.12}$$

(2.12) の微分は

$$\nabla\varphi_\varepsilon(x,t) = \frac{2\pi x}{|x|^2}\int_\Lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon r^2/|x|^2 - |t|r/|x|}}{r(2|x|+r)}(r\cos r - \sin r)\,dr \tag{2.13}$$

となり, 右辺を評価すると

$$|\nabla\varphi_\varepsilon(x,t)| \le \int_0^1 \frac{Cr^3}{r^2}dr + \left|\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon r^2/|x|^2 - |t|r/|x|}}{(2|x|+r)}\cos r dr\right| + \int_1^\infty \frac{1}{r^2}dr.$$

ここで全ての $r \in [0,1]$ で $|r\cos r - \sin r| \le Cr^3$ をつかった. 真ん中の項の積分は有界なので補題が示せた. □

補題 2.7 もし $\varepsilon > 0$ ならば

$$\begin{aligned} S_\varepsilon^{\mathrm{D}} &= 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varphi_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0)ds - 2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T \varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s)ds \\ &\quad + 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds\int_s^{[s+\tau]_T} \nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)\cdot dB_t^i. \end{aligned} \tag{2.14}$$

証明. $\varphi_\varepsilon(x,t)$ は次の方程式の解である:

$$\left(\partial_t + \frac{1}{2}\Delta\right)\varphi_\varepsilon(x,t) = -W_\varepsilon(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \ge 0. \tag{2.15}$$

i と j を固定する. このとき伊藤の公式から

$$\begin{aligned} &\varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s) - \varphi_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) \\ &= \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)\cdot dB_t^i + \int_s^{[s+\tau]_T}\left(\partial_t + \frac{1}{2}\Delta\right)\varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)dt. \end{aligned} \tag{2.16}$$

よって (2.15) から

$$\int_s^{[s+\tau]_T} W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)dt$$

$$= \varphi_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) - \varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s) + \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)\cdot dB_t^i \tag{2.17}$$

が従う. これを $S_\varepsilon^{\mathrm{D}}$ に代入すれば主張が示せる. □

の右辺第一項の $i=j$ の部分 $= 4NT\varphi_\varepsilon(0,0)$ がまさに発散項になっているので, くりこまれた作用を次のように定義することが示唆される:

$$S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} = S_\varepsilon - 4NT\varphi_\varepsilon(0,0), \quad \varepsilon > 0. \tag{2.18}$$

これは $S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} = S_\varepsilon^{\mathrm{OD}} + X_\varepsilon + Y_\varepsilon + Z_\varepsilon$ のように表せる. ここで

$$X_\varepsilon = 2\sum_{i\neq j}^N \int_{-T}^T \varphi_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0)ds, \tag{2.19}$$

$$Y_\varepsilon = 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)\cdot dB_t^i, \tag{2.20}$$

$$Z_\varepsilon = -2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s)ds. \tag{2.21}$$

補題 2.8 ある定数 c_z と c_s が存在して $|Z_\varepsilon| \le c_z T$ と $|S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}| \le c_s T^2$ がパスと $\varepsilon \ge 0$ に一様に成立する.

証明.

$$|Z_\varepsilon| \le 4\pi N^2 \left(\int_{-T}^{T-\tau} ds \int_\Lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-r\tau}}{1+r/2}dr + \int_{T-\tau}^T ds \int_\Lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-r(T-s)}}{1+r/2}dr \right) \le c_z T$$

が適当な $c_z > 0$ で成り立つ. 不等式 $|S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}| \le c_s T^2$ も同じようにして得られる. □

補題 2.9 $\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|X_\varepsilon|] < \infty$ が全ての $\varepsilon \ge 0$ で成立する.

証明.

$$X_\varepsilon = \sum_{i\neq j}^N \int_{-T}^T ds \frac{2\pi}{|B_s^i - B_s^j|} \int_\Lambda^\infty \frac{\sin\sqrt{r}|B_s^i - B_s^j|}{r + r^2/2} \mathrm{e}^{-\varepsilon r^2} dr, \quad \varepsilon \ge 0 \tag{2.22}$$

に注意しよう. その結果

$$\mathbb{E}^x[|X_\varepsilon|] \le \sum_{i\neq j}^N \int_{-T}^T ds \mathbb{E}^x\left[\frac{2\pi}{|B_s^i - B_s^j|}\right] \int_\Lambda^\infty \frac{1}{r + r^2/2} dr. \tag{2.23}$$

仮定 $\Lambda > 0$ から

$$\int_\Lambda^\infty \frac{1}{r + r^2/2} dr < \infty. \tag{2.24}$$

$\sum_{i \neq j}^N |x^i - x^j|^{-1}$ は $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ (Appendix A を参照せよ) 上の Kato-クラスなので,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x \left[\sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T \frac{ds}{|B_s^i - B_s^j|} \right] < \infty.$$

よって (2.23) は有界となり補題が従う. □

補題 2.10 $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon|] < \infty$ が全ての $\varepsilon \geq 0$ で成立し, $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon - Y_0|] = 0$ となる.

証明. Fubini の定理より確率積分とルベーグ積分が交換できて Y_ε は

$$Y_\varepsilon = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left(\int_{[t-\tau]_T}^t \nabla \varphi_\varepsilon (B_t^i - B_s^j, t-s) ds \right) \cdot dB_t^i \tag{2.25}$$

と表せる. これは $\varepsilon \geq 0$ ごとに確率変数である. 伊藤のアイソメトリーから

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^x \left[|Y_\varepsilon - Y_0|^2 \right] \\
&= 4 \sum_{i=1}^N \int_{-T}^T \mathbb{E}^0 \left[\left| \sum_{j=1}^N \int_{[t-\tau]_T}^t (\nabla \varphi_\varepsilon - \nabla \varphi_0)(B_t^i - B_s^j + x^i - x^j, t-s) ds \right|^2 \right] dt \\
&\leq 4 c_\varepsilon \sqrt{N} \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \mathbb{E}^0 \left[\left(\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-\theta} |t-s|^{-(1-\theta)} ds \right)^2 \right] dt.
\end{aligned}$$

ここで補題2.6 と不等式 $|\nabla \varphi_\varepsilon(x,t) - \nabla \varphi_0(x,t)| \leq c_\varepsilon |x|^{-\theta} |t|^{-(1-\theta)}$, $\theta \in [0,1]$ をえるために補間をつかった. ここで $c_\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ に注意せよ. 適当な $\frac{1}{2} < \theta < 1$ で Schwarz 不等式から

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon - Y_0|^2] \\
&\leq 4 c_\varepsilon \sqrt{N} \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \mathbb{E}^0 \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j||^{-2\theta} ds \right] \left(\int_{[t-\tau]_T}^t |t-s|^{-2(1-\theta)} ds \right) dt \\
&\leq 4 c_\varepsilon \tau^{2\theta - 1} \sqrt{N} \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left(\int_{[t-\tau]_T}^t \mathbb{E}^0 [|B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta}] ds \right) dt.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$x^i - x^j = X$ とおく. このとき

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^T dt \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} |u - v + X|^{-2\theta} p_t(u) p_s(v) du dv &\leq \int_{-\infty}^\infty dt \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{-2\theta} p_{t+s}(u - X) du \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|u - X|} \frac{1}{|u|^{2\theta}} du.
\end{aligned}$$

また $|x|^{-2\theta} \in L^p(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ が $p > 3/2$ で成立するから, $|x|^{-2\theta}$ は Kato-クラスなので

$$\sup_{X \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|u-X|} \frac{1}{|u|^{2\theta}} du < \infty.$$

Appendix A を参照せよ. この結果 $\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int_{-T}^{T} dt \int_{[t-\tau]_T}^{t} ds \mathbb{E}^x[|B_t^i - B_s^j|^{-2\theta}] < \infty$ が従う. ゆえに

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon - Y_0|^2] \to 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0) \tag{2.27}$$

が (2.26) と $c_\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ からえられる. さらに $\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon|] < \infty$ が不等式

$$\mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon|^2] \le 4c\tau^{2\theta-1}\sqrt{N} \sum_{i,j=1}^{N} \int_{-T}^{T} dt \int_{[t-\tau]_T}^{t} \mathbb{E}^x[|B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta}] ds$$

から従う. □

$x = (x^1, ..., x^N) \in \mathbb{R}^{3N}$ に対して

$$S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x) = 2\sum_{i\ne j}^{N} \int_0^{2T} ds \int_{[s+\tau]_T}^{T} W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j + x^i - x^j, t-s) dt,$$

$$X_\varepsilon^T(x) = 2\sum_{i,j=1}^{N} \int_0^{2T} \varphi_\varepsilon(B_s^i - B_s^j + x^i - x^j, 0) ds,$$

$$Y_\varepsilon^T(x) = 2\sum_{i,j=1}^{N} \int_0^{2T} ds \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j + x^i - x^j, t-s) \cdot dB_t^i,$$

$$Z_\varepsilon^T(x) = -2\sum_{i,j=1}^{N} \int_0^{2T} \varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j + x^i - x^j, [s+\tau]_T - s) ds.$$

補題 2.11 $\alpha \in \mathbb{R}$ としよう. このとき定数 $c_U(\alpha) > 0$ ($\varepsilon \ge 0$ に依っていない) で

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{\alpha U_\varepsilon^T(x)}] < c_U(\alpha), \quad \varepsilon \ge 0, \qquad U = S^{\mathrm{OD}}, X, Y, Z \tag{2.28}$$

となるものがある.

証明. $U = X$ としよう. 不等式 $|X_\varepsilon^T(x)| \le C\sum_{i\ne j}^{N} \int_0^{2T} |B_s^i - B_s^j|^{-1} ds$ と $\sum_{i\ne j}^{N} |x^i - x^j|^{-1}$ が Kato-クラスであることから

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \left|\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{\alpha X_\varepsilon^T(x)}]\right| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x\left[\mathrm{e}^{|\alpha|\sum_{i\ne j}\int_0^{2T} |B_s^i - B_s^j|^{-1} ds}\right] < \infty. \tag{2.29}$$

$U = Y$ としよう. $\Phi_t = \Phi_t(x) = (\Phi_t^1, \ldots, \Phi_t^N)$ とし,

$$\Phi_t^i = \Phi_t^i(x) = 2\sum_{j=1}^{N} \int_{[t-\tau]_T}^{t} \nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j + x^i - x^j, t-s) ds$$

としよう. このとき $Y_\varepsilon^T(x)$ は次のように表せる

$$Y_\varepsilon^T(x) = \int_0^{2T} \Phi_t \cdot dB_t. \tag{2.30}$$

Girsanov 定理から $\mathbb{E}^0\left[e^{2\alpha\int_0^{2T}\Phi_t\cdot dB_t - \frac{1}{2}(2\alpha)^2\int_0^{2T}|\Phi_t|^2dt}\right] = 1$ と不等式

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}^0\left[e^{\alpha Y_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^2 &\le \mathbb{E}^0\left[e^{2\alpha\int_0^{2T}\Phi_t\cdot dB_t - \frac{1}{2}(2\alpha)^2\int_0^{2T}|\Phi_t|^2dt}\right]\mathbb{E}^0\left[e^{2\alpha^2\int_2^{2T}|\Phi_t|^2dt}\right]\\ &= \mathbb{E}^0\left[e^{2\alpha^2\int_0^{2T}|\Phi_t|^2dt}\right]\end{aligned}$$

をえる. (2.26) と同様に $\int_0^{2T}|\Phi_t|^2dt \le 4c\tau^{2\theta-1}\sqrt{N}Q(x)$. ここで c は補題 2.6 の定数である. これは ε によっていない. そして

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^N \int_0^{2T} ds \int_s^{[s+\tau]_T} |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta}dt.$$

$\frac{1}{2} < \theta < 1$ に注意する. よって $\left(\mathbb{E}^0\left[e^{\alpha Y_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^2 \le \mathbb{E}^0\left[e^{\gamma Q(x)}\right]$. ここで $\gamma = 8c\sqrt{N}\alpha^2\tau^{2\theta-1}$. Jensen 不等式から

$$\mathbb{E}^0\left[e^{\gamma Q(x)}\right] \le \int_0^{2T}\frac{ds}{2T}\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_s^{[s+\tau]_T}|B_t^i-B_s^j+x^i-x^j|^{-2\theta}dt}\right]. \tag{2.31}$$

(2.31) の右辺を $\int_0^{2T} = \int_0^{2T-\tau} + \int_{2T-\tau}^{2T}$ とわける. 最初の項を考える. $[s+\tau]_T = s+\tau$ だから,

$$\begin{aligned}&\int_0^{2T-\tau}\frac{ds}{2T}\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_s^{[s+\tau]_T}|B_t^i-B_s^j+x^i-x^j|^{-2\theta}dt}\right]\\ &= \int_0^{2T-\tau}\frac{ds}{2T}\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_{s+t}^i-B_s^j+x^i-x^j|^{-2\theta}dt}\right].\end{aligned} \tag{2.32}$$

$\mathscr{F}_s = \sigma(B_r^j; 0 \le r \le s,\ j = 1, \dots, N)$ を自然な filtration とする. 条件付き期待値をとって, マルコフ性を使うと

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_{s+t}^i-B_s^j+x^i-x^j|^{-2\theta}dt}\right] &= \mathbb{E}^0\left[\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_{s+t}^i-B_s^j+x^i-x^j|^{-2\theta}dt}|\mathscr{F}_s\right]\right]\\ &= \mathbb{E}^0\left[\mathbb{E}^{B_s}\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i-B_0^j+x^i-x^j|^{-2\theta}dt}\right]\right].\end{aligned}$$

さらに計算すると

$$\begin{aligned}&= (2\pi s)^{-3N/2}\int_{\mathbb{R}^{3N}} e^{-|y|^2/2s}\mathbb{E}^y\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i-B_0^j+x^i-x^j|^{-2\theta}dt}\right]dy\\ &= (2\pi s)^{-3N/2}\int_{\mathbb{R}^{3N}} e^{-|y|^2/2s}\prod_{i=1}^N\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i+(x+y)^i-(x+y)^j|^{-2\theta}dt}\right]dy.\end{aligned}$$

$|x|^{-2\theta}$ が Kato-クラスなので

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[e^{\beta\int_0^\tau|B_s^i+x|^{-2\theta}ds}] = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x[e^{\beta\int_0^\tau|B_s^i|^{-2\theta}ds}] < \infty$$

が全ての $\beta\in\mathbb{R}$ (Appendix A を参照せよ) で成り立つ. これから

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i+(x+y)^i-(x+y)^j|^{-2\theta}dt}\right]<\infty. \tag{2.33}$$

特に

$$\begin{aligned}&\int_0^{2T-\tau}\frac{1}{2T}\mathbb{E}^x\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_s^{[s+\tau]_T}|B_t^i-B_s^j+x^i-x^j|^{-2\theta}dt}\right]ds\\&\le\frac{2T-\tau}{2T}\sup_{x,y\in\mathbb{R}^3}\prod_{i=1}^N\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i+(x+y)^i-(x+y)^j|^{-2\theta}dt}\right]<\infty.\end{aligned} \tag{2.34}$$

次に第 2 項を考える. $[s+\tau]_T=2T$. 上と同様に

$$\begin{aligned}&\int_{2T-\tau}^{2T}\frac{1}{2T}\mathbb{E}^x\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_s^{[s+\tau]_T}|B_t^i-B_s^j+x^i-x^j|^{-2\theta}dt}\right]ds\\&\le\frac{\tau}{2T}\sup_{x,y\in\mathbb{R}^3}\prod_{i=1}^N\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i+(x+y)^i-(x+y)^j|^{-2\theta}dt}\right]<\infty.\end{aligned} \tag{2.35}$$

よって (2.34) と (2.35) から

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[e^{2\alpha Y_\varepsilon^T(x)}]\le\left(\sup_{x,y\in\mathbb{R}^3}\prod_{i=1}^N\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i+(x+y)^i-(x+y)^j|^{-2\theta}dt}\right]\right)^{1/2}<\infty. \tag{2.36}$$

最後に $U=Z$ と $U=S^{\mathrm{OD}}$ の場合を考える. $|Z_\varepsilon^T(x)|\le c_zT$ と $|S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)|\le cT^2$ から $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}[e^{\alpha Z_\varepsilon^T(x)}]<\infty$ と $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}[e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{OD}T}(x)}]<\infty$ がわかる. □

補題 2.12 $\alpha\in\mathbb{R}$ とし $f,h\in L^2(\mathbb{R}^3)$ としよう. このとき

$$\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x[f(B_{-T})h(B_T)e^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]<\infty$$

が全ての $\varepsilon\ge0$ で成り立つ.

証明. 分解 $S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}=S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}+X_\varepsilon+Y_\varepsilon+Z_\varepsilon$ を思い出そう. Schwarz 不等式から

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x[|f(B_{-T})h(B_T)|e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]\\&\le\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^0\left[|f(x)h(B_{2T}+x)|e^{-\int_0^{2T}V(B_s+x)ds}e^{\alpha(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]\\&\le\|f\|\|h\|\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0\left[e^{-2\int_0^{2T}V(B_s+x)ds}e^{2\alpha(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

補題 2.11 と V が Kato-クラスより

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[e^{-2\int_0^{2T}V(B_s+x)ds}e^{2\alpha(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]<\infty,$$

そして補題が示せた. □

2.3 くりこまれたハミルトニアン

補題 2.13 もし $\alpha\in\mathbb{R}$ ならば

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}^0\left[|e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)}-e^{\alpha X_0^T(x)}|\right]=0,\quad x\in\mathbb{R}^{3N}. \tag{2.38}$$

証明. $|X_\varepsilon^T(x)|\le\int_0^{2T}V_C(B_s^1+x^1,....,B_s^N+x^N)ds$ と

$$\mathbb{E}^0\left[|e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)}-e^{\alpha X_0^T(x)}|\right]\le 2\mathbb{E}^0\left[|e^{\alpha\int_{-T}^T V_C(B_s^1+x^1,....,B_s^N+x^N)ds}\right]<\infty$$

がわかる. x ごとに $X_\varepsilon^T(x)\to X_0^T(x)$ a.s. なのでルベーグの優収束定理より (2.38) がわかる. □

補題 2.14 もし $\alpha\in\mathbb{R}$ ならば

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[|e^{\alpha U_\varepsilon^T(x)}-e^{\alpha U_0^T(x)}|]=0,\quad U=S^{\mathrm{OD}},Y,Z. \tag{2.39}$$

証明. $U=Y$ としよう. $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[|e^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x))}-1|\right]\to 0$ を示せば十分である.

$$\mathbb{E}^0\left[\left(e^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x))}-1\right)^2\right]=\mathbb{E}^0\left[e^{2\alpha(Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x))}\right]+1-2\mathbb{E}^0\left[e^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x))}\right] \tag{2.40}$$

はわかる. 以下で $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}^0[e^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x))}]=1$ を示そう. 確率変数 $\delta\Phi_t=\delta\Phi_t(x)=(\delta\Phi_t^1,\dots,\delta\Phi_t^N)$ と

$$\delta\Phi_t^i=\delta\Phi_t^i(x)=2\sum_{j=1}^N\int_{[t-\tau]_T}^t(\nabla\varphi_\varepsilon-\nabla\varphi_0)(B_t^i-B_s^j+x^i-x^j,t-s)ds$$

を定義すれば

$$Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x)=\int_0^{2T}\delta\Phi_t(x)dt.$$

Girsanov の定理から $1=\mathbb{E}^0[e^{\alpha\int_0^{2T}\delta\Phi_t\cdot dB_t-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{2T}|\delta\Phi_t|^2dt}]$ が $\alpha\in\mathbb{R}$ ごとに成り立つから

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0\left[e^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x))}\right]-1\right)^2\le\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[e^{2\alpha\int_0^{2T}\delta\Phi_t\cdot dB_t}\right]\mathbb{E}^0\left[\left(1-e^{-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{2T}|\delta\Phi_t|^2dt}\right)^2\right]. \tag{2.41}$$

再び $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[e^{2\alpha\int_0^{2T}\delta\Phi_t\cdot dB_t}\right]\le\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0\left[e^{4\alpha^2\int_0^{2T}|\delta\Phi_t|^2dt}\right]\right)^{1/2}$. さらに

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[\left(1-e^{-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{2T}|\delta\Phi_t|^2dt}\right)^2\right]\le\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[\left|\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{2T}|\delta\Phi_t|^2dt\right|^2\right]\to 0 \tag{2.42}$$

$(\varepsilon\downarrow 0)$. よって (2.42) が補題 2.10 からわかる. $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0\left[e^{4\alpha^2\int_0^{2T}|\delta\Phi_t|^2dt}\right]\right)^{1/2}$ は ε に関して一様有界である. これは補題 2.12 と同じようにして示せる. よって (2.41) は $\varepsilon\downarrow 0$ のときゼロに収束し $U=Y$ に対して (2.39) が示せた.

$U=Z$ としよう. $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x\left[|e^{\alpha(Z_\varepsilon-Z_0)}-1|\right]\to 0$ を示せばいい.

$$\begin{aligned}&Z_\varepsilon(x)-Z_0(x)\\&=2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-ik\cdot(B^i_{[s+\tau]_T-s}+x^i-B^j_{[s+\tau]_T-s}-x^j)}e^{-([s+\tau]_T-s)\omega(k)}}{\omega(k)}\beta(k)1\!\!1_\Lambda^\perp(k)(1-e^{-\varepsilon|k|^2})dk\end{aligned}$$

がわかる. $\eta_\varepsilon(x)=\alpha(Z_\varepsilon(x)-Z_0(x))$ としよう. 直接 $|\eta_\varepsilon(x)|^n\le c^n\alpha^nT^n\varepsilon^n$ が x に依っていないある定数 c で成り立つことがわかる. よって $\mathbb{E}^0[e^{\eta_\varepsilon(x)}]=1+\sum_{n\ge1}\frac{1}{n!}\mathbb{E}^0[\eta_\varepsilon(x)^n]$. そして

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n!}\mathbb{E}^0[|\eta_\varepsilon(x)|^n]\le\sum_{n\ge1}\frac{1}{n!}c^nT^n\varepsilon^n\to 0$$

$(\varepsilon\downarrow 0)$ が x に一様に成り立つ. よって (2.39) が $U=Z$ のとき成り立つ. $U=S^{\mathrm{OD}}$ のときも (2.39) と同様にわかる. □

補題 2.15 $\alpha\in\mathbb{R}$ とし $f,h\in L^2(\mathbb{R}^3)$ としよう. このとき

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\downarrow0}\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x[f(B_{-T})h(B_T)e^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]\\&=\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x[f(B_{-T})h(B_T)e^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}e^{\alpha S_0^{\mathrm{ren}}}].\end{aligned}\tag{2.43}$$

証明. $A_\varepsilon=A_\varepsilon(x)=\alpha(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))$ とおこう. そうすると $dxdP^x$ のもとでの ブラウン運動のシフト不変性と telescoping から

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x\left[f(B_{-T})h(B_T)e^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}\left(e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}-e^{\alpha S_0^{\mathrm{ren}}}\right)\right]\right|\\&\le\ e^{2T\|V\|_\infty}\int_{\mathbb{R}^3}dx|f(x)|\mathbb{E}^0\left[|h(B_{2T}+x)|\left(e^{A_\varepsilon(x)+\alpha X_\varepsilon^T(x)}-e^{A_0(x)+\alpha X_0^T(x)}\right)\right]\\&\le\ e^{2T\|V\|_\infty}\|f\|\|h\|\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0[|e^{A_\varepsilon(x)}-e^{A_0(x)}|^4]\mathbb{E}^0[e^{4\alpha X_\varepsilon^T(x)}]\right)^{1/4}\\&\quad+e^{2T\|V\|_\infty}\int_{\mathbb{R}^3}dx|f(x)|E_\varepsilon(x)\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0[|e^{4A_0}]\right)^{1/4}.\end{aligned}$$

ここで $E_\varepsilon(x)=\left(\mathbb{E}^0[|h(B_{2T}+x)|^2]\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}^0[(e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)}-e^{\alpha X_0^T(x)})^4]\right)^{1/4}$. 右辺の各項がゼロに収束することを示す. $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[e^{4\alpha X_\varepsilon^T(x)}]$ と $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[e^{4A_0}]$ の両方は ε に関して一様有界が補題 2.11 からわかる. 補題 2.14 で $\lim_{\varepsilon\downarrow0}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[|e^{A_\varepsilon(x)}-e^{A_0(x)}|^4]=0$ が示されているので最初の項はゼロは収束する. さらに

$$E_\varepsilon(x)\le\left(\mathbb{E}^0[|h(B_{2T}+x)|^2]\right)^{1/2}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0\left[(e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)}-e^{\alpha X_0^T(x)})^4\right]\right)^{1/4}\in L^1(\mathbb{R}^{3N}).$$

補題 2.13 から $\mathbb{E}^0[(e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)}-e^{\alpha X_0^T(x)})^4]\to 0$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ が全ての $x\in\mathbb{R}^{3N}$ でなりたつ. よってルベーグ優収束定理から第 2 項がゼロに収束することがわかる. □

補題 2.16 次が成り立つ:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(f\otimes 1\!\!1, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}h\otimes 1\!\!1) = \int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}\right]dx. \tag{2.44}$$

ここで

$$S_0^{\mathrm{ren}} = 2\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\varphi_0(B_s^i-B_s^j,0)ds + 2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_s^T\nabla\varphi_0(B_t^i-B_s^j,t-s)\cdot dB_t$$
$$-2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varphi_0(B_T^i-B_s^j,T-s)ds, \tag{2.45}$$

そして S_0^{ren} の被積分関数は

$$\varphi_0(X,t) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-ikX}e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)}\beta(k)1\!\!1_\Lambda^\perp(k)dk,$$
$$\nabla\varphi_0(X,t) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{-ike^{-ikX}e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)}\beta(k)1\!\!1_\Lambda^\perp(k)dk.$$

証明.

$$(f\otimes 1\!\!1, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}h\otimes 1\!\!1) = \int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}\right]dx \tag{2.46}$$

である. 右辺は $\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}]dx$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ に収束する. よって (2.44) がわかる. また

$$S_0^{\mathrm{ren}} = 2\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\varphi_0(B_s^i-B_s^j,0)ds + 2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_s^{[s+\tau]_T}\nabla\varphi_0(B_t^i-B_s^j,t-s)\cdot dB_t$$
$$-2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varphi_0(B_{[s+\tau]_T}^i-B_s^j,[s+\tau]_T-s)ds \tag{2.47}$$

なので $\tau=T$ とすれば (2.45) がわかる. □

さて $f\otimes 1\!\!1$ からもっと一般的なベクトル $f\otimes F(\phi(\tilde{f}_1),\ldots,\phi(\tilde{f}_n))1\!\!1$ へ拡張する. ここで $F\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, $\phi(f)$ はスカラー場を表す: $\frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(\hat{f})+a(\tilde{\hat{f}}))$. ここで $\tilde{\hat{f}}(k)=\hat{f}(-k)$. そのために $\mathrm{e}^{-2TH_\varepsilon}$ のファインマン・カッツ公式を紹介しておく.

$$H_{-k}(\mathbb{R}^n) = \{f\in\mathscr{S}'_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)\,|\,\hat{f}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), |\cdot|^{-k/2}\hat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

とし, ノルムを $\|f\|^2_{H_{-k}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(x)|^2|x|^{-k}dx$ で与える. ユークリッド場は確率空間 $(Q_{\mathrm{E}},\Sigma_{\mathrm{E}},\mu_{\mathrm{E}})$ 上のガウス型確率変数族 $\{\phi_{\mathrm{E}}(F), F\in H_{-1}(\mathbb{R}^4)\}$ である. 写像 $F\mapsto\phi_{\mathrm{E}}(F)$ は線形で平均ゼロ, 分散は $\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}[\phi_{\mathrm{E}}(F)\phi_{\mathrm{E}}(G)] = \frac{1}{2}(F,G)_{H_{-1}(\mathbb{R}^4)}$. ユークリッド場の性質は Appendix B にまとめておく. 以下, $\mathscr{H}$ と $\mathscr{F}$-値 L^2 関数の集合 $L^2(\mathbb{R}^{3N};\mathscr{F})$ を同一視する. つまり $F\in\mathscr{H}$ は $\mathbb{R}^{3N}\ni x\mapsto F(x)\in\mathscr{F}$ とみなされ, $\int_{\mathbb{R}^{3N}}\|F(x)\|^2_{\mathscr{F}}dx<\infty$.

命題 2.17 $F, G \in \mathscr{H}$ としよう．このとき

$$
\begin{aligned}
&(F, \mathrm{e}^{-2TH_\varepsilon} G) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\mathrm{e}^{-\int_{-T}^{T} V(B_s) ds} \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}} \left[J_{-T} F(B_{-T}) \cdot \mathrm{e}^{-\phi_{\mathrm{E}}(\int_{-T}^{T} \sum_{j=1}^{N} \delta_s \otimes \tilde{\varphi}(\cdot - B_s^j) ds)} J_T G(B_T) \right] \right].
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

ここで $\tilde{\varphi}_\varepsilon(x) = \left(\mathrm{e}^{-\varepsilon|\cdot|^2/2} 1\!\!1_\Lambda^\perp / \sqrt{\omega} \right)^\vee (x)$．そして $\delta_s(x) = \delta(x - s)$ は s に重みのあるデルタ関数である．

証明．証明は [LHB11, Theorem 6.3] を参照せよ． □

補題 2.18 $\rho_j \in H_{-1/2}(\mathbb{R}^3), j = 1, 2,\ f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ としよう．このとき

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (f \otimes \mathrm{e}^{\alpha \phi(\rho_1)} 1\!\!1, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes \mathrm{e}^{\beta \phi(\rho_2)} 1\!\!1) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) \mathrm{e}^{-\int_{-T}^{T} V(B_s) ds} \mathrm{e}^{\frac{g^2}{2} S_0^{\mathrm{ren}} + \frac{1}{4}\xi} \right] dx.
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\xi = \xi(g) &= \bar{\alpha}^2 \|\rho_1/\sqrt{\omega}\|^2 + \beta^2 \|\rho_2/\sqrt{\omega}\|^2 + 2\bar{\alpha}\beta(\rho_1/\sqrt{\omega}, \mathrm{e}^{-2T\omega} \rho_2/\sqrt{\omega}) \\
&\quad + 2\bar{\alpha} g \sum_{j=1}^{N} \int_{-T}^{T} ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{\widehat{\rho_1}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} 1\!\!1_\Lambda^\perp(k) \mathrm{e}^{-|s-T|\omega(k)} \mathrm{e}^{-ikB_s^j} \\
&\quad + 2\beta g \sum_{j=1}^{N} \int_{-T}^{T} ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{\widehat{\rho_2}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} 1\!\!1_\Lambda^\perp(k) \mathrm{e}^{-|s+T|\omega(k)} \mathrm{e}^{-ikB_s^j}.
\end{aligned}
$$

証明．汎関数積分表示 (2.48) から

$$
\begin{aligned}
&(f \otimes \mathrm{e}^{\alpha\phi(\rho_1)} 1\!\!1, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes \mathrm{e}^{\beta\phi(\rho_2)} 1\!\!1) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \Big[\bar{f}(B_{-T}) h(B_T) \mathrm{e}^{-\int_{-T}^{T} V(B_s) ds} \\
&\times \mathbb{E}_{\mu_E} [\mathrm{e}^{\bar{\alpha}\phi_E(\delta_{-T} \otimes \rho_1)} \mathrm{e}^{\beta\phi_E(\delta_T \otimes \rho_2)} \mathrm{e}^{g\phi_E(-\sum_{j=1}^{N} \int_{-T}^{T} \delta_s \otimes \tilde{\varphi}_\varepsilon(\cdot - B_s^j) ds)}] \Big] \mathrm{e}^{-2Tg^2 N \varphi_\varepsilon(0,0)}.
\end{aligned}
$$

すぐに

$$
\mathbb{E}_{\mu_E} \left[\mathrm{e}^{\bar{\alpha}\phi_E(\delta_{-T} \otimes \rho_1)} \mathrm{e}^{\beta\phi_E(\delta_T \otimes \rho_2)} \mathrm{e}^{g\phi_E(-\sum_{j=1}^{N} \int_{-T}^{T} \delta_s \otimes \tilde{\varphi}_\varepsilon(\cdot - B_s^j) ds)} \right] \mathrm{e}^{-2Tg^2 N \varphi_\varepsilon(0,0)} = \mathrm{e}^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} + \frac{1}{4}\xi_\varepsilon}.
$$

ここで ξ_ε は ξ で $1\!\!1_\Lambda^\perp(k)$ を $1\!\!1_\Lambda^\perp(k) \mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2/2}$ に置換えたもである．よって

$$
\begin{aligned}
&(f \otimes \mathrm{e}^{\alpha\phi(\rho_1)} 1\!\!1, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes \mathrm{e}^{\beta\phi(\rho_2)} 1\!\!1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) \mathrm{e}^{-\int_{-T}^{T} V(B_s) ds} \mathrm{e}^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} + \frac{1}{4}\xi_\varepsilon} \right].
\end{aligned}
$$

適当な定数 C が存在して $\xi_\varepsilon \leq C$ がパスと $\varepsilon \geq 0$ に一様に成り立つ．その結果補題 2.16 と同様にしてこの補題も証明できる． □

稠密な部分空間 $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ を次で定義しよう:

$$\mathscr{D} = \text{L.H.}\{f \otimes \mathbb{1} \,|\, f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})\} \cup \\ \{f \otimes F(\phi(f_1), \ldots, \phi(f_n))\mathbb{1} \,|\, F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), 1 \le j \le n, n \in \mathbb{N}, f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})\}.$$

補題 2.18 から次の結果が即座に従う:

補題 2.19 $\Phi = f \otimes F(\phi(u_1), \ldots, \phi(u_n))\mathbb{1}$, $\Psi = h \otimes G(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_m))\mathbb{1} \in \mathscr{D}$ としよう. このとき

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}(\Phi, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N\varphi_\varepsilon(0,0))}\Psi) = (2\pi)^{-(n+m)/2}\int_{\mathbb{R}^{n+m}} dK_1 dK_2 \overline{\widehat{F}(K_1)}\widehat{G}(K_2) \\ \times \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}} + \frac{1}{4}\xi(K_1,K_2)}\right]. \tag{2.50}$$

ここで

$$\xi(K_1, K_2) = -\|K_1 \cdot u/\sqrt{\omega}\|^2 - \|K_2 \cdot v/\sqrt{\omega}\|^2 - 2(K_1 \cdot u/\sqrt{\omega}, \mathrm{e}^{-2T\omega}K_2 \cdot v/\sqrt{\omega}) \\ - 2ig\sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{K_1 \cdot \widehat{u}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k)\mathrm{e}^{-|s-T|\omega(k)}\mathrm{e}^{-ikB_s^j} \\ + 2ig\sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{K_2 \cdot \widehat{v}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k)\mathrm{e}^{-|s+T|\omega(k)}\mathrm{e}^{-ikB_s^j},$$

$u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_m)$.

証明. $F(\phi(f_1), \ldots, \phi(f_n))\mathbb{1} = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{F}(K)\mathrm{e}^{i\phi(K \cdot f)}\mathbb{1}dK$ に気をつければ

$$(\Phi, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N\varphi_\varepsilon(0,0))}\Psi) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{(n+m)/2}}\int_{\mathbb{R}^{m+n}} dK_1 dK_2 \overline{\widehat{F}(K_1)}\widehat{G}(K_2)(f \otimes \mathrm{e}^{-i\phi(K_1 \cdot f)}\mathbb{1}, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N\varphi_\varepsilon(0,0))}h \otimes \mathrm{e}^{-i\phi(K_2 \cdot h)}\mathbb{1}).$$

よって主張は補題 2.18 から従う. □

この論文の最も本質的な部分が $H_\varepsilon - g^2 N\varphi_\varepsilon(0,0)$ の下からの一様有界性を示すことにある.

系 2.20 ε に依らない定数 C があって

$$\int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x[f(B_{-T})h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}] \le C\|f\|\|h\| \tag{2.51}$$

が $f, h \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\varepsilon \ge 0$, に対して成り立ち,

$$C \le \sup_{x \in \mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{-2\int_0^{2T} V(B_s + x)ds}\mathrm{e}^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x) + X_\varepsilon^T(x) + Y_\varepsilon^T(x) + Z_\varepsilon^T(x))}]\right)^{1/2}. \tag{2.52}$$

証明. これは (2.37) からしたがう. □

系 **2.21** 定数 $C\in\mathbb{R}$ があって $H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0)>C$ が $\varepsilon>0$ に一様に成り立つ.

証明. この証明で a_j, b_j は正の定数で $\varepsilon\geq 0$ と T に依らない. すぐに

$$\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)}]\leq a_1\mathrm{e}^{b_1T}\quad\text{and}\quad \mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{Z_\varepsilon^T(x)}]\leq a_2\mathrm{e}^{b_2T}$$

がわかる. (2.29) と (2.36) から

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{X_\varepsilon^T(x)}]\leq a_3\mathrm{e}^{b_3T}\quad\text{and}\quad \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{Y_\varepsilon^T(x)}]\leq a_4\mathrm{e}^{b_4\tau T}$$

がわかる. Appendix A) を参照せよつ.

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]\\&\leq\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{4S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)}\right]\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{8X_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^{1/4}\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{16Y_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^{1/8}\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{32Z_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^{1/16}\end{aligned}$$

なので定数 a_5 と b_5 が存在して

$$\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]\right)^{1/2}\leq a_5\mathrm{e}^{b_5T}\tag{2.53}$$

が全ての $T>0$ で成立する. 関数

$$W(x^1,\dots,x^N)=\sum_{j=1}^N|x^j|^2$$

を考えよう. H_ε で V を δW に置換えたものを $H_\varepsilon(\delta)$ と表す. もちろん $\delta\geq 0$. そうすれば $-\frac12\sum_{j=1}^N\Delta_j+\delta W$, $\delta>0$, はコンパクトレゾルベントをもつので $H_\varepsilon(\delta)$ $(\delta>0)$ は一意的な基底状態 $\Psi_{\mathrm{g}}(\delta)$ をもつことが [Spo98, Ger00] で示されている. 注意 2.22 を参照せよ. ファインマン・カッツ公式から $\mathrm{e}^{-TH_\varepsilon(\delta)}$ は正値改良型作用素である. よって $\Psi_{\mathrm{g}}(\delta)>0$ となる. 特に $(f\otimes 1\!\!1,\Psi_{\mathrm{g}}(\delta))\neq 0$ が任意の $0\leq f\in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ. ここで $f\not\equiv 0$. その結果

$$\inf\sigma\left(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0)\right)=-\lim_{T\to\infty}\frac1T\log(f\otimes 1\!\!1,\mathrm{e}^{-T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}f\otimes 1\!\!1)\tag{2.54}$$

が $0\leq f\in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ. (2.51) と (2.53) から

$$\begin{aligned}&(f\otimes 1\!\!1,\mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}f\otimes 1\!\!1)=\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x[f(B_{-T})f(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T\delta W(B_s)ds}\mathrm{e}^{S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]\\&\leq\|f\|^2\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left(\left[\mathrm{e}^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]\right)^{1/2}\leq\|f\|^2a_5\mathrm{e}^{b_5T}.\end{aligned}$$

これは (2.54) から

$$\inf\sigma\left(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0)\right)+\frac{b_5}{2}\geq 0,\quad \delta>0,\tag{2.55}$$

を意味する．大事なことは b_5 が δ に依っていないことである．よって

$$|(F, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}G)| \le \|F\|\|G\|\mathrm{e}^{b_5T} \tag{2.56}$$

が従う．$F, G \in \mathscr{H}$ としよう．ファインマン・カッツ公式 (2.48) から

$$\begin{aligned}&(F, \mathrm{e}^{-2TH_\varepsilon(\delta)}G)\\&= \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x\left[\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T \delta W(B_s)ds}\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[J_{-T}F(B_{-T})\cdot \mathrm{e}^{-\phi_{\mathrm{E}}(\int_{-T}^T\sum_{j=1}^N \delta_s\otimes\tilde{\varphi}(\cdot-B_s^j)ds)}J_TG(B_T)\right]\right].\end{aligned}$$

ルベーグ優収束定理から

$$\lim_{\delta\downarrow 0}(F, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}G) = (F, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon(0)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}G).$$

(2.56) の両辺の極限 $\delta\downarrow 0$ をとれば

$$|(F, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon(0)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}G)| \le \|F\|\|G\|\mathrm{e}^{b_5T}. \tag{2.57}$$

これは (2.55) が $\delta = 0$ でも従うことをいっている．$H_\varepsilon = H_\varepsilon(0) + V$ かつ V は有界なので

$$\inf\sigma(H_\varepsilon + g^2N\varphi_\varepsilon(0,0)) + \frac{b_5}{2} + \|V\|_\infty \ge 0.$$

$C = -\frac{b_5}{2} - \|V\|_\infty$ とおけば系が従う． □

注意 2.22 Σ を自己共役作用素 $-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \Delta_j + V$ の本質的スペクトルの下限とし $E = \inf\sigma(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\Delta_j + V)$ とする．このとき [Spo98] で汎関数積分をつかって

$$\Sigma - E > \frac{N^2}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2}\beta(k)\mathbb{1}_\Lambda^\perp(k)dk$$

のとき H_ε は一意的な基底状態をもつことが示された ([LHB11, Theorem 6.6] も参照せよ)．特に $V(x^1, ..., x^N) = \delta\sum_{j=1}^N |x^j|^2$ のとき H_ε は一意的な基底状態を全ての $\varepsilon > 0$ と $\delta > 0$ でもつ．なぜならば $\Sigma - E = \infty$ なので．

主定理の証明をする．

定理 *2.2* の証明: $F, G \in \mathscr{H}, C_\varepsilon(F,G) = (F, \mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}G)$ としよう．補題2.18 によって $F, G \in \mathscr{D}$ に対して $C_\varepsilon(F,G)$ が $\varepsilon\downarrow 0$ で収束することがわかる．系 2.21 で示された一様な不等式

$$\|\mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}\| < \mathrm{e}^{-tC}$$

と $\mathscr{D}$ が $\mathscr{H}$ で稠密ということから $\{C_\varepsilon(F,G)\}_\varepsilon$ がコーシー列となる．$C_0(F,G) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} C_\varepsilon(F,G)$ とする．そうすれば $|C_0(F,G)| \le \mathrm{e}^{-tC}\|F\|\|G\|$. Riesz の定理より有界作用素 T_t で

$$C_0(F,G) = (F, T_tG), \quad F, G \in \mathscr{H}$$

となるものが存在する．よって $\mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))} = T_t$. さらに

$$\mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}\mathrm{e}^{-s(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))} = \mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{e}^{-(t+s)(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))} = T_{t+s}.$$

左辺 は T_tT_s なので T_t 半群性が従う．$\mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}$ は対称なので，T_t も対称．また汎関数積分表示 (2.50) から (F,T_tG) は $t=0$ で $F,G\in\mathscr{D}$ に対して連続になることもわかる．$\mathscr{D}$ は $\mathscr{H}$ で稠密，$\|T_t\|$ は $t=0$ の近傍で一様に有界なので，T_t は $t=0$ で強連続になる．半群版 Stone 定理 [LHB11, Proposition 3.26] によって下から有界な自己共役作用素 H_{ren} で $T_t=\mathrm{e}^{-tH_{\mathrm{ren}}}$, $t\geq 0$, となるものが存在することがわかる．$E_\varepsilon=-g^2N\varphi_\varepsilon(0,0)$ と置けば証明完了．□

上でみたようにくりこまれたハミルトニアン H_{ren} が存在することが示せた．そこで H_{ren} に対するペアポテンシャルも求める．

系 2.23 H_{ren} のペアポテンシャルは $\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}$ である．

証明．補題 2.16 によって

$$(f\otimes\mathbb{1},\mathrm{e}^{-2TH_{\mathrm{ren}}}h\otimes\mathbb{1})=\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^{T}V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}\right]. \tag{2.58}$$

□

3　弱結合極限における実行ポテンシャル

この章ではカットオフ関数を $\varphi_\varepsilon(k)=(2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2/2}$ とする．そして dispersion relation は $\omega_\nu(k)=\sqrt{|k|^2+\nu^2}$ とする．ここで $\nu>0$ である．そうするとハミルトニアンは $L^2(\mathbb{R}^{3N})\otimes\mathscr{F}$ 上に

$$H_\varepsilon=H_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}+H_{\mathrm{I}}$$

で与えらる．ここで $H_{\mathrm{p}}=\sum_{j=1}^N(-\frac{1}{2}\Delta_j)+V(x_1,\ldots,x_N)$ は N-体シュレディンガー作用素で，$H_{\mathrm{f}}=\int_{\mathbb{R}^3}\omega_\nu(k)a^*(k)a(k)dk$ は自由ハミルトニア．H_ε をスケーリングする．生成消滅作用素を κa と κa^* とする．このとき H_ε は

$$H_\varepsilon(\kappa)=H_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1}+\kappa^2\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}+\kappa H_{\mathrm{I}} \tag{3.1}$$

となる．このスケーリングは変換 $\omega\mapsto\kappa^2\omega$, $\widehat{\varphi}\mapsto\kappa^2\widehat{\varphi}$ を導きだす．一方エネルギーくりこみ項は

$$E_\varepsilon(\kappa)=-g^2N\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2}}{2(2\pi)^3\omega_\nu(k)}\frac{\kappa^2}{\kappa^2\omega_\nu(k)+|k|^2/2}dk \tag{3.2}$$

のようにスケーリングされる．定理 2.2 から自己共役作用素 $H_{\mathrm{ren}}(\kappa)$ で

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(f\otimes\mathbb{1},\mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon(\kappa)-E_\varepsilon(\kappa))}h\otimes\mathbb{1})=(f\otimes\mathbb{1},\mathrm{e}^{-tH_{\mathrm{ren}}(\kappa)}h\otimes\mathbb{1}) \tag{3.3}$$

となるものがある．次の命題は [Dav79, Hir99] で示されている．

命題 3.1

$$\mathrm{s}-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\kappa\to\infty}\mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon(\kappa)-E_\varepsilon(\kappa))}=\mathrm{e}^{-th_{\mathrm{eff}}}\otimes P_\Omega.$$

ここで P_Ω は $\{z\mathbb{1}\,|\,z\in\mathbb{C}\}\subset\mathscr{F}$ への射影で，実行ハミルトニアンは

$$h_{\mathrm{eff}}=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\Delta_j+V(x^1,\ldots,x^N)-\frac{g^2}{4\pi}\sum_{i<j}\frac{\mathrm{e}^{-\nu|x_i-x_j|}}{|x_i-x_j|}.$$

さて, くりこまれたハミルトニアン $H_{\mathrm{ren}}(\kappa)$ のスケーリングを考えてみよう. 定理2.2 から
つぎの補題が従う:

補題 3.2 $f, h \in L^2(\mathbb{R}^3)$ のとき

$$\lim_{\kappa\to\infty}(f\otimes 1\!\!1, \mathrm{e}^{-tH_{\mathrm{ren}}(\kappa)}h\otimes 1\!\!1) = (f, \mathrm{e}^{-th_{\mathrm{eff}}}h). \tag{3.4}$$

証明. 補題2.18 から

$$(f\otimes 1\!\!1, \mathrm{e}^{-2TH_{\mathrm{ren}}(\kappa)}h\otimes 1\!\!1) = \int_{\mathbb{R}^3} dx\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}(\kappa)}\right]. \tag{3.5}$$

ここで

$$\begin{aligned} S_0^{\mathrm{ren}}(\kappa) &= 2\sum_{i\neq j}^N \int_{-T}^T \varphi_0(B_s^i - B_s^j, 0, \kappa)ds + 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^T \nabla\varphi_0(B_t - B_s, t-s, \kappa)\cdot dB_t \\ &\quad - 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varphi_0(B_T - B_s, T-s, \kappa)ds, \end{aligned} \tag{3.6}$$

そして

$$\varphi_0(x,t,\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{e}^{-ik\cdot x}\mathrm{e}^{-\kappa^2\omega(k)|t|}}{2\omega(k)} \frac{\kappa^2}{\kappa^2\omega(k)+|k|^2/2} 1\!\!1_\Lambda^\perp(k)dk. \tag{3.7}$$

特に $t=0$ のとき

$$g^2\sum_{i\neq j}^N \varphi_0(x^i - x^j, 0, \kappa)ds \;\to\; \frac{g^2}{4\pi}\sum_{i<j}\frac{\mathrm{e}^{-\nu|x^i-x^j|}}{|x^i-x^j|},$$

$t\neq 0$ のとき,

$$|\nabla\varphi_0(X,t,\kappa)| \to 0, \quad |\varphi_0(X,t,\kappa)| \to 0$$

$(\kappa\to\infty)$ が各点ごとに示せる. 補題2.16 と同様にして

$$\begin{aligned} &\lim_{\kappa\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3} dx\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}(\kappa)}\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dx\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{4\pi}\sum_{i<j}\int_{-T}^T \frac{\mathrm{e}^{-\nu|B_s^i - B_s^j|}}{|B_s^i - B_s^j|}ds}\right]. \end{aligned}$$

□

系 3.3 $F, G \in \mathscr{D}$ のとき

$$\lim_{\kappa\to\infty}(F, \mathrm{e}^{-tH_{\mathrm{ren}}(\kappa)}G) = (F, \mathrm{e}^{-th_{\mathrm{eff}}}\otimes P_\Omega G). \tag{3.8}$$

証明. これは補題2.18 と補題 3.2 から従う. □

A Kato-クラス

$\mathscr{K}_d$ は次を満たす V 全体である:

$$\lim_{t\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x\left[\int_0^t |V(B_s)|ds\right]=0. \tag{A.1}$$

$\mathscr{K}_d$ を Kato-クラスという.

命題 A.1 もし $V\in\mathscr{K}_d$ ならば $W(x)=\sum_{i\neq j}^N V(x^i-x^j)\in\mathscr{K}_{dN}$. ここで $x=(x^1,...,x^N)\in\mathbb{R}^{dN}$ である.

例えば [CFKS08, p.7] を参照せよ. Kato-クラスの同値な定義が知られている. $V\in\mathscr{K}_d$ であるための必要十分条件は

$$\lim_{r\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|<r}|g(x-y)V(y)|dy=0 \quad \text{with} \quad g(x)=\begin{cases}|x| & d=1\\ -\log|x| & d=2\\ |x|^{2-d} & d\geq 3.\end{cases} \tag{A.2}$$

この定義から次が導ける.

命題 A.2 もし $V\in\mathscr{K}_d$ ならば $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|g(x-y)V(y)|dy<\infty$.

Kato-クラスポテンシャルの例をあげる. (1) $d=3$ で $|x|^{-(2-\varepsilon)}(\varepsilon>0)$, (2) $V\in L^p(\mathbb{R}^d)+L^\infty(\mathbb{R}^d)$. ここで $p=1$ $(d=1)$, $p>d/2(d\geq 2)$. また Kato-クラスポテンシャル V に対して, $e^{\int_0^t V(B_s)ds}$ がウィナー測度に関して可積分であることもわかる.

命題 A.3 $0\leq V\in\mathscr{K}_d$ としよう. このとき $\beta,\gamma>0$ で次を満たすものが存在する:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x[e^{\int_0^t V(B_s)ds}]<\gamma e^{t\beta}. \tag{A.3}$$

特に, もし $V\in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(p=1(d=1),\ p>d/2(d\geq 2))$ ならば $\beta=C\|V\|_p$ となる C が存在する.

証明. [LHB11, Lemma 3.38] を参照せよ. □

B シュレディンガー表現とユークリッド場

ボゾンフォック空間 $\mathscr{F}$ が $L^2(Q,\mu)$ とユニタリー同値なことはよく知られている. ここで (Q,Σ,μ) 上のガウス型確率変数族 $\{\phi_0(f),\ f\in H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)\}$ で $\phi_0(f)$ は f に関して線形, 平均ゼロ, 分散が $\mathbb{E}_\mu[\phi_0(f)\phi_0(g)]=\frac{1}{2}(f,g)_{H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)}$ で与えられるものを考える. このとき真空 $1\!\!1_{\mathscr{F}}$ は $1\!\!1_{L^2(Q)}\in L^2(Q)$ と, スカラー場 $\phi(f)$ は $\phi_0(f)$ とユニタリー同値になる. ここで $\phi_0(f)$ はかけ算作用素とみている. ウィック積 : $\prod_{j=1}^n\phi_0(f_j)$: によって生成される有限線形和全体は $L^2(Q)$ で稠密になる. ここでウィック積は帰納的に

$$:\phi_0(f):\ =\phi_0(f),$$
$$:\phi_0(f)\prod_{j=1}^n\phi_0(f_j):\ =\phi_0(f):\prod_{j=1}^n\phi_0(f_j):-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(f,f_i)_{H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)}:\prod_{j\neq i}^n\phi_0(f_j):$$

のように定義される．これによって $\mathscr{F}$ と $L^2(Q)$ を同一視する．ファインマン・カッツ公式を導くためにユークリッド場が必要である．ガウス型確率変数族 $\{\phi_{\mathrm{E}}(F),\ F\in H_{-1}(\mathbb{R}^4)\}$ で平均ゼロで分散 $\mathbb{E}_{\mu_E}[\phi_E(F)\phi_E(G)]=\frac{1}{2}(F,G)_{H_{-1}(\mathbb{R}^4)}$ となるものを確率測度空間 (Q_E,Σ_E,μ_E) 上に定義する．$f\in H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ に対して関係 $\delta_t\otimes f\in H_{-1}(\mathbb{R}^4)$ と $\|\delta_t\otimes f\|_{H_{-1}(\mathbb{R}^4)}=\|f\|_{H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)}$ が成立する．ここで $\delta_t(x)=\delta(x-t)$ は t に重みをもつデルタ関数である．(2.48) の中の等長作用素族 $J_t:L^2(Q)\to L^2(Q_{\mathrm{E}})$, $t\in\mathbb{R}$, は次で定義される:

$$J_t1\!\!1_{L^2(Q)}=1\!\!1_{L^2(Q_{\mathrm{E}})}\quad\text{and}\quad J_t\colon\prod_{j=1}^m\phi(f_j):\ =\ :\prod_{j=1}^m\phi_{\mathrm{E}}(\delta_t\otimes f_j):$$

$\mathscr{F}\cong L^2(Q)$ の同一視のもと $(J_tF,J_sG)_{L^2(Q_{\mathrm{E}})}=(F,\mathrm{e}^{-|t-s|H_{\mathrm{f}}}G)_{\mathscr{F}}$ となる．詳しいことは [LHB11, Chapter 5] をみよ．

C　作用素論的なくりこみ

Nelson[Nel64a] で示されたくりこみ理論を復習しておこう．いま場の作用素を

$$\phi_{\widehat{\varphi}}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(a^*(k)e^{-ikx}\frac{\widehat{\varphi}(-k)}{\sqrt{\omega}}+a(k)e^{ikx}\frac{\widehat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega}}\right)dk$$

とし，その運動量作用素を

$$\pi_{\widehat{\varphi}}(x)=\frac{i}{\sqrt{2}}\int\left(a^*(k)e^{-ikx}\sqrt{\omega}\widehat{\varphi}(-k)-a(k)e^{ikx}\sqrt{\omega}\widehat{\varphi}(k)\right)dk$$

とする．このとき交換関係が従う:

$$[\phi_{\widehat{\varphi}}(x),\pi_{\hat{\lambda}}(y)]=i\int e^{ik(y-x)}\widehat{\varphi}(-k)\hat{\lambda}(k)dk,\tag{C.1}$$

$$[H_{\mathrm{f}},\phi_{\widehat{\varphi}}(x)]=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(a^*(k)e^{-ikx}\sqrt{\omega}\widehat{\varphi}(-k)-a(k)e^{ikx}\sqrt{\omega}\widehat{\varphi}(k)\right)dk=-i\pi_{\widehat{\varphi}}(x),\tag{C.2}$$

$$[H_{\mathrm{f}},\pi_{\widehat{\varphi}}(x)]=\frac{i}{\sqrt{2}}\int\left(a^*(k)e^{-ikx}\sqrt{\omega}\omega\widehat{\varphi}(-k)+a(k)e^{ikx}\sqrt{\omega}\omega\widehat{\varphi}(k)\right)dk=i\phi_{\omega^2\widehat{\varphi}}(x).\tag{C.3}$$

Nelson 模型のハミルトニアン

$$H_N=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N P_j^2+H_{\mathrm{f}}+\sum_{j=1}^N\phi(x_j)$$

の Gross 変換を考えよう．

$$\pi(x)=\sum_{j=1}^N\frac{i}{\sqrt{2}}\int\left(a^*(k)e^{-ikx_j}\beta(k)\widehat{\varphi}(-k)-a(k)e^{ikx_j}\beta(k)\widehat{\varphi}(k)\right)dk$$

とする．ここで $\beta(k)=\frac{1}{\omega+|k|^2/2}\frac{1}{\sqrt{\omega}}$. (2.5) で β を定義したが，この章では [Nel64a] にならって β をこのように定義する．このとき

$$e^{-i\pi}P_je^{i\pi}=P_j+A_j+A_j^*.$$

ここで

$$A_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\int a^*(k)e^{-ikx_j}k\beta(k)\widehat{\varphi}(-k)dk, \quad A_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\int a(k)e^{ikx_j}k\beta(k)\widehat{\varphi}(k)dk. \tag{C.4}$$

さらに $(P_j + A_j + A_j^*)^2$ を展開すると

$$\begin{aligned}(P_j + A_j + A_j^*)^2 =& P_j^2 + 2P_jA_j + 2A_j^*P_j + A_j^2 + 2A_j^*A_j + A_j^{*2} \\ &+ [P_j, A_j^*] + [A_j, P_j] + [A_j, A_j^*].\end{aligned}$$

ここに現れた交換子を計算すると

$$\begin{aligned}[P_j, A_j^*] &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int a^*(k)e^{-ikx_j}k^2\beta(k)\widehat{\varphi}(-k)dk, \\ [A_j, P_j] &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int a(k)e^{ikx_j}k^2\beta(k)\widehat{\varphi}(-k)dk, \\ [A_j, A_j^*] &= \frac{1}{2}\int |k|^2\beta^2(k)\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk\end{aligned}$$

となる. 次に

$$\begin{aligned}e^{-i\pi}\left(\sum_{j=1}^N \phi(x_j)\right)e^{i\pi} &= \sum_{j=1}^N \phi(x_j) + \sum_{i,j}^N [\phi(x_i), \pi(x_j)] \\ &= \sum_{j=1}^N \phi(x_j) - \sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_j - x_i)}\frac{\beta(k)}{\sqrt{\omega}}\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk.\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}e^{-i\pi}H_{\mathrm{f}}e^{i\pi} =& H_{\mathrm{f}} + [H_{\mathrm{f}}, i\pi] + \frac{1}{2}[[H_{\mathrm{f}}, i\pi], i\pi] \\ =& H_{\mathrm{f}} - \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}}\int \left(a^*(k)e^{-ikx_j}\omega\beta(k)\widehat{\varphi}(-k) + a(k)e^{ikx_j}\omega\beta(k)\widehat{\varphi}(k)\right)dk \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}^N \int \omega\beta^2(k)e^{ik(x_j - x_i)}\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk.\end{aligned}$$

全て合わせると

$$
\begin{aligned}
&e^{-i\pi}He^{i\pi}\\
&= P_j^2 + 2P_jA_j + 2A_j^*P_j + A_j^2 + 2A_j^*A_j + A_j^{*2} + \sum_j \phi(x_j) + H_{\mathrm{f}}\\
&- \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}} \int (a^*(k)e^{-ikx_j}\widehat{\varphi}(-k) + a(k)e^{ikx_j}\widehat{\varphi}(k))\omega\beta(k)dk && (C.5)\\
&- \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_j \int \left(a^*(k)e^{-ikx_j}k^2\beta(k)\widehat{\varphi}(-k) + a(k)e^{ikx_j}k^2\beta(k)\widehat{\varphi}(-k)\right)dk && (C.6)\\
&- \sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_i-x_j)}\frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk && (C.7)\\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_i-x_j)}\omega\beta^2(k)\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk && (C.8)\\
&+ \frac{1}{4}N\int |k|^2\beta^2(k)\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk && (C.9)
\end{aligned}
$$

となる．β の定義より $(C.5)+(C.6)+\sum_j \phi(x_j) = 0$ がわかる．また $(C.7)-(C.9)$ の対角成分を足し合わせると

$$
\begin{aligned}
&-N\int \frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk + \frac{1}{2}N\int \omega\beta^2(k)\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk + N\frac{1}{4}\int |k|^2\beta^2(k)\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk\\
&= -\frac{1}{2}N\int \frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
e^{-i\pi}He^{i\pi} &= P_j^2 + 2P_jA_j + 2A_j^*P_j + A_j^2 + 2A_j^*A_j + A_j^{*2} + H_{\mathrm{f}} && (C.10)\\
&- \sum_{i\neq j}\int e^{ik(x_i-x_j)}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\omega}} + \omega\beta^2(k)\right)\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk && (C.11)\\
&- \frac{1}{2}N\int \frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk && (C.12)
\end{aligned}
$$

をえる．(C.10) は 2 次形式の項, (C.11) は実行ポテンシャル項, そして (C.12) はくりこまれる項である．Nelson[Nel64a] では, $\widehat{\varphi}(k) = \mathbb{1}_{|k|<\Lambda}$ として, $\Lambda \to \infty$ の極限で, この右辺から (C.12) を引き去ったものが 2 次形式の意味で, 一様に収束すること, および $e^{i\pi(x)}$ が強収束することを示している．

D 実行質量

Gross 変換したハミルトニアン H_G の実行質量 (effective mass) を求めてみよう．粒子数を 1 とし, その裸の質量を m, 場と粒子の結合定数を $g \in \mathbb{R}$ とおく．そうすると外場ポテンシャ

ルを $V=0$ とおいた Nelson ハミルトニアンは

$$H_N = -\frac{1}{2m}\Delta + H_{\mathrm{f}} + g\phi(x)$$

となる．これを Gross 変換したものを H_G と書くことにする．形式的な計算をする．$V=0$ なので H_G は並行移動不変 (i.e., $[-i\nabla_j \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes P_{f,j}, H_G] = 0$) となり，$H_G$ を全運動量 $-i\nabla_j \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes P_{f,j}$ のスペクトルで分解できる．その結果

$$H_G = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_G(P)dP$$

となる．ここで $H_G(P)$ はフォック空間上の自己共役作用素で, 次で与えられる:

$$H_G(P) = \frac{1}{2m}(P-P_f)^2 + H_{\mathrm{f}} + \frac{g}{m}((P-P_f)A + A^*(P-P_f)) + \frac{g^2}{2}\frac{1}{m}(A^2 + 2A^*A * A^*A^*).$$

また $P_{f,j} = \int k_j a^*(k)a(k)dk$ は場の運動量作用素である．$H_G(P)$ の基底状態エネルギー $E(P)$ を

$$E(P) = E(0) + \frac{1}{2m_{\mathrm{eff}}}|P|^2 + O(|P|^3)$$

と展開して $|P|^2$ の係数の逆数を実行質量 m_{eff} と定義する．これを形式的に結合定数 g で展開しよう．$H_G(P)\Phi(P) = E(P)\Phi(P)$ の両辺を形式的に $P = 0 \in \mathbb{R}^3$ で 2 回微分して, 公式

$$\frac{m}{m_{\mathrm{eff}}} = 1 - \frac{2}{3m}\frac{((P_f - g(A+A^*))\Phi(0), (H_G(0)-E(0))^{-1}(P_f - g(A+A^*))\Phi(0))}{(\Phi(0),\Phi(0))}$$

をえる．摂動理論から g が十分小さければ

$$\frac{m_{\mathrm{eff}}}{m} = 1 + \frac{2}{3m}g^2(P_f A^*\Omega, \frac{1}{H_0}P_f A^*\Omega) + O(|g|^3)$$

となる．ここで $H_0 = \frac{1}{2m}P_f^2 + H_{\mathrm{f}}$ である．よって

$$m_{\mathrm{eff}} = m + g^2\frac{2}{3}\int \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega}\frac{|k|^2}{(|k|^2/2m+\omega)^3}dk + O(|g|^3)$$

となり, 紫外切断を外すとき, m_{eff} の g^2 の係数が収束することがわかる．

References

[Ara01] A. Arai, Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation, *Rev. Math. Phys.* **13** (2001), 1075–1094.

[BFS98] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles, *Adv. Math.* **137** (1998), 299–395.

[CFKS08] H. L. Cycon, R. G. Frose, W. Kirsch and B. Simon, *Schrödinger Operators*, 2nd ed., Springer 2008.

[Dav79] E. B. Davies, Particle-boson interactions and weak coupling limit, *J. Math. Phys.* **20** (1979), 345–351.

[Ger00] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. Henri Poincaré* **1** (2000), 443–459.

[GHPS12] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Removal of UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients, *Lett. Math. Phys.* **101** (2012), 305–322.

[Hir06] M. Hirokawa, Infrared catastrophe for Nelson's model — non-existence of ground state and soft-boson divergence, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **42** (2006), 897–922.

[HHS05] M. Hirokawa, F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state for point particles interacting through a massless scalar bose field, *Adv. Math.* **191** (2005), 339–392.

[Hir99] F. Hiroshima, Weak coupling limit removing an ultraviolet cut-off for a Hamiltonian of particles interacting with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **40** (1999), 1215–1236.

[LHB11] J. Lőrinczi, F. Hiroshima and V. Betz, *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space*, de Gruyter Studies in Mathematics **34**, 2011.

[LMS02] J. Lőrinczi, R.A. Minlos and H. Spohn, The infrared behavior in Nelson's model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), 1–28.

[Nel64a] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1190–1197.

[Nel64b] E. Nelson, Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, in: *Proc. Conference on Analysis in Function Space*, W. T. Martin and I. Segal (eds.), p. 87, MIT Press, 1964.

[Sas05] I. Sasaki, Ground state of the massless Nelson model in a non-Fock representation, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 102107.

[Spo98] H. Spohn, Ground state of quantum particle coupled to a scalar boson field, *Lett. Math. Phys.* **44** (1998), 9–16.