数理解析研究所講究録
第1867巻 2013年 106-116

折り紙作図を用いた教材研究のために
～正五角形と正七角形をベースとして～

島根大学教育学部　青山 陽一 (Yoichi AOYAMA)
Faculty of Education, Shimane University

岐阜大学 名誉教授　中馬 悟朗 (Goro CHUMAN)
Professor Emeritus, Gifu University

はじめに

初等幾何における作図は，‘定木’と‘コンパス’による作図が通常考えられている．(‘E-作図’ということにする．なお，定木は与えられた2点を通る直線を引くことと与えられた(有限)直線を延長することにだけ用い，コンパスは与えられた点を中心として与えられた点を通る円周を描くことにだけ用いる ということを思い出して頂きたい.) E-作図では，角の三等分が出来るとは限らないこと，正七角形が作図出来ないことが知られている．これらの証明には今のところ体の有限次拡大の理論(ガロワ理論)を使う必要があり，高等学校までの段階では不可能性のみが伝えられる．このE-作図不可能な‘一般角の三等分’と‘正七角形’が，‘折り紙’によって可能であることは，教材として折り紙作図を取り上げる理由として十分であろう．折り紙は，多くの子供が幼少の頃より行っているものであるという利点がある．そして一方，その理論は高度で難しいものである．従って，折り紙作図を扱う場合，教師はそのことを充分に理解しておかなければならない．単に折り紙で‘遊ぶ’ことに終わってはいけない．学習段階や児童・生徒の学力に応じた提示がなされなければ意味がない．

この論考では，折り紙を教材として取り上げる際に教師に身に付けておいて欲しいと考えている内容に関して，折り紙による正五角形の作図・角の三等分・正七角形の作図を取上げて述べることにする．§1において折り紙作図の基本手順について述べる．§2において，正方形の折り紙を用いる正五角形の作図の方法を一つ提示し，分析を行う．§3において，長方形の折り紙上に与えられた角の三等分線の作図の方法を一つ提示し，分析を行う．§4において，正七角形の作図の分析を行うための準備として，折り紙による三次方程式の解法を扱う．§5において，正七角形の作図の方法を一つ提示し，分析を行う．なお，分析の詳細さは追究しないことにする．実際の学生指導においては，追究させることが重要である．そのため及び全般的文献として，[1],[2] を挙げておく．

§1. 基本手順

折り紙作図の基本手順を述べる．これは‘折り紙公理’とも呼ばれているが，用いることにする基本的な折り方を記述しているものであり，これらを有限回用いる折りのみを考えるとの認識に立ち，ここでは‘基本手順’ということにする．但し，折りにより点が写る先の点を取ること，直線が写る先の直線を引くこと等は，許されているものとする．

基本手順 [1] 点 P, Q が与えられたとき，折り目線が P, Q を通る折り方がある．

基本手順 [2] 点 P, Q が与えられたとき，P を Q に重ねる折り方がある．

基本手順 [3] 直線 l, m が与えられたとき，l を m に重ねる折り方がある．

基本手順 [4] 点 P と直線 l が与えられたとき，折り目線が P を通り l と直交する折り方がある．

基本手順 [5] 点 F と直線 l が与えられたとき，F を l 上に写す折り方がある．更に，点 P が $\lambda(\mathrm{PF}) \geq \lambda(\mathrm{P}l)$ となるように与えられているとき，折り目線が P を通るようにできる．（$\lambda(\mathrm{PF})$ は点 P と点 F の距離を，$\lambda(\mathrm{P}l)$ は点 P と直線 l の距離を示す．）

基本手順 [6] 点 F, G と直線 l, m が与えられたとき，F が l 上に写り，G が m 上に写る or 折られた m が G を通る 折り方がある．但し，l と m が平行なときは場合分けが少々面倒になることと，このノートでは扱う必要がないので，l と m が平行でない場合だけを考えることにする．

各手順を図示しておこう．

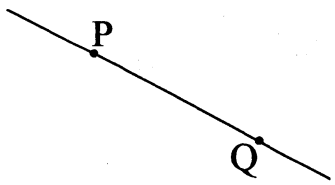


図 1.1: 基本手順 [1]

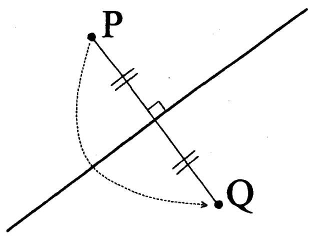


図 1.2: 基本手順 [2]

基本手順 [2] は，折り目線が線分 PQ の垂直二等分線となる折り方があることを述べている．

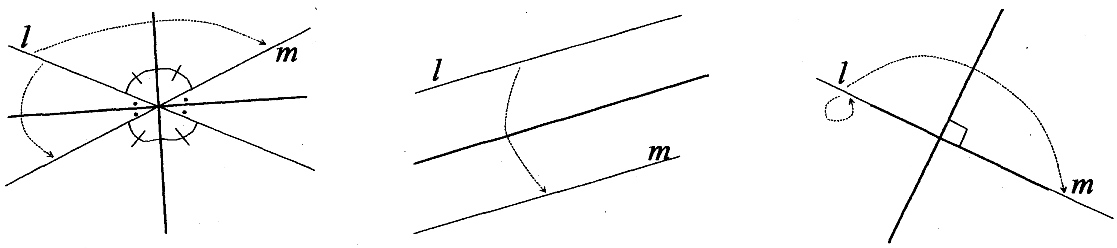


図 1.3: 基本手順 [3]

基本手順 [3] は，l, m が一点で交わるときには折り目線が二直線のなす角の二等分線となる折り方があることを，l, m が平行な二直線のときには折り目線がこれらと平行で等

距離にある直線となる折り方があることを，$l = m$ のときには折り目線がこれと一致あるいは垂直な直線となる折り方があることを 述べている．

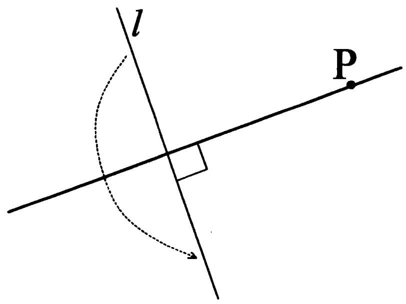


図 1.4: 基本手順 [4]

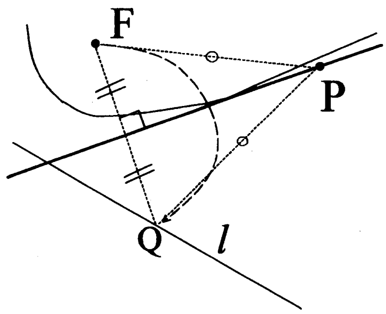
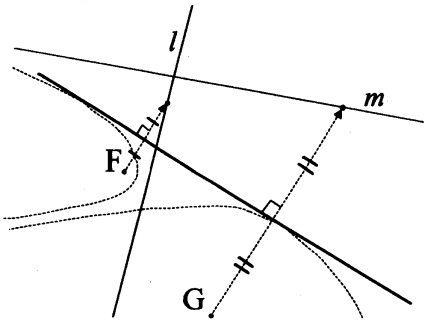


図 1.5: 基本手順 [5]

基本手順 [5] は，折り目線が F を焦点とし l を準線とする放物線の接線となる折り方があることを述べている．更に，点 P が放物線の上か外部にあるとき，折り目線が P を通る接線となる折り方があることを述べている．また，直線 l 上に点 Q を $\lambda(\mathrm{PQ}) = \lambda(\mathrm{PF})$ となるように取れることも意味している．



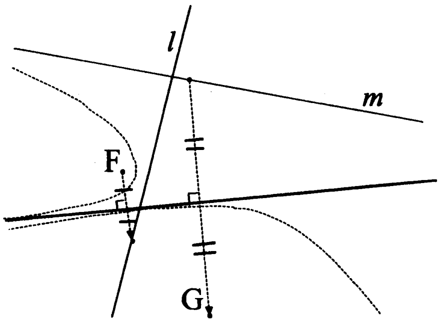


図 1.6: 基本手順 [6]（左）F $\to l$ and G $\to m$　　（右）F $\to l$ and $m \to$ G

基本手順 [6] は，折り目線が F を焦点とし l を準線とする放物線と G を焦点とし m を準線とする放物線の共通接線となる折り方があることを述べている．これが‘E-作図’では不可能なことであり，基本手順 [1],[2],[3],[4],[5] は全て E-作図可能であることを注意しておく必要がある．従って，基本手順 [6] が角の三等分線の作図と正七角形の作図において本質的役割を果たすことも．

なお，以下の考察においてどの基本手順を用いたかについては，明示しなくても判ると思われるので省略させて頂く．

§2. 正五角形

2.1　作図

正方形の折り紙を用いる方法の一つを述べる．

手順1（図2.1）正方形の折り紙を縦横各々半分に折り，点 O, P, Q, R, S, V, W を取る．

手順2（図2.2）直線 OP が直線 OS に重なるように折る．即ち，$\angle$POS の二等分線を折り，直線 PQ との交点を T とする．Q を T に重ねるように折り，Q と T の中点を求め A とする．Q を P に重ねるように折り，A の写る先を点 E とする．$\lambda(\mathrm{PE}) = \lambda(\mathrm{QA}) = \lambda(\mathrm{TA})$, $\lambda(\mathrm{AE}) = \lambda(\mathrm{TP})$ である．線分 AE を一辺とする正五角形を作図することになる．

手順3（図2.3）点 E が半直線 QR 上に写り，折り目線が A を通るように折り，E が写る先を点 B とする．同様に，$\lambda(\mathrm{ED}) = \lambda(\mathrm{EA})$ となるように半直線 PO 上に点 D を取る．

手順4（図2.4）A が直線 VW 上に写り，折り目線が B を通るように折り，A が写る先の V に近い方の点を C とする．A, B, C, D, E, A をこの順に結んでできる五角形は正五角形である．

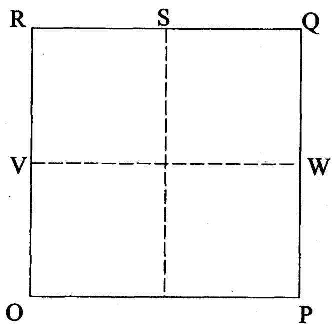


図 2.1: 手順1

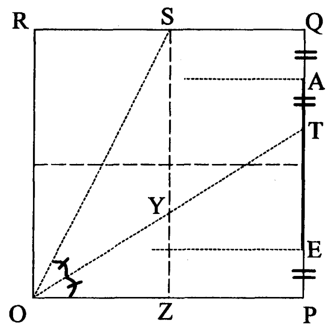


図 2.2: 手順2

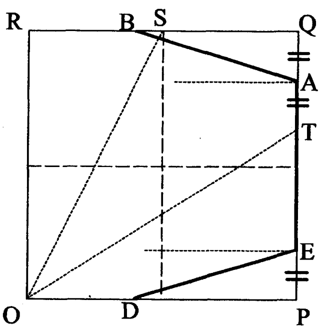


図 2.3: 手順3

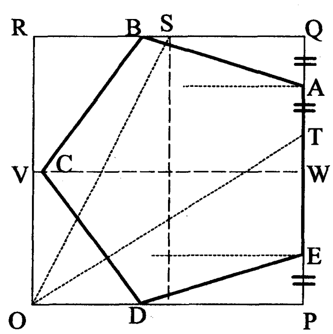


図 2.4: 手順4

2.2 分析

正五角形において，辺の長さと対角線の長さの比は

$$1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$$

である．(学生に対しては，何事も疎かにせず全てに証明を付けさせるのが良い.)

図 2.2 において考える．

$$\lambda(\mathrm{OP}) = 1 \quad \text{として，} \quad \lambda(\mathrm{AE}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{を示そう.}$$

$\triangle$SOZ において直線 OY は $\angle$SOZ の二等分線だから，

$$\lambda(\mathrm{OS}) : \lambda(\mathrm{OZ}) = \lambda(\mathrm{YS}) : \lambda(\mathrm{YZ})$$

である．

$$\lambda(\mathrm{OS}) = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda(\mathrm{OZ}) = \frac{1}{2}, \quad \lambda(\mathrm{YS}) + \lambda(\mathrm{YZ}) = 1$$

であるから

$$\lambda(\mathrm{YZ}) = \frac{1}{\sqrt{5}+1}, \quad \lambda(\mathrm{AE}) = \lambda(\mathrm{TP}) = 2\,\lambda(\mathrm{YZ}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

を得る．これから五角形 ABCDE は正五角形であることを，学生に確認させることを怠らないようにする事が肝要である．

与えた作図は正五角形の一辺が折り紙の辺上に在るものであったが，正五角形の三頂点が折り紙の辺上に在るものを図 2.5 に示す．(図 2.4 において，頂点 C が V に重なるように平行移動した形になっている．辺の長さが $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ になることは，こちらの方が見易いだろう.) また，正方形折り紙に含まれる正五角形が最大であるものを図 2.6 に示しておく．これについては [2, 第 6 章] を見て頂きたい．

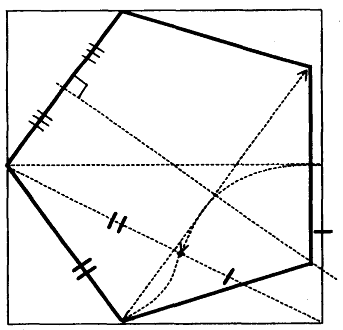


図 2.5: 三頂点が辺上

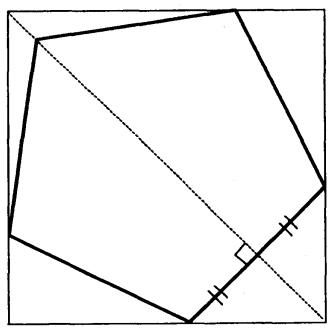


図 2.6: 最大

§ 3. 角の三等分

図 3.1 のように，長方形折り紙に ∠ZOX が与えられているとする．辺 OY 上に点 B を取る．O が B に重なるように折り，折り目線を図のように AC とする．O が AC 上に写り，B が OZ 上に写るように折る．O の写る先を P，A の写る先を Q とすれば，直線 OP と直線 OQ が ∠ZOX の三等分線になる．

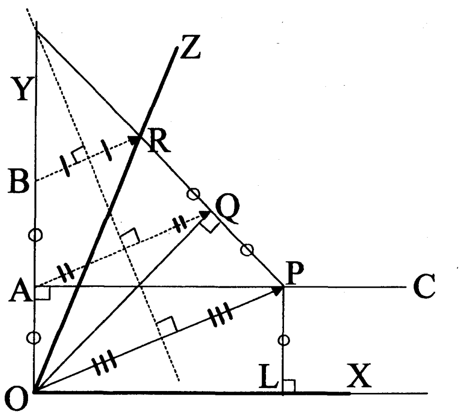


図 3.1: 角の三等分

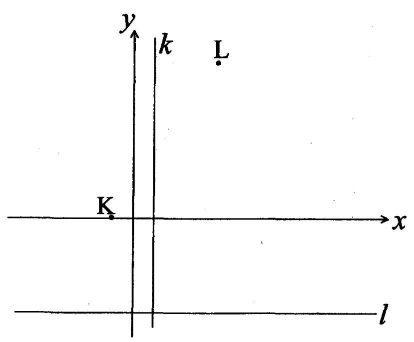
証明は，図を見れば判る ($\triangle$OLP $\equiv$ $\triangle$OQP $\equiv$ $\triangle$OQR) が，学生には厳密に証明を書かせよう．また，O を焦点とし AC を準線とする放物線と B を焦点とし OZ を準線とする放物線を描かせよう．更に,「O が AC 上に写り，B が OZ 上に写る or OZ が折れて B を通るような折り方は図 3.1 に示したものだけか」も検証させよう．

§ 4. 三次方程式

$b, c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$ として，３次方程式

$$z^3 + bz^2 + cz + d = 0 \tag{4.1}$$

を考察する． 天下り的だが，図 4.1 の様に設定する．

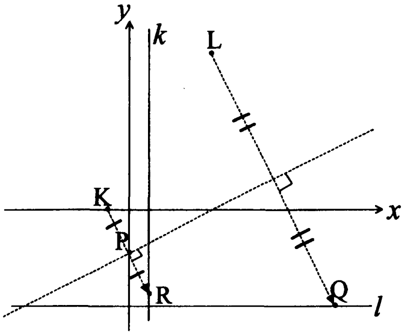


K$(-1, 0)$
$k : x = 1$
L$(-c, -b + d)$
$l : y = -b - d$

図 4.1: 設定

即ち，Descartes 平面上に，点 $\mathrm{K}(-1,0)$，直線 $k : x = 1$，点 $\mathrm{L}(-c,-b+d)$，直線 $l : y = -b-d$ を取る．

K が k 上に写り，L が l 上に写る or 折れた l が L を通る ように折る．K が写る先を点 $\mathrm{R}(1,2p)$，折れ目線と y 軸の交点＝線分 KR の中点を $\mathrm{P}(0,p)$ とする．L が写る先の点 or L に写ってくる点を $\mathrm{Q}(q,-b-d)$ とする．(図 4.2)



$\mathrm{K}\,(-1,0)$
$k : x = 1$
$\mathrm{L}(-c,-b+d)$
$l : y = -b-d$
$\mathrm{R}\,(1,2p)$
$\mathrm{P}\,(0,p)$
$\mathrm{Q}\,(q,-b-d)$

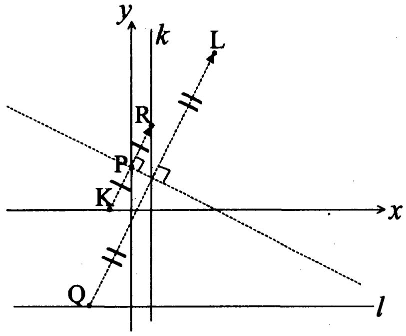


図 4.2: （左）$\mathrm{K} \to k$ and $\mathrm{L} \to l$　　（右）$\mathrm{K} \to k$ and $l \to \mathrm{L}$

このとき，p は方程式 (4.1) の解であることを示そう．

直線 KR の方向ベクトルは $(1,p)$ で，直線 LQ の方向ベクトルは $(q+c,-2d)$ で，この二直線は平行であるから，

$$p(q+c) = -2d \tag{4.2}$$

が成立する．折り目線は線分 KR の垂直二等分線であるから，方程式は $y = -\dfrac{1}{p}x + p$ である．線分 LQ の中点 $(\dfrac{q-c}{2}, -b)$ がこの上にあるから，

$$-2bp = c - q + 2p^2 \tag{4.3}$$

が成立する．式 (4.2),(4.3) より

$$p^3 + bp^2 + cp + d = 0 \tag{4.4}$$

を得る．

• K が k 上に写り，L が l 上に写る（$\mathrm{K} \to \mathrm{R}$ and $\mathrm{L} \to \mathrm{Q}$）場合：ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{KR}} = (2,2p)$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{LQ}} = (q+c,-2d)$ は同一方向であるから，$q+c>0$ で，p と d は異符号である．

• K が k 上に写り，折れた l が L を通る（$\mathrm{K} \to \mathrm{R}$ and $\mathrm{Q} \to \mathrm{L}$）場合：ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{KR}} = (2,2p)$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QL}} = (-c-q,2d)$ は同一方向であるから，$q+c<0$ で，p と d は同符号である．

以下，方程式 (4.1) の解を α,β,γ とする．
全てが実数解の場合と，一つが実数解で他の二つが虚数解の場合がある．
後者の場合，α を実数解，β,γ を虚数解とする．$\bar{\beta} = \gamma$ である．

解と係数の関係を思い出させておこう．

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= -b \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma &= c \\ \alpha\beta\gamma &= -d \end{aligned} \tag{4.5}$$

一般の場合の方程式の解と係数の関係を正確に把握しているか確かめるのが良いかも知れない．(最高次係数が 1 (モニック) でない場合，その分の差異を補う必要がある．下記の判別式についても．ここでは，判別式は （解の差積)^2 × (最高次係数)$^{2n-2}$ (n は方程式の次数）としている.)

• 全てが実数解の場合： 全て同符号なら，$\alpha\beta\gamma=-d$ より全て d と異符号である．異符号なものがあれば，同符号の二つが d と同符号であり，他の一つが d と異符号である．

• 一つが実数解で他の二つが虚数解の場合：$\beta\gamma$ は正の実数で，α は d と異符号である．

方程式 (4.1) の判別式 D は，

$$D=((\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma))^2 \tag{4.6}$$

で定義される．方程式の判別式について，一般の場合の定義を確実にさせておこう．

解と係数の関係 (4.5) より，

$$D=b^2c^2-4c^3-4b^3d+18bcd-27d^2 \tag{4.7}$$

となる．一般に判別式は係数の多項式になることを注意し，二次方程式と三次方程式の場合には計算させるのが好ましい．また，高校までの実数係数二次方程式の判別式の取扱いが，これらの特別なものであることを認識させよう．

• 全てが実数解の場合： $D\geq 0$ である．

• 一つが実数解で他の二つが虚数解の場合：$\alpha-\beta$ と $\alpha-\gamma$ は互いに共役な複素数であるから，$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$ は正の実数である．$\beta-\gamma$ は純虚数であるから，$(\beta-\gamma)^2$ は負の実数である．従って，$D<0$ である．

解の状況全てに亘り，具体例を作り，上述したことを，K を焦点とし k を準線とする放物線 と L を焦点とし l を準線とする放物線 と それらの共通接線 を描くことを含め，実行させることが肝要である．

• 一つが実数解(正負)で，他の二つが虚数解の場合．

• 全てが実数解の場合．$0<\alpha<\beta<\gamma$，$\alpha<0<\beta<\gamma$，$\alpha<\beta<0<\gamma$，$\alpha<\beta<\gamma<0$，$0<\alpha=\beta<\gamma$，$\alpha=\beta<0<\gamma$，$\alpha=\beta<\gamma<0$，$0<\alpha<\beta=\gamma$，$\alpha<0<\beta=\gamma$，$\alpha<\beta=\gamma<0$，$0<\alpha=\beta=\gamma$，$\alpha=\beta=\gamma<0$．

§5. 正七角形

5.1 作図

手順 1 （図 5.1）図のように折り紙上に格子線を引き，点 O, A, K, L を取り，直線 k を引く.

手順 2 （図 5.2）K が k 上に写り，L が直線 KO 上に写るように折る．K の写る先を点 R，L の写る先を点 Q とする．折り目線と直線 OA の交点（= 線分 KR の中点）を点 P とし，P を通り直線 OA に垂直な直線 m を引く.

手順 3 （図 5.3）折り目線が O を通り，A が m 上に写るように折る（二通り）．A の写る先を点 B, G とする.

手順 4 （図 5.4）折り目線が O, B を通るように折り，A の写る先を点 C，G の写る先を点 D とする.

手順 5 （図 5.5）折り目線が O, G を通るように折り，A の写る先を点 F，B の写る先を点 E とする.

手順 6 （図 5.6）点 A, B, C, D, E, F, G, A をこの順に結んでできる七角形は正七角形である.

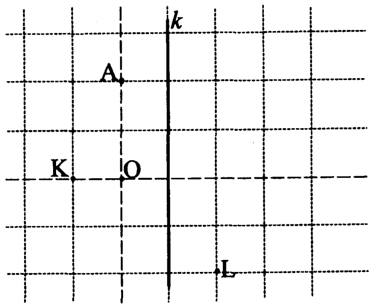


図 5.1: 手順 1

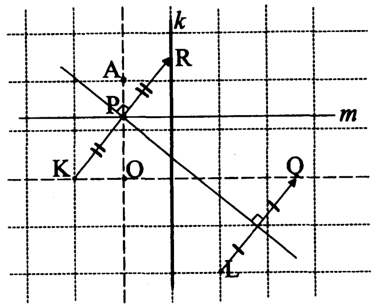


図 5.2: 手順 2

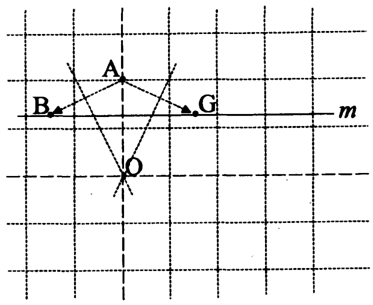


図 5.3: 手順 3

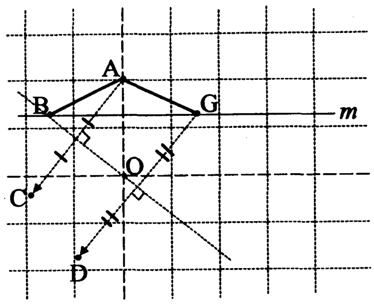


図 5.4: 手順 4

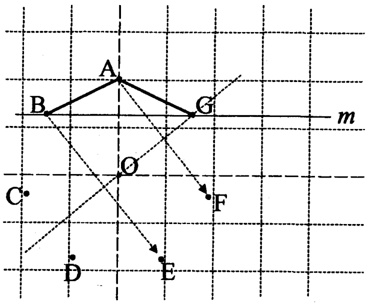


図 5.5: 手順 5

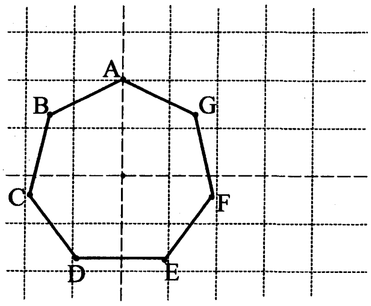


図 5.6: 手順 6

5.2 分析

与えた作図は，方程式

$$z^7 = 1 \tag{5.1}$$

の解法を用いている．これの解は，

$$\rho = \cos\frac{2\pi}{7} + \boldsymbol{i}\sin\frac{2\pi}{7} \tag{5.2}$$

とすれば，

$$1 = \rho^0,\quad \rho,\quad \rho^2,\quad \rho^3,\quad \rho^4 = \rho^{-3} = \overline{\rho^3},\quad \rho^5 = \rho^{-2} = \overline{\rho^2},\quad \rho^6 = \rho^{-1} = \overline{\rho}$$

である．1 以外の解は，方程式

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \tag{5.3}$$

の解である．$y = z + \dfrac{1}{z}$ とおいて，y についての方程式

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 \tag{5.4}$$

を得る．これの解は，

$$s = \rho + \rho^{-1} = 2\,\Re(\rho) = 2\cos\frac{2\pi}{7} \tag{5.5}$$

$$t = \rho^2 + \rho^{-2} = 2\,\Re(\rho^2) = 2\cos\frac{4\pi}{7} \tag{5.6}$$

$$u = \rho^3 + \rho^{-3} = 2\,\Re(\rho^3) = 2\cos\frac{6\pi}{7} \tag{5.7}$$

であり，$s > 0 > t > u$ となっている．このうちの s を §4 の方法で求めて作図したのである．図 5.1 に座標を書き入れたものが図 5.7 であり，O が原点，$\mathrm{K}(-1,0)$, $k : x = 1$, $\mathrm{L}(2,-2)$, $\mathrm{A}(0,2)$, $\mathrm{P}(0,s)$ である．(§4 における直線 l は $y = 0$ である．)

作図の図と対応させるため，Gauß平面を 90° 回転させた図 5.8 を描いておく．A (2), B (2ρ), C $(2\rho^2)$, D $(2\rho^3)$, E $(2\rho^4)$, F $(2\rho^5)$, G$(2\rho^6)$ である．t, u に対応する点を折り紙で求めるには，K が k 上に写り，折れた直線 KO が L を通るように折ればよい(二通り)．

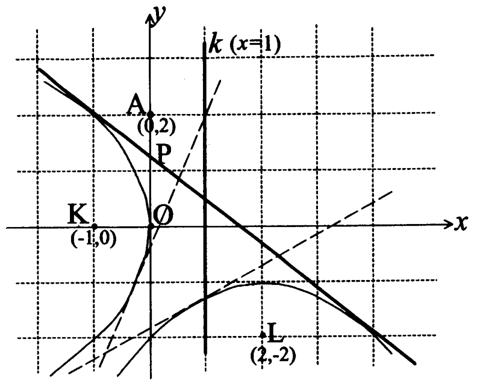


図 5.7:

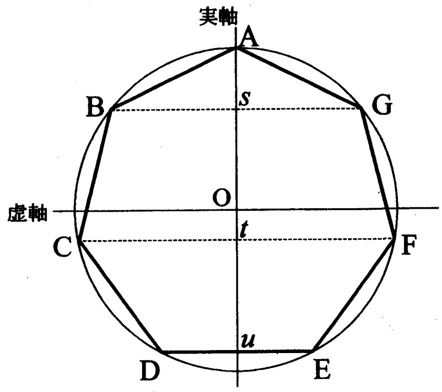


図 5.8:

Descartes 平面上に，点 $(-1, 0)$ を焦点とし直線 $x = 1$ を準線とする放物線と点 $(2, -2)$ を焦点とし直線 $y = 0$ を準線とする放物線を描き，共通接線(三本)を引く作業を是非行わせる事. (cf. 図 5.7)

参考のため s, t, u の近似値と対応する §4 における q の近似値を記しておく. これらの計算をさせるのも無意味ではない.

$$s \sim \ \ 1.24698 \qquad q(s) \sim \ \ 3.60388$$
$$t \sim -0.44504 \qquad q(t) \sim -2.49396$$
$$u \sim -1.80194 \qquad q(u) \sim \ \ 0.89008$$

参 照

[1] ロビン・ハーツホーン (難波誠 訳)，幾何学I,II — 現代数学から見たユークリッド原論，シュプリンガー・ジャパン，2007 October, 2008 February.

[2] ロベルト・ゲレトシュレーガー (深川英俊 訳)，折紙の数学 〜ユークリッドの作図法を超えて〜，森北出版，2002 April.

[3] 加藤渾一， http://izumi-math.jp/K_Katou/K_Katou.html .

折り紙と方程式： http://izumi-math.jp/K_Katou/ori_h/ori_h.htm

折り紙と正多角形： http://izumi-math.jp/K_Katou/ori_t/ori_t.htm

[4] 高木隆司， http://spysee.jp/tag_v2/

[5] 井田哲雄， http://www2.score.cs.tsukuba.ac.jp/