

教員養成系教科専門科目「算数科内容学」の

授業構成の一例

滋賀大学名誉教授 丹羽 雅彦 (Masahiko Niwa)
Shiga University

1. 算数科内容学の標準的モデル

RIMS (数理解析研究所) プロジェクト「数学教師に必要な数学専門能力に関する研究の私たちのチーム (第 1 班) は、2010 年度調査・研究 ([4]) において、以下のような算数科内容学の標準的モデルを作成した。

算数科内容学 (小学校算数・教科専門科目) の標準

| 講義内容の項目 | |
|-----------------|--|
| 「数と計算」領域 | |
| 必修項目 | (1-1) 1 対 1 対応と基数 (濃度) . 自然数, 集合数 (基数) と順序数 (序数) . (1-2) 位取り記数法 (零の発見を含む) . n 進法, 繰り上がりのあるたし算, 繰り下がりのあるひき算. (1-3) 自然数・分数の四則演算の意味 (除法で分母と分子を逆にしてかける理由等). (1-4) 整数の性質 (倍数・約数・素数, 素因数分解, ユークリッド互除法, 最大公約数・最小公倍数等) . (1-5) 数の構成 (自然数から出発し, 整数, 有理数, 実数, 複素数への数の拡大) . |
| 選択項目 | (1-6) 数の歴史, 代数学の歴史 (方程式など) . |
| 「量と測定」領域 | |
| 必修項目 | (2-1) 離散量 (分離量) と連続量, 外延量と内包量, 連続量を表す数としての分数と小数. (2-2) 分数の意味: 量分数と割合分数. (2-3) 面積の意味, 種々の直線図形 (長方形, 平行四辺形, 三角形) の面積, 円周率 (の歴史), 円の面積の公式の理由. (2-4) 体積: カバリエリの原理, 錐体の体積に $1/3$ が現れる理由等. |
| 選択項目 | (2-5) 量の理論を基にした数の理論または量と数の数学的な関係. |

| 「図形」領域 | |
|----------|--|
| 必修項目 | (3-1) 図形の性質を考察する観点としての対称性、敷き詰め等。 (3-2) 多角形の内角・外角、三角形の合同条件・相似条件。 (3-3) 立体図形：見取り図、展開図、立体模型等。 |
| 選択項目 | (3-4) ユークリッド幾何学の基本とギリシア作図問題。 (3-5) 位相的概念：オイラー標数と正多面体。 (3-6) 黄金比、フィボナッチ数列(葉序)等。 (3-7) 幾何学の歴史（ユークリッド幾何および非ユークリッド幾何、様々な幾何学）。 |
| 「数量関係」領域 | |
| 必修項目 | (4-1) 比と比の値、割合。 (4-2) 関数：比例関係と関数、式・表・グラフの利用等。 (4-3) 資料の統計的处理。 |
| 選択項目 | (4-4) 割合を用いた文章題、特殊算の紹介。 (4-5) 確率的な見方（確率論の歴史）、統計的推論。 (4-6) 統計・確率の日常生活や経済、工学等への応用の紹介。 (4-7) 関数概念の歴史、解析学の歴史（微分積分学の成立と発展等）。 |
| その他 | |
| 必修項目 | (5-1) 数学的な考え方、数学的な問題解決の意味と方法。 |
| 選択項目 | (5-2) 数学的推論と証明の意義、数学的な表現。 |

2. 算数内容学の授業をどのように構成するか

標準的モデルを基にして算数内容学の授業を構成することを考察する。【4】で述べたように、半期1コマ（2単位）という限られた時間で小学校教師としての数学的能力の向上を目指すためには、大別して2つの方向

- (1) 小学校算数科に関連する重点的な4～5のテーマに絞る方向。
- (2) 小学校算数科の背景として知っておくべき数学的内容を、個々は浅くなるが広く網羅に取り扱う方向。

が考えられるが、ここでは、(2)の方向で構成する授業について述べる。

【4】で述べたこの科目に関するいくつかの課題にどのように対応するかについてまず議論する。

第一に、算数内容学を受講生に関して、高校で文系に属するものも多く、さらに大学でこの授業以外に数学の科目を選択しないケースも多いという実態に配慮しなければならないという課題である。

小学校教師を目指す学生のなかには、数学は苦手と考える学生も沢山いる。講義項目の内容を深めようとするやや難しい数学がどうしても必要なので、ひとつひとつの項目は短

時間で終えるような網羅的な講義の方が適していると考えられる。
特に、証明や抽象的な理論に深入りすることはこの科目では不適當ではないかと思う。

第二に、中学校・高等学校教師として数学を教える者と同様に、小学校教師として算数を教える者にとっても、子どもたちが算数・数学を学ぶ意味を理解していることが重要である、という点である。

小学校算数で学ぶ内容は、日常生活や社会生活において絶対に必要となる高い実用性をもつものがほとんどである。また、「数」や「かたち」などの算数で学ぶ概念は国語で学ぶ「ことば」とともにコミュニケーションにおける言語の重要な柱である。数、図形に加えて式、表、グラフなどは算数・数学以外のいろいろな学習での課題解決の手段としても用いられる。さらに、概念の抽象性や問題を解くときの推論の論理性なども、中学校以降の種々の教科の基礎的能力となっていくものである。子どもたちが算数・数学を学ぶ意味を学生が理解するには、算数科内容学の授業において、授業担当者が子どもたちが算数・数学を学ぶ必要性を説明するだけでは片方の耳から入り他の耳から出ていくだけである。個々の教材が、中高の数学科の内容、数学の分野や歴史、数学以外の学問分野、自然、社会とどのように繋がっているのかを、学生自身が自分の経験を振り返りながらこうした繋がりを考えてみる経験によって実感として掴むことができると思う。

これらのために、学生に提出させるレポート課題を充実させ、その内容を工夫することが重要である。そこでは、(さまざまな)「つながり」の認識と(自己の経験の)「ふりかえり」がキーワードになる。

第三に、学生が「算数科の内容は子どもの頃に学んだことがあり算数のことは分かっている」と思っているからといって、算数で教える内容を十分に理解しているという訳ではないことである。

中学校以降の数学に比べて算数は学ぶのに易しかったという経験や国語や社会など他の教科に比べると算数は答えがひとつで分かりやすかったという経験をもっている学生は多いので、中学校以降に数学で挫折したような学生でさえも小学校算数のときはよく分かっていたという感想を持っていることが多いと思われる。しかし、「学ぶ」から「教える」に立場を変えたとき、算数という教科の内容の理解は決して易しいものとはいえない。様々な数学的な概念が小学校では導入されるが、数学上の意味を理解するとともにさらに児童の発達段階により出現する意味の違いをもあることを理解する必要があるからである。

本来は、算数の内容の根底にある数学の知識と見方・考え方を理解し、児童の状況に応じて授業内容を自ら構成できる力量までが必要であり、これを可能にするには、授業方法の上手・下手ではなく、数学的内容の深い理解こそが必要であるといえる。しかし、このような数学の深め方を、数学が専門の学生以外に対し大学の授業として行うことはさまざまな制約があり極めて困難である。

学生が小学校・中学校・高等学校で学んだ知識はもちろん重要であるが、それだけでは十分ではない。算数のさまざまな領域の教育内容の根底にはどんな数学があるかを知り、それ

らを「教える立場に立って」考えてみるような経験が必要である。その場合、教える算数の内容が、なぜそうなっているのか、なぜそのような計算をするのか等、意味と理由を考えてみるのが特に重要である。

これらの課題に対しては、授業展開の仕方と学生に提出させるレポート課題の内容を工夫することが重要ではないかと考える。それぞれの学生の数学への理解度は相当に違っているので、学生自身の自覚をもった主体的な学習でしか力量をつけることができないと思われる。

3. 算数科内容学の授業例

学生の自習の便宜のために、授業で使用するだけでなく自習に適するように教科書を使用するとともに随時プリントを追加するなど、授業中に扱う内容より学習する教材を大幅に多く与えておくことが望ましいと考えている。この科目で扱う内容は非常に多彩であるが、授業中には、個々の項目に深入りすることを避けて概括的、重点的に扱うこととする。そして、レポートの課題が重要な役割を果たす。学生自身のレポートを書くための学習をこの科目の根幹に据えることとする。以下に、私の授業経験を踏まえた授業構成の一例を提示する。

[各回の授業テーマ]

- 第1回：算数・数学教育の目標論。この授業の学習目標。
- 第2回：集合数と順序数。自然数。十進数位取り記数法。
- 第3回：自然数の四則演算、四則演算それぞれの意味。
- 第4回：整数の性質。ユークリッド互除法。同値関係と数の拡大。
- 第5回：量と数の理論：歴史的観点から。量と数の理論の概要。
- 第6回：量と数に関する種々の話題。
- 第7回：分数指導を巡って。
- 第8回：図形教育を考える1：群と対称性。内包的定義。ユークリッド幾何学。
- 第9回：図形教育を考える2：正多面体とオイラー標数。立体図形－展開図など。
- 第10回：図形と量1：角・面積・体積。
- 第11回：図形と量2：種々の問題。
- 第12回：数量関係1：文字式、グラフ、関数。
- 第13回：数量関係3：確率と統計－資料の整理の背景として－
- 第14回：数量関係4：統計的推論。数量関係2：割合と比。
- 第15回：その他：問題解決と数学的な考え方。

授 業 計 画

| | 表題とテーマ | レポート課題 |
|-------------|---|--|
| 第 1 回 | 「数学教育の目標論とこの授業 の学習目標」 | [1] 小学校高学年のある児童が、「算数って、なぜ勉強しなくていけないのですか？」と質問したとき、あなたは、どのように答えますか。 [2] 小学校算数教育に関して、現時点であなたが疑問や関心をもっている教材や話題があれば、箇条書きで述べて下さい。 |
| 第 2 回 | 「集合数と順序数・自然数・ 十進法位取り記数法」 ① 集合数(基数)と順序数(序 数) ② (十進法)位取り記数法の素 晴らしさ ③ たし算・ひき算における、位 取りの基準「十」の重要性 | [1] 自然数の導入の際に、集合の「基数」を認識させることが、なぜ重要であるかを説明しなさい。また、基数と序数との違いをどのように指導したらよいか述べなさい。 [2] 「十進法位取り記数法」の素晴らしさはどんなところにあるか、整理して述べなさい。 |
| 第 3 回 | 「自然数の四則演算：計算は筆 算が基本、四則演算の意味」 ①十進法以外の n 進法について ②繰り上がり・繰り下がりのある たし算・ひき算の留意点：補 数、加数分解、減加法・減減法 ③たし算・ひき算の意味 ④かけ算・わり算の計算の意味 同数累加、ファイバー構造。 | [1] 次の位取り記数法で書かれた数を指示されたように書き換えなさい。 ①二進法で 10011011 となる数を十進法で表せ。 ②七進法で 53026 となる数を十進法で表せ。 ③十進法で 571 となる数を二進法で表せ。 ④ 十進法で 40972 となる数を五進法で表せ。 [2] 次の用語はどんな教材に関するものか述べ、それらを簡潔に説明しなさい。 ① 加数分解 ② 減加法と減減法 ③ ファイバー構造 ④ 等分除と包含除 [3] (そろばんのように)5をひとかたまりに(単位のように)して、たし算ひき算を計算する方法の利点と欠点を述べよ。 |
| 第 4 回 | 「自然数の演算(続き):整数の性 質」 ① 整数の性質：倍数・約数・素 数、互いに素、素因数分解、最 大公約数・最小公倍数の求め方 ②ユークリッド互除法と応用 | [1] 10583 と 7543 の最大公約数を求めよ。 [2] 循環小数 0.538461 について、 ① 分母が $999\cdots 9$ の形の分数で表せ。そう表せる理由も述べよ。 ② この分数を、既約分数(分母と分子が互いに素となる分数)で表せ。(ヒント：ユークリッドの互除法を利用) [3] 私の誕生日をあてて下さい。(ユークリッドの互除法を利用した問題) |
| 第 5 回 | 「数の拡大(構成法)・量と数の理 論」 | [1] 皆さんがこれまで「数」について、どのようなイメージを抱いてきたかを思いだして、小学生のとき、中学生のとき、高校 |

| | | |
|-------------|---|---|
| 回 | <p>① 自然数から分数、整数、有理数はどのように構成されるか。同値関係から定義される商集合の概念が大切。</p> <p>② エウドクソスの量の比の理論などギリシア数学における量と数の関係をユークリッド原論から考察する。</p> <p>③ 田村氏の「量と数の理論」から、「量」と「数」の数学的な関係を考察する。</p> | <p>生のとくに分けて、説明しなさい。分数の登場、負の数の登場、関数の登場によって「数」への意識がどのように変化したか等に注意して論じて下さい。</p> <p>[2] 小学校算数の領域「数と計算」の学習において、数を学習するが、その際に「量」を背景に考えることや、量を基礎にして数を学ぶことの必要性和意義について考察して下さい。</p> |
| 第 6 回 | <p>「量と数に関する話題」</p> <p>① 離散量と連続量</p> <p>② 量の大小比較：直接比較と間接比較。単位について。</p> <p>③ 外延量と内包量とは何か</p> <p>④ 連続量を表す数：小数と分数。小数と分数の関係</p> | <p>[1] 次の対となる用語について、それらの違いと関係に注意しながら、それらの概念の意味を説明しなさい。</p> <p>(1) 離散量と連続量</p> <p>(2) 量の直接比較と間接比較</p> <p>(3) 外延量と内包量</p> <p>(4) 連続量の表現としての小数と分数</p> <p>(5) 量分数と割合分数</p> |
| 第 7 回 | <p>「分数指導を巡って」</p> <p>① 分数の意味：量分数と割合分数</p> <p>② 分数の演算の指導に関する留意点</p> | <p>[1] 分数の加法について、よくある間違いとして述べた例(下図省略)について、子どもから「なぜこう考えてはダメなの」と質問された場合、どのように答えたらよいか考察しなさい。</p> <p>「割合はたし算のできない内包量だから」という説明では、子どもには理解できないであろう。この課題は、分数の意味の本質を考察する重要な問題です。</p> <p>[2] 教科書を参考にして、「分数の加法」と「分数の除法」について、理解の困難さがどこにあるか説明し、その指導法について、教科書とは別の例を用いて、考察しなさい。</p> |
| 第 8 回 | <p>「図形教育を考える1」</p> <p>① 図形の性質を考察する観点：対称性の考察一群と対称性</p> <p>② 三角形と四角形：共通の性質から定義へ(内包的定義)</p> <p>③ 幾何学の基本と作図：ユークリッド幾何学と作図問題</p> <p>④ 数の演算の作図：加減乗除の作図法</p> | <p>[1] 下図(省略)のような凹型四角形での敷き詰めの例を考えなさい。</p> <p>[2] すべての凸型多角形の外角の和がいつも360度になるのは何故か、説明しなさい。さらに、下図(省略)のような角の和は何度になるでしょうか？(小学生への指導という観点から、辺の上を元に戻るまで歩いたとき、顔の向きが何度変化するかということも考えてみよう。</p> <p>[3] 長さ$\sqrt{2}$と$\sqrt{3}$の作図法を述べよ。また、長さ1とaが与えられたとき、長さ\sqrt{a}の作図法を考えよ。</p> |
| 第 | 「図形教育を考える2」 | [1]ピタゴラスの定理の証明は、教科書に挙げられたもの以外にも |

| | | |
|--------------|---|---|
| 9 回 | ① ピタゴラス(三平方)の定理の種々の証明 ② オイラー標数と正多面体 ③ 合同条件・相似条件 | いろいろある。調べていくつかを書きなさい。 [2]オイラー標数から発展した数学の分野を「トポロジー(位相幾何学)」という。この幾何学は、図形のどのような性質を研究する分野か調べて書きなさい。 [3] 三角形の決定条件と三角形の合同条件を整理して述べよ。また、それらに対応しているのは何故だろうか、述べなさい。 |
| 第 10 回 | 「図形と量」 ① 長方形の面積： 「たて×よこ」の意味 (一般に、面積の意味) ② 三角形、四角形等の面積 ③ 円の面積、円周率 ④ 直方体の体積、錐体の体積 ⑤ 球の体積 | [1]円の面積の公式 (円の面積)=(半径) \times (半径) \times (円周率) を理解させる方法は教科書 145～146 頁以外にもたくさんある。説明方法を調べて、述べなさい。 [2]錐体の体積の公式 (錐体の体積)=(底面積) \times (高さ) \div 3 を理解させるような具体的な指導法と注意点を述べなさい。(特に 1/3 の現れる理由) |
| 第 11 回 | 「図形と量：角・面積・体積演習」 角・面積・体積に関する演習 (教員採用試験で過去に出題された問題など) | [1] (1) 下図(省略)で、点 P は $\triangle ABC$ の外心(外接円の中心)である。 $\angle x$ の大きさは何度か。 (2) 下図(省略)で、点 P は $\triangle ABC$ の内心(内接円の中心)である。 $\angle x$ の大きさは何度か。 [2] $AB=5\text{cm}$, $BC=13\text{cm}$ の長方形 ABCD において、D' は D の部分を折って辺 BC 上に合わせた点とするとき、斜線の三角形の面積は何 cm^2 か。 [3] 1 辺が 10cm の正八角形の面積は何 cm^2 か。 [4] (1) 1 辺が 10cm の正四面体の体積は何 cm^3 か。 (2) 1 辺が 10cm の正八面体の体積は何 cm^3 か。 |
| 第 12 回 | 「数量関係 1：文字式、関数、グラフ」 ③ 文字式：なぜ文字を使用するか ④ 関数：小学校では関数という用語は使わないが、考え方は必要である ⑤ グラフ：ビジュアル化で分かりやすく。 | [1] 棒グラフ、折れ線グラフ、円・帯グラフは、どのように使い分けたらよいか、整理して述べなさい。 [2] 「関数」は数学的にどのような良い点をもっているか、また、数量関係を総合して「関数」として捉えることは、どのような利点があるかを考えて、述べなさい。 |
| 第 13 回 | 「数量関係 2：確率と統計について —資料の整理の背景として—」 ① 確率の考え ② データの統計的扱い | [1] 次の確率・統計分野の用語について定義と意味を簡潔に説明せよ。 ① 平均値, ② 分散, ③ 標準偏差, ④ 偏差値, ⑤ 相関係数, ⑥ 確率変数, ⑦ 正規分布 [2] 『ある 2 人ゲームで先に 6 勝した方が賭け金を全額得る、というゲームを始めたとする。ある事情で勝負が完了しないで、A が 5 勝、B が 3 勝したところで中止になったとすると、』 |

| | | |
|------|---|---|
| | | 賭け金が1万2千円であった場合それをどう分配すべきか。』合理的（公平な）基準をどう定式化するかに注意して、期待値を計算することにより答えよ。 |
| 第14回 | 「数量関係3：割合と比」 「数量関係2：確率と統計（続き）」 ① 倍・比・割合の概念の関係を考える。 ② 統計的推論 | [1] ランダムサンプリングで選ばれた標本700人の回答から32%が内閣を支持する、という結果が得られたとして、真の支持率の95%信頼区間を求めなさい。誤差を1%以内に収めたいとしたら、あとどれくらいの数のデータを調査しなければいけませんか。 [2] 「割合」「比」「比例関係」の3つの概念を、それらの区別と相互関係に留意して説明しなさい。 |
| 第15回 | 「領域外課題：数学的な考え方」 「数学的な考え方」とはどんなものだろうか。 様々な実例。 | [1] 小学校算数科において、どんな「数学的な考え方」を、どのように育てるような授業を目指したらよいか、あなたの考えを述べなさい。 |

上に述べた授業計画は机上の案ではなく、平成20年度～22年度秋学期に滋賀大学教育学部において実際行った授業の経験をもとにしたもので、ここで一例として提示するために若干の修正を加えたものである。

【注意】 表中の文章に現れる教科書は、[5]を使用した。

【参考文献】

- [1] 丹羽雅彦、松岡隆「教員養成学部の「数学」教科専門科目カリキュラムの現状把握と理想的モデル案に向けた調査検討の構想」, 数理解析研究所講究録 1657 (2009年7月) pp.74-82
- [2] 丹羽雅彦、松岡隆、川崎謙一郎、伊藤仁一「教員養成大学・学部の数学専門科目の講義内容についての調査」の結果とその考察」, 数理解析研究所講究録 1711 (2010年9月) pp.89-105
- [3] 丹羽雅彦、松岡隆、川崎謙一郎、大竹博巳、伊藤仁一「中学校・高等学校の数学教師の養成における数学専門科目の標準的なモデルの構想」, 数理解析研究所講究録 1711 (2010年9月) pp.106-129
- [4] 丹羽雅彦、松岡隆、川崎謙一郎、大竹博巳、伊藤仁一「小学校算数科・教科専門科目の講義内容に関する現況調査の結果と標準モデルの提案」, 数理解析研究所講究録 (近刊)
- [5] 黒木哲徳「入門算数学第2版」日本評論社 (2009年)