

教育学部・教育学研究科における数学の研究－2つの事例－

熊本大学教育学部 伊藤 仁一 (Jin-ichi Itoh)
Faculty of Education, Kumamoto University

1. はじめに

教育学研究科における数学の研究の内容としてどのようなものがありそうかについて、以前2つの小論で考察した([1],[2])。ここでは、その続きとして、教育学部生が行った数学の研究の事例と、教員研修留学生として熊本大学に滞在したモンゴルの中学高校の数学教員 Buyant 氏が行った研究とを紹介する。

2. 正多面体の辺による展開の再折り凸多面体

立方体の辺を切る展開図の一つであるラテンクロスといわれる展開図について、E. Demaine, J. O'Rourke によって書かれた有名な本「幾何的な折りアルゴリズム([3])」では、その展開図の境界を張り合せることによって再構成される凸多面体(再折り凸多面体)を全て調べ立方体も含めて 23 種類となることが紹介されている。ここでは平面多角形2枚に退化する2重被覆多角形も凸多面体として扱っている。

そこで、教育学部数学科3年生の後記に8人程度の学生を対象にこの本のその部分のみを輪講の形式で読んでもらい、立方体の他の10種類の展開図についても同様に調べようとした。しかし、一般の再折りについて考察することは学生には難しいようなので、まず、特殊な再折りの仕方として、次のジッパー再折りの場合を調べてもらった。展開図 T における外周部の長さを L とする。 T の外周上の任意の頂点を始点を $s \in \partial T$ とし、 s から測った ∂T の外周部の中点を終点 $g \in \partial T$ とする。つまり g は $|s, g| = |g, s| = L/2$ を満たす一意的に決まる点である。ここで周上に s から g への2つのパスが得られそれを接着する。具体的には $|s, x| = d$ であるそれぞれの点 x と x' を接着する。今回は正多面体の展開図なので、 s に対する g は容易に見つけることができ、更に、また点ではなく辺の対応を考えて接着していくという辺々接着として考えれば十分であることが分かっている。今回は、鏡映変換によって移り合うものは同一視して分類を行ってもらった。

実際には、ジッパー再折りの始点を決め、紙で作った展開図のモデルをセロテープで貼っていくという作業を学生にやってもらった。この作業自体は、セロテープで貼っていくと、自然に新しい折れ線が現われ、凸多面体となっていく、学生にとっては

面白い作業であったように思われる。

立体を再構成するにあたって、アレクサンドロフの接着定理『多角形の接着が以下の条件を満たすとする。(a)すべての多角形の境界部分が接着に使われている。(b)どの点においても角度の総和が 2π を超えない。(c)結果として得られる複体が球体に位相同型である。このとき、こうした接着に対応する凸多面体は一意的に決まる。』が重要であり、多角形から多面体を構成できるかどうか、また構成できるとすればどんな凸多面体を得られるかを決めるときの基本となる。

学生には、一応、事前に説明したが、十分に理解しているとは思われなかった。しかし、アレクサンドロフの定理の条件を満たすようにセロテープで貼っていくと自然に凸多面体となってくるので、アレクサンドロフの定理の凄さを実体験することができ、教育上にも十分に価値があるものと思われる。

定理 1. 立方体の辺による展開図からジッパー再折りによって凸多面体ができる場合は 27 通りあり、2 重被覆多角形に退化するものが 5 種類、立方体を含めて立体となるものが 5 種類である。また、立方体をジッパー再折りで再構成することのできる場合は 3 通りある。展開図から再構成される立体を図 1 に載せる。立体の詳細については、図 3 の一覧表に載せておく。

定理 2. 正八面体の辺による展開図からジッパー再折りによって凸多面体ができる場合も 27 通りあり、2 重被覆多角形に退化するものが 6 種類、立方体を含めて立体となるものが 5 種類である。また、立方体をジッパー再折りで再構成することのできる場合は 3 通りある。展開図から再構成される立体を図 2 に載せる。立体の詳細については、図 3 の一覧表に載せておく。

立方体と正八面体の辺を切る展開図の種類がどちらも 11 種類であることは立方体と正八面体がそうついでであることから説明がつくが、ジッパー再折りについても同じく 27 通りであることは、おそらく偶然であろうかと思われるし、実際、できる 2 重被覆多面体の種類は異なっている。

学部学生の研究としてはジッパー再折りの場合だけでも十分かとは思われるが、一応、立方体の場合に関しては、一般の場合についてすべての可能性を調べてもらい熊本大学の紀要に発表した([5])。ただ、この場合は回転ベルトといわれる状態が生じ、再折りしてできる凸多面体がワンパラメーターの連続的な無限種類となる場合が 3 種類の展開図から生じること等が分かった。また、正十二面体の辺による展開の再折り凸多面体は正十二面体しかないことが、最近分かり興味深い分野と言える([10])。

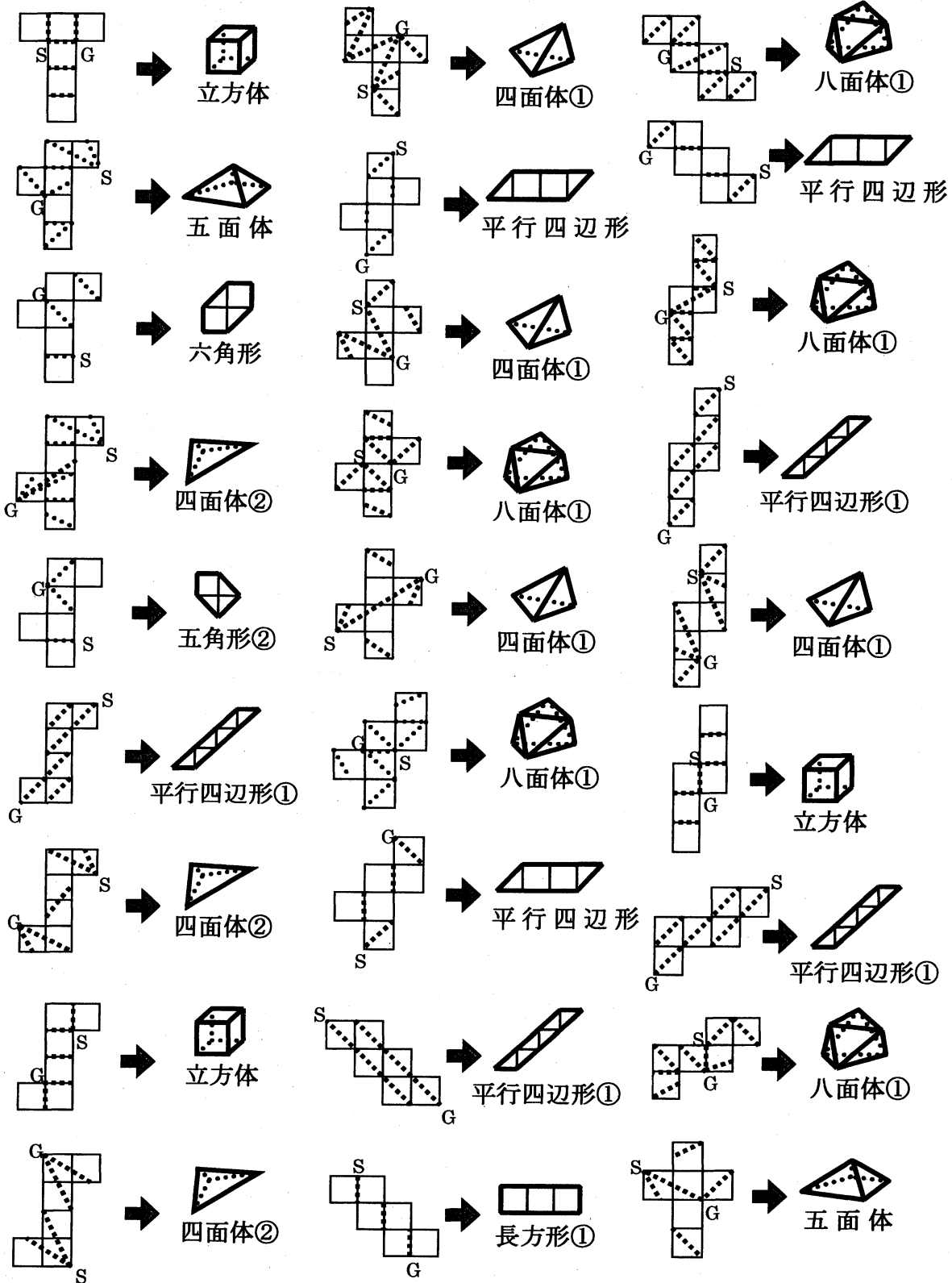


図1 ジッパー再折り凸多面体 (立方体)

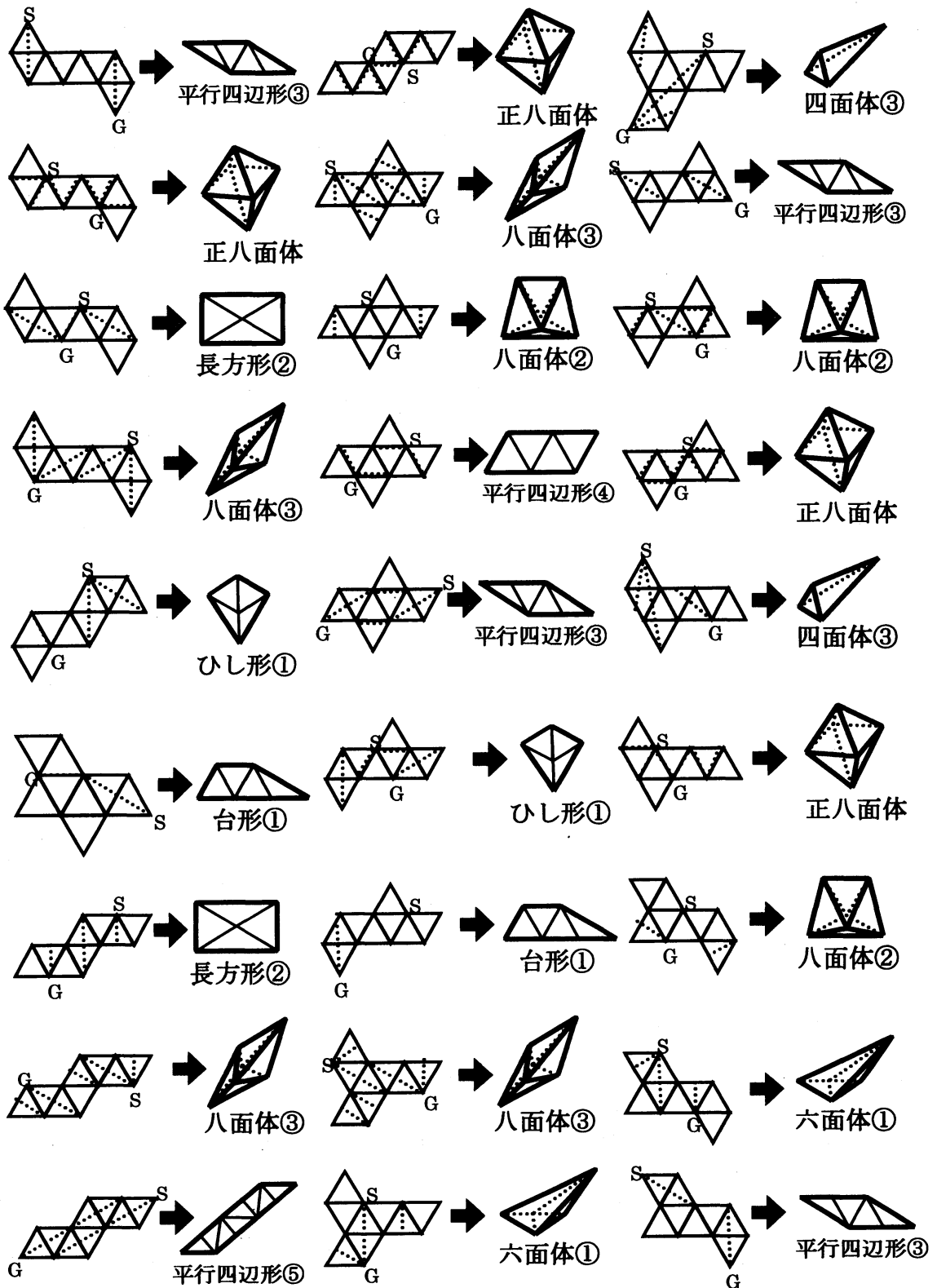


図2 ジッパー再折り凸多面体 (正八面体)






















	立体を構成する面 ()内はもとの立体の一边を1としたときの長さ		立体を構成する面 ()内はもとの立体の一边を1としたときの長さ
 立方体	・正方形(1,1,1)が6つ	 正八面体	・正三角形(1,1,1)が8つ
 四面体①	・二等辺三角形($\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$)が4つ	 四面体③	・正三角形(1,1,1)が1つ ・二等辺三角形(1, $\sqrt{7}, \sqrt{7}$)が1つ ・三角形(1,2, $\sqrt{7}$)が2つ
 四面体②	・直角三角形(1,2, $\sqrt{5}$)が2つ ・三角形(2, $\sqrt{5}, \sqrt{13}$)が2つ	 六面体①	・正三角形(1,1,1)が2つ ・直角三角形(1,2, $\sqrt{3}$)が2つ ・二等辺三角形(1,1, $\sqrt{3}$)が2つ
 五面体①	・四角形(1,1, $\sqrt{5}, \sqrt{5}$)が1つ ・三角形($\sqrt{2}, \sqrt{5}, 3$)が2つ ・直角三角形(1,1, $\sqrt{2}$)が2つ	 八面体②	・正三角形(1,1,1)が6つ ・二等辺三角形(1,1, $\sqrt{3}$)が2つ
 八面体①	・直角二等辺三角形($\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2$)が2つ ・直角三角形(1,2, $\sqrt{5}$)が2つ ・直角二等辺三角形(1,1, $\sqrt{2}$)が4つ	 八面体③	・二等辺三角形(1,1, $\sqrt{3}$)が8つ
 長方形①	・(1,1,3,3)が2つ	 長方形②	・(1,1, $\sqrt{3}, \sqrt{3}$)が2つ
 平行四辺形①	・(1,1, $3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$)が2つ	 ひし形①	・(1,1, $\sqrt{3}, \sqrt{3}$)が2つ
 平行四辺形②	・(3,3, $\sqrt{3}, \sqrt{3}$)が2つ	 平行四辺形③	・(2,2, $\sqrt{3}, \sqrt{3}$)が2つ
 五角形①	・(1,1, $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$)が2つ	 平行四辺形④	・(1,1,2,2)が2つ
 六角形①	・(1,1,1,1, $\sqrt{2}, \sqrt{2}$)が2つ	 平行四辺形⑤	・(1,1, $2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$)が2つ
		 台形①	・(1,1, $\sqrt{3}, 3$)が2つ

図3 再折り凸多面体の一覧表

3. 四角形及び多角形への垂心のある種の拡張

以前の講究録([2])でも紹介した以下の Buyant 氏の発見した三角形と円に関する定理([3]) はその後も書かれている文献は見つからなく、おそらく新しい発見であるといつてよいと思われる。

定理 3. 任意の三角形 ABC に対して、ある円が直線 BC と B_1, C_2 で交わり、直線 CA と C_1, A_2 で交わり、直線 AB と A_1, B_2 で交わる時、三点 A, A_1, A_2 からなる三角形の外心を A_0 、三点 B, B_1, B_2 からなる三角形の外心を B_0 、三点 C, C_1, C_2 からなる三角形の外心を C_0 とする。こととき、 A_0, B_0, C_0 からそれぞれ辺 BC, CA, AB におろした 3 垂線は 1 点 X で交わる。

その後も Buyant 氏は熊本大学滞在中に、以下のような四角形の垂心といえるような点の存在について予想し、座標を用いての計算によって 4 つの垂線が一転で交わることを証明した。数理解析研究所での共同研究の際に兵庫教育大学の濱中先生から初等幾何的な証明のアイデアを指摘していただき、[4] ではそれに沿っての証明を載せている。

定理 4. 四角形 $ABCD$ の対角線の交点を E とするとき、三角形 EAB の垂心から CD へ下ろした垂線、三角形 EBC の垂心から DA へ下ろした垂線、三角形 ECD の垂心から AB へ下ろした垂線、三角形 EDA の垂心から BC へ下ろした垂線は 1 点 H_1 で交わる。

四角形を対角線で 2 つの三角形に分ける場合、その分け方は二通りあり (対角線が二本であることより)、各場合に 2 つの三角形の垂心を結ぶ 2 直線が得られるがこの交点は定理 1 の 4 垂線の交点 H_1 と一致する。

定理 5. 四角形 $ABCD$ に対し、三角形 ABC, BCD, CDA, DAB それぞれの垂心を H_a, H_b, H_c, H_d とするとき、直線 H_aH_c と H_bH_d の交点は定理 1 の 3 垂線の交点 H_1 と一致する。

更に、この点 H_1 を一般化された垂心と呼ぶことにすると、以下のような多角形への拡張が考えられる。五角形の場合は、三角形と四角形に分ける分け方は 4 通りあり、各場合に三角形の垂心と四角形の一般化された垂心を結ぶ 5 つの直線は一点で交わりこの点を五角形の一般化された垂心とみなす。六角形以上の場合も同様に定義できることを以下の定理で示す。

定理 6. 一般の n 角形 $A_1A_2 \dots A_n$ に対して, 対角線によって三角形と $n-1$ 角形に分割する仕方は n 通りあり, その三角形の垂心と $n-1$ 角形の上記の意味の一般化した垂心を結ぶ n 本の直線は 1 点で交わる.

定理 5, 6 に関しては複素座標を用いて証明を与えたが, 更に初等幾何的な証明を与えられることが期待される. 尚, 4 角形 5 角形 6 角形の場合には, 2012 年の春の日本数学会において蛭子井氏が発表されている結果と同じです([7]).

次に, 円に内接する四角形に対して得た結果を紹介する.

定理 7. 円に内接する四角形 $ABCD$ の対角線の交点を E とする. 三角形 ABE, BCE, CDE, DAE の外心から辺 CD, DA, AB, BC におろした 4 垂線は一点 E で交わる.

定理 8. 円に内接する四角形 $ABCD$ の辺 AB, BC, CD, DA のそれぞれの中点から対辺におろした 4 垂線は一点で交わる.

定理 9. 円に内接する $ABCD$ 四角形の対角線の交点を E とする. 三角形 ABE, BCE, CDE, DAE の重心から辺 CD, DA, AB, BC におろした 4 垂線は一点 E で交わる.

尚, 定理 7 は 2006 年に Myakishev によって発表されている([11]).

最後に, 三角形の重心, 外心, 垂心は同一直線上にあり, この直線はオイラー線と呼ばれることはよく知られているが, 四角形についても一般化された垂心を定理 4 のように定義することに対応して, ある意味での重心, 外心に相当するような点を同様に定義すると場合において, 三角形のオイラー線のアナロジーについて考察し, 以下の結果を得た.

定理 10. 四角形 $ABCD$ の対角線 AC, BD それぞれの中点を M, N とし, E を対角線の交点, G_a, G_b, G_c, G_d をそれぞれ三角形 BCD, CDA, DAB, ABC の重心, O_a, O_b, O_c, O_d をそれぞれ三角形 BCD, CDA, DAB, ABC の外心, H_a, H_b, H_c, H_d をそれぞれ三角形 BCD, CDA, DAB, ABC の垂心, $G_aG_c \cap G_bG_d = G_1, O_aO_c \cap O_bO_d = O_1, H_aH_c \cap H_bH_d = H_1$ とするとき,

- 1) 点 G_1, O_1, H_1 は一直線上にある.
- 2) $2 O_1G_1 = G_1H_1$ となる.

これらのことから, 初等幾何においてもまだまだ新しい定理の発見は十分可能であり, 数学教師を目指す学生や実際の中学校高等学校の数学の先生方, 更には中学生

高校生にも興味を持って頂ければ幸いである。以前にも書いたが、最近の計算機の発達によって図形ソフトが多くの機能を備えたため、三直線がいつも1点で交わっているかどうかは、描いた図形を変形してみれば容易に確かめられるようになり、図形の性質がより予想しやすくなったといえる。ただ、これはあくまでも予想であって、厳密な証明を与えられた定理かどうかについては正確に検証して発表することが必要であるという数学者にとって当たり前の事柄を今一度、確認しておく必要もある。

滋賀県の高校生の研究として九点円の定理の3次元空間への拡張を考えて、十二点球の定理を得たというような話を滋賀大学の神先生から伺ったことがあるが、Buba-Brzozowa が 2005 年に発表している内容([8]) の一部とほぼ同じと思われる。このことから本当に新しい発見を高校生や大学生ができる可能性も高くなってきており、ますます期待される。

参考文献

- [1] 伊藤仁一：教育学研究科における数学の研究－直観幾何学的視点から－，京都大学数理解析研究所講究録 1657 (2009), 157-176.
- [2] 伊藤仁一：教育学研究科における数学の研究－修士論文指導等における2，3の事例－，京都大学数理解析研究所講究録 1711 (2010), 204-209.
- [3] 伊藤仁一，Jamsran Buyant：三角形と円から決まる点についての研究，熊本大学教育学部紀要，第59号，11-18，(2010).
- [4] 伊藤仁一，Jamsran Buyant：四角形及び多角形への垂心のある種の拡張，熊本大学教育学部紀要，第60号，51-58，(2011).
- [5] 伊藤仁一，奈良知恵，柴尾有星，高木淳，濱智大，山下雄太郎，山下進太郎：正多面体の辺による展開の再折り凸多面体－立方体を中心として－，熊本大学教育学部紀要，第61号，65-74，(2012).
- [6] 岩田至康編：幾何学大辞典全6巻，補巻I,II，槇書店，1978.
- [7] 蛭子井博孝：多角形の垂心の定義とその4角形，5角形，6角形の例示図，日本数学会 2012 年度年回幾何学分科会講演アブストラクト p.71-72.
- [8] M. Buba-Brzozowa: The Monge point and the $3(n+1)$ point sphere of an n -simplex, *Journal for Geometry and Graphics*, Vol 9 (2005), 31-36.
- [9] E. D. Demaine and J. O'Rourke: *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, July 2007.
邦訳「幾何的折りアルゴリズムーリンクエージ，折り紙，多面体ー」上原隆平訳，近代科学社，2009年.
- [10] E. D. Demaine, M. L. Demaine, J. Itoh, A. Lubiw, C. Nara, and J. O'Rourke:

Refold rigidity of convex polyhedra. CGTA to appear.

- [11] A. Myakishev: On two remarkable lines related to a quadrilateral, Forum Geom. Vol 6 (2006), 289-295.