数理解析研究所講究録
第 1865 巻 2013 年 27-33

動的幾何と静的幾何の棲み分けに関する考察

木更津工業高等専門学校・基礎学系　金子　真隆 (Masataka Kaneko)
Fuculty of Fundamental Research,
Kisarazu National College of Technology
東邦大学・薬学部　高遠　節夫 (Setsuo Takato)
Fucluty of Pharmaceutical Science,
Toho University

1　はじめに

Fischbein(1)) は、学習者によって生産的な思考が行われるための条件として、学習場面で扱われる題材に「信頼に足る現実性 (credible reality)」が賦与されていることを挙げている。これは含蓄のある精妙な言い回しであるが、一方で、賦与されるのに適切な現実性とは何か、あるいはそれをどのように保証するかということが、扱われるテーマによって変わり得る点にも注意しなくてはならない。実際 Fischbein 自身も、こうした「現実性」を担う「モデル」について分類し、同じ分野でも思考の段階によって、使われるモデルの意味合いが異なりうることを分析している。また、Gueudet(2)) は、線形代数のような抽象度の高い分野であっても、幾何的なモデル (またはグラフィックス) の利用が学習者の助けとなり得ることを例証している。

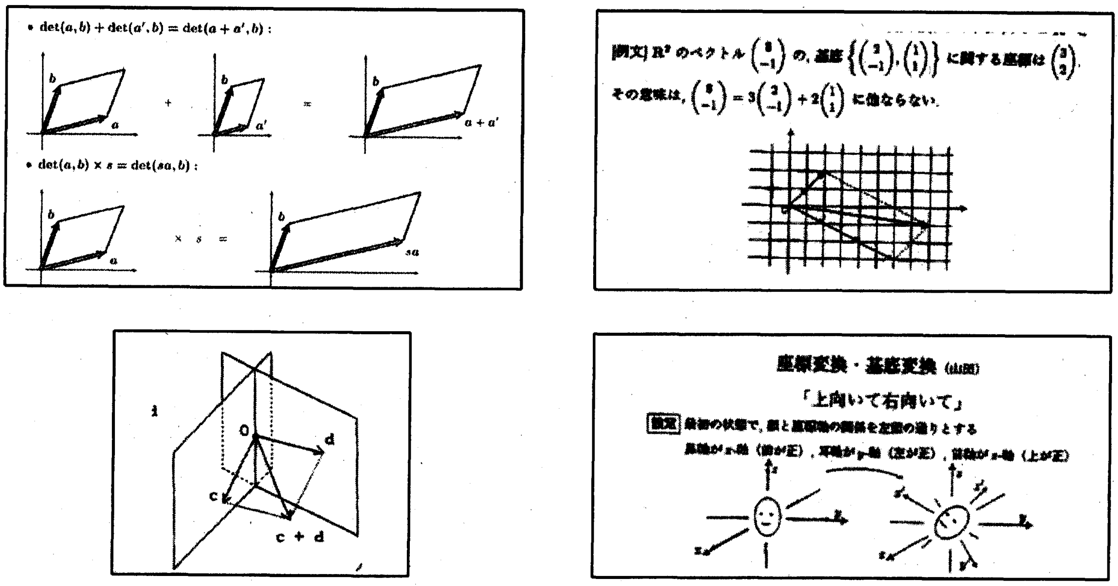

図 1 線形代数の印刷配布教材での挿図利用報告例

以上の問題を実際の教育現場におきかえて考えると、「何をどのように見せるか」という問題が浮かび上がる。ここには当然見せる側 (教育者) と見せられる側 (学習者) の2つの問題が含まれる。見せる側の問題については、配布教材に関するアンケート調査や教科書における図の利用状況の調査の結果をふまえ、本講究録などでも報告してきた (3),4))。その中で明らかになったのは、印刷配布教材で思いのほか図の利用が進んでいないこと、特に精密な図が求められる微分方程式や、見やすい3次元の図が求められる線形代数・多変数解析といった分野でそれが顕著なことである。たとえば、線形代数に関わるものとして400人近い数学教員から寄せられた事例は、図1に示す4点のみであった。このように図の利用が進まない背景としては、いろいろな要因を考え得るものの、技術的な問題が小さくないことをこれまで繰り返し指摘してきた。もちろん、機能を充実させつつある数式処理ソフト (CAS) や動的幾何ソフト (DGS) を用いれば、PCやプロジェクターのディスプレイ上に高精細な図を提示することは可能である。しかし、紙媒体の上に提示するとなると話は別で、ここに上記の技術的な問題が発生すると考えられる。高等数学教育で印刷教材を編集する手段の主流は LaTeX であるため、ここにCASの描画出力を取り込むとすると、EPSないしはPDF形式にフォーマットした上で、\includegraphics コマンドでそれらを呼び出すというのが最も一般的である。この方法は手軽で良いのだが、教材として使うとなると、サイズや形状の正確さが必ずしも保証されない上に、コスト的な制約からコピーが単色で行われる場合、色彩や陰影がついていることがかえってあだになるという例も少なくない。このため最近では、一部のDGSやその他ソフトウェアにおいて、描画データを LaTeX に本来備えられている描画コードに変換して出力する機能を装備される例が出てきている (5),6),7))。また、我々が開発してきた LaTeX 挿図用 CAS マクロパッケージ KETpic (8)) は、CASの計算機能と LaTeX の描画機能を結びつけるための1つの方法論である。

動的幾何も含め、こうして図の提示手段の選択肢が広がっていることは一見好ましいことのようにも思われるが、見せられる側・見せる側の双方に立ってきた経験からすると、どこでどのような提示の仕方をするのが望ましいのか、かえって難しくなってきているきらいもある。これは言い換えれば、教育効果をどう検証するかという問題に帰着され、我々としてもいくつかの方法を試行しているが (4),9),10))、客観的な因果分析がなかなか難しい状況である。逆に、このような試行を積み重ねる中で、どのような視点を座標軸として検証するのかはっきりさせないと、検証そのものがなかなか意味のあるものにならないのではないかという問題意識も芽生えつつある。本稿は、上にも触れた線形代数の分野の事例を用いつつ、主に見せられる側に立ってこうした座標軸をどう定めたらよいか、今後整理していくための基盤作りを目指したものである。

2 座標軸設定の考え方

現在見せる側に立っている人間も、かつては見せられる側に立っていた時期があったはずだが、その時の経験を思い起こしてみれば、図が数学的な思考プロセスに果たす役

割は多岐にわたることが納得されるはずである。従って、前節に述べた「座標軸」は単一のものではあり得ない。特に、同一の図であっても、学習者の数学的な発達段階によって、果たす役割が違ってくることには注意が必要である。たとえば、図1の左下の図の場合、ベクトル幾何を学ぶ学生がこれを見た時と、より理解が進んだ一般線形空間を学ぶ学生がこれを見た時とでは、意味合いが全然違ってくる。このことは、本講究録で以前触れた、「証明」に関する発達段階に応じたグラフィックスの役割に関する考察(11))とも深く関連する。

そもそも証明を含めた高等数学教育におけるグラフィックスの役割を考える上で、Harelの提唱した3つのprinciple(12))が参考になる。特に線形代数のような抽象度の高い分野の場合、concreteness principleを満たすために用いる図がgeneralizability principleとぶつかることが多いため、グラフィックスの利用がためらわれることになるが、necessity principleを満たすような事例の発掘に利用の活路があり得ることを4)で例証した。これは要約すると、「抽象的な概念をそのまま説明的に図示することは不可能に近いが、学習目標である概念の魅力的な応用例を早い段階で提示することにより学習の動機付けを与える上で、グラフィックスが大きな力を発揮しうる」ということである。たとえば図2は、線形変換の固有値と行列式(または立体の体積比)の関係について、対角化が可能な場合と不可能な場合とに分けて説明する上でのヒントとしてKETpicを用いて作成し、一定の効果が確認された例である。同時に、特に後者の図が効果を発揮するに至るまでには、学習者にとって長い思考プロセスを要することも報告した。

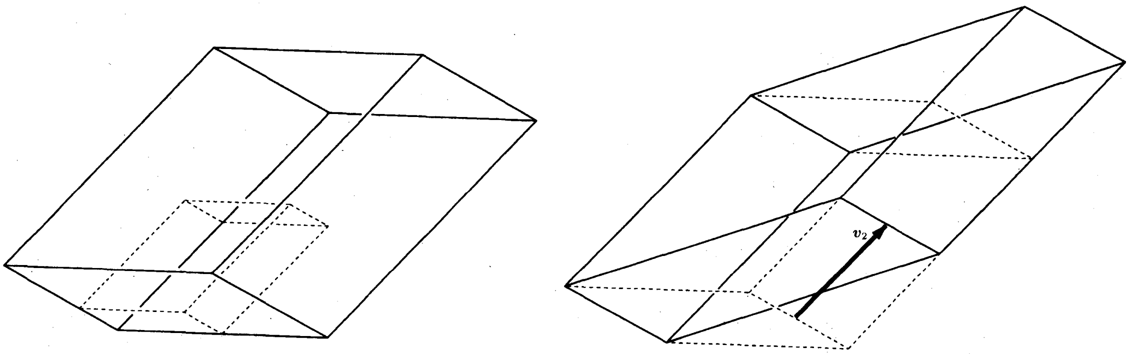

図2 「固有値の意味」の説明での利用例

このように、「魅力的な応用例を探す」上でグラフィックスを援用するということになれば、それを作成するソフトとしては出来ることが多いに越したことはないのは明らかである。なおかつ、少なからぬ応用例が動きを伴った物理的なものであるということを踏まえると、DGSやCASのアニメーション機能は、正確な数値計算に裏付けられたありのままのモデルを学習者の目の前に再現できる点で、学習者の立場からは最も頼りにできるものと位置づけられるであろう。しかし実際には、これらの教室での利用が日常茶飯とは程遠いという現実がある。もちろん技術的な問題やコストの問題もあるだろうが、本稿で考慮したいのは、学習者の立場から見た時に、これらの方法で作成し提示さ

れる図がどのように見えるかという点である。これについて、次の2つのことを指摘できる。

まず極端な例であるが、たとえば3次元の立体を提示する場合、学習者にとって最もわかりやすいのは実物を見せられることであろうが、これが学習者の認知への働きかけ方という観点から見てどうか、という点である。これについては脳科学の立場からいくつか先行研究があり (13))、立体の復元タスクにおいて、その投影図を用いた場合に比べ、実物の写真を用いた場合には脳の賦活がはるかに小さく、2次元情報から3次元情報を再現していくという学習目的に対して十分な効果が上がっているか極めて疑わしいという結果が報告されている。次に、教育者の立場から「動かせる」というメリットを生かしたと期待されるアイテムが、学習者の立場から見た時に「動いていってしまう」というデメリットとして働いてしまうことがないか、という点である。初歩的な例では、三角関数 $y = \sin ax$ のグラフを見せてその周期と係数 a との関係を把握させようとした場合、初学者にとって $y = \sin x$ のグラフの全体像を把握するだけでも大変なのに、a を連続的に動かされてしまうとなおさら分かりにくくなることはないか、といったケースである。学習者によっては、a として 1, 2, 3, 4 くらいの場合だけ示してもらった方が、かえってとらえやすいということは十分あり得る。

3次元の図形をどのように提示するかということと、パラメータを含んだ関数をどのように提示するかということとは、全くの別の種類の問題であるから、細かく見れば前段の2つの事例は互いに異なる座標軸を定め得るものと考えられるが、粗く見れば、用いる図にどの程度の情報量を含めるか、という問題として同一の座標軸を定めるとも考えられる。たとえば、3次元の図形の形状を把握させる上で、学習者に与える2次元情報を実際にその立体を目で見たときの情報 (「実写」情報) に近付ければ近付けるほど情報量は増えるであろうし、グラフを見せる関数のパラメータ値を増やしてより多くのケースを提示するほど情報量は増えるであろう。本稿における基本的な問題意識は、提示する応用例の魅力を増す上で、あるいはそれを理解しようとする学習者の認知を助ける上で、情報量が多ければ多いほど良いかということである。

3　線形代数分野の事例を用いた検討

一般線形空間論に踏み込むか否かにかかわらず、行列または線形変換の固有値・固有ベクトルの概念をいかに導入するかという問題は、当該科目を担当する教育者の大きな悩みの1つであろう。これらは、線形変換の表現が基底の取り換えによってどのように変更し得るか、という問題意識を背景とした極めて抽象度の高い概念であり、学習者をそうした思考過程に向けて動機づけるためには、グラフィックスを伴うような実体性を持った応用例の提示が強く望まれる。ところが、そうした応用例を記述する作業自体が、固有値・固有ベクトルを初めて学ぶ段階の学習者にとって、必ずしも易しくないというジレンマに突き当たることが少なくないのである。たとえば、これらの工学的応用として最大のものとなると、線形常微分方程式系の解の安定性の問題が該当するが、学習者

が微分方程式という考え方自体に触れるのは、通常線形代数の学習を終えた後になる。過去の本講究録 (4)) で与えた事例は、行列代数や常微分方程式の解法などの形式的な計算を一通り学び終えた学習者に対して、これらの概念を学ぶ意味を再認識させることを目的として、図 3 のような KETpic を用いて作成した図を利用しつつ、安定性よりも初歩的な解曲線の構造に関する応用例を示したものである。

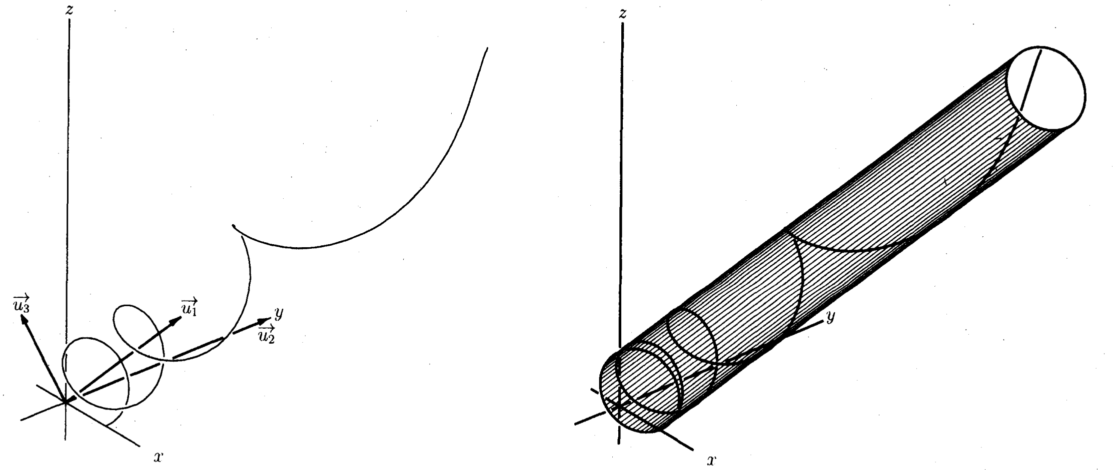

図 **3** 固有値・固有ベクトルの応用例の提示に用いる図 (I)

言うまでもなく、微分方程式系の解の安定性は長時間の経過のもとでの解の特性を判別する指標であり、応用例の提示に当たっては動的なグラフィックスの利用が望まれるところである。そこで、固有値・固有ベクトルも含め、線形代数に関係する教材の作成に DGS や CAS のアニメーション機能が用いられている事例を調べてみた。

線形代数の教材例をまとめた事例集をサイトで公開しているソフトウェアはそう多くないが、少なくとも Mathematica に対する事例集である Wolfram Demonstration Project (14)) と Cinderella に対する事例集である MatheVital (15)) の存在を確認することができた。これらはそれぞれ CAS と DGS を母体とする違いがあり、作られる教材にその違いが反映されている面もあるが、3 次元のグラフィックスを含んだ教材が相対的に少ないことや、固有値・固有ベクトルに関係した教材としては Phase Portrait(微分方程式系の解曲線) が代表的であることなど、共通点も認められた。ここでは、前者から Phase Portrait の事例を 1 つ取り上げる:

`http://demonstrations.wolfram.com/`
`PhasePortraitsEigenvectorsAndEigenvalues/`

実際に Mathematica で該当の教材を表示した画像を図 4 に示すが、教材の使い方は簡単で、2 変数の常微分方程式系の係数をスライダーによって動かすと、対応する解曲線がどんどん変化していく様子が観察できるというものである。その際、左側に係数行列の固有値と固有ベクトルが表示されており、たとえば右側の例では固有値が重解を持つことに対応して解曲線が原点付近で退化していることが観察される。ある意味で、このよ

うな場合に原点付近の解の時間発展を局所線形化すると図2の右側のような図になるといえる。

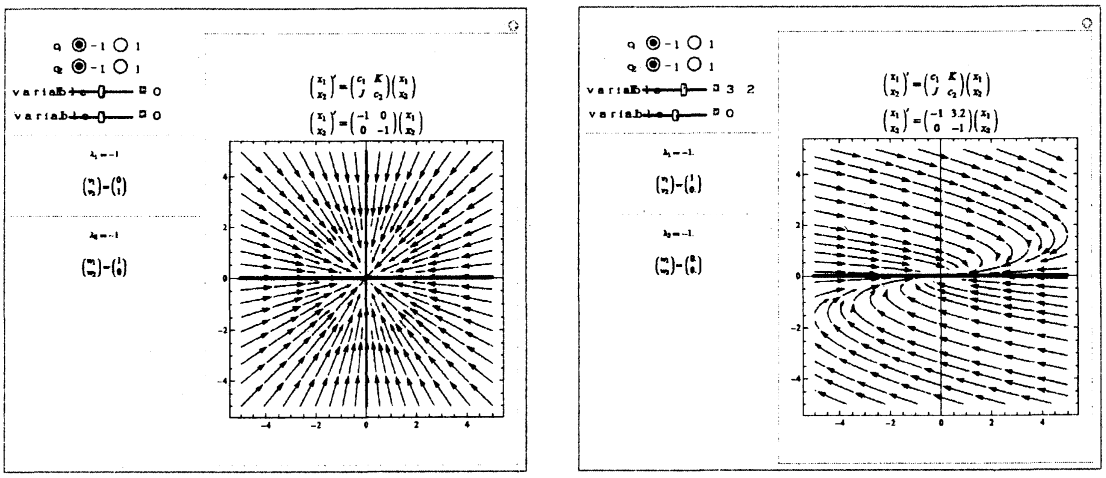

図4 固有値・固有ベクトルの応用例の提示に用いる図 (II)

この事例を、前節に述べた「情報量」という観点から分析してみると

1. 多くの初期条件に対応する解曲線を同時に図示している。
2. 係数行列の成分を連続的に変化させて解曲線を図示している。

という2重の意味で情報量が増大していることが明らかである。このため逆に、図2や図3では図の中に入り込んでいた固有ベクトルの情報を、この事例では図とは分離された部分に表示せざるを得ない結果となっている。

結論的に、この事例を実際に教材に用いようとした場合、授業の目的と対象の設定について慎重に検討する必要が出てくる。固有値・固有ベクトルがどのような場面で有効に使われているか、ということを知識として得る上では強力な事例であるものの、それらの概念が実際どう生かされているのかという姿をここから読み取るのは容易でなく、別に手当てを考えなくてはならないだろう。また、線形代数の初学者にとって含まれる情報量が多すぎることは明らかで、少なくとも微分方程式系の解全体の構造を考えるという思考プロセスが既に備わっている学習者でないと、本当のところ効果は期待しずらい。

4 結論と今後の課題

DGSやCASのアニメーション機能を用いれば、物理的な応用例をライブ的に再現することができ、比較的大きなインパクトを持って数学的な概念を学習する動機づけを行える可能性が広がっている。このため、これらの機能を利用しようとする教育者は、無意識のうちに、これらの機能をフルに生かして、現象をまるごと見せられるような教材を選択・作成する傾向があるように見える。しかし、学習者の立場からすると、その選好や発達段階によっては情報過多となる危険性があり、学習しようとしている概念との

つながりを見失わないように工夫しつつ、適切な情報量を持った教材が提供される必要があると考えられる。同時に、印刷配布教材における静的なグラフィックスの果たす役割も、これと相対的に検討される必要があるだろう。

参考文献

1) Fischbein E.: "Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach", Kluwer, 1987
2) Gueudet G.: "Using Geometry to Teach and Learn Linear Algebra", in "Research in Collegiate Mathematics Education IV", AMS, pp.171-195, 2006
3) 金子真隆, 阿部孝之, 山下哲, 泉源, 深澤謙次, 北原清志, 高遠節夫:「線形代数の教科書における挿図の利用について」, 京都大学数理解析研究所講究録 1674, pp.12-25, 2010
4) 金子真隆, 高遠節夫:「KETpic の利用と教材発掘」, 京都大学数理解析研究所講究録 1735, pp.57-72, 2011
5) Cinderella home page `http://cinderella.de`
6) GeoGebra homepage `http://www.geogebra.org/`
7) GNU-TeXmacs home page `http://www.texmacs.org`
8) 金子真隆, 山下哲, 深澤謙次, 北原清志, 高遠節夫:「KETpic で楽々TEX グラフ」, イーテキスト研究所, 2011
9) 金子真隆, 栗本育三郎:「脳波計測に基づく数学の理解の追跡にむけて」, 日本科学教育学会第 36 回年会論文集, p.281-282, 2012
10) Kaneko M., Maeda Y., Hamaguchi N., Nozawa T., Takato S.: "A Scheme for Demonstrating and Improving the Effect of CAS Use in Mathematics Education", submitted to ICCSA 2013
11) 金子真隆, 高遠節夫:「グラフィックスと証明スキームの発達」, 京都大学数理解析研究所講究録 1780, pp.180-196, 2012
12) Harel G.: "Three Principles in Learning and Teaching Mathematics", in "On the Teaching of Linear Algebra", Kluwer, 2000
13) 岡本尚子:「神経科学による学習メカニズムの解明」, ミネルヴァ書房, 2011
14) Wolfram Demonstration Project `http://demonstrations.wolfram.com/`
15) MatheVital `https://www-m10.ma.tum.de/bin/view/MatheVital/WebHome`
16) Bruer J. T.: "Education and the Brain: A Bridge Too Far", Educational Researcher 26-8, pp.4-16, 1997