

時間周波数解析手法と Wigner-Ville 分布

山田 道夫

京都大学数理解析研究所

yamada@kurims.kyoto-u.ac.jp

概要

信号の時間周波数解析には便宜的なものも含めさまざまな解析手法が考案されてきた。これらの時間周波数解析の手法は大きく分けて、局所フーリエ変換、Wigner-Ville 分布、ウェーブレット変換、それぞれの系統があるが、これらは別々のものではなく相互に関係する概念である。窓付きフーリエ変換とウェーブレット変換は信号の線形変換に基礎を置くのに対し、Wigner-Ville 分布は信号の二次形式に基礎を置いている。ここでは Wigner-Ville 分布をめぐる時間周波数解析について若干の review を試みる。

1 窓付きフーリエ変換

関数 (信号) $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ の周波数構造を表すものとして、理工学ではフーリエ変換

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx,$$

がよく用いられるが、 $\hat{f}(\omega)$ は時間変数を含まないため、信号の周波数分布が時間的に変化する場合にはフーリエ変換は必ずしも便利ではない。そこで信号の時間局所的な周波数構造を調べるため、窓関数 $w(x) \in L^2(\mathbb{R})$ によって $x = b$ 付近に制限した信号 $w(x-b)f(x)$ のフーリエ変換

$$S_f(b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \overline{w(x-b)} f(x) dx, \quad (1)$$

がしばしば用いられる (上線は複素共役)。これを窓付きフーリエ変換 (windowed Fourier transform) といい、 $|S_f(b, \omega)|^2$ は スペクトログラム (spectrogram) とよばれる。 $\|w\| = 1$ を満たす窓関数に対し、再生核

$$K(b_0, b, \omega_0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t-b) \overline{w(t-b_0)} e^{-i(\omega_0-\omega)t} dt, \quad (2)$$

を

$$K(b_0, b, \omega_0, \omega) = e^{-i(\omega_0-\omega)(b+b_0)/2} A_w(\omega_0 - \omega, b_0 - b) \quad (3)$$

$$A_w(\tilde{\omega}, \tilde{b}) = \int_{-\infty}^{\infty} w\left(\tau + \frac{\tilde{b}}{2}\right) \overline{w\left(\tau - \frac{\tilde{b}}{2}\right)} e^{-i\tilde{\omega}\tau} d\tau, \quad (4)$$

と書くとき、 A_w は窓関数 w の 曖昧さ関数 (ambiguity function) とよばれ窓付きフーリエ変換の時刻と周波数の精度を表す [1].

2 量子統計力学における Wigner 分布

2.1 相空間における作用素の表現

気体の量子統計力学の研究において、1932年 Wigner は作用素 A の相空間（位置-運動量空間）での表現を次のように提案した [2].

$$P_W A(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-ipr/\hbar} \langle x|A|x' \rangle, \quad \left(q = \frac{x+x'}{2}, r = x-x' \right) \quad (5)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-ipr/\hbar} \left\langle q + \frac{r}{2} \left| A \right| q - \frac{r}{2} \right\rangle \quad (6)$$

とくに A が通常関数 $U(x)$ の場合は

$$\langle x|U|x' \rangle = U(x)\delta(x-x') = U\left(q + \frac{r}{2}\right)\delta(r) \quad (7)$$

より $P_W U(q, p) = U(q)$ となる. また A が運動量作用素 p の関数 $K(p)$ の場合は

$$\langle x|K|x' \rangle = K\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x-x') \quad (8)$$

であるから

$$\begin{aligned} P_W K(q, p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-ipr/\hbar} K\left(\frac{\hbar}{i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\delta(r) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-ipr/\hbar} K\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial r}\right)\delta(r) \\ &= K(p). \end{aligned}$$

となり、この表現が整合的であることが分かる.

2.2 密度行列と力学量の平均値

量子統計力学では力学量（作用素） A の平均値 $\langle A \rangle$ は、密度行列作用素 ρ を用いて $\langle A \rangle = \text{Tr}(A\rho)$ と表現される. これは密度行列の Wigner 分布

$$P_W \rho(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-ipr/\hbar} \langle x|\rho|x' \rangle, \quad \left(q = \frac{x+x'}{2}, r = x-x' \right) \quad (9)$$

を用いると

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(A\rho) \quad (10)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' \langle x'|A|x \rangle \langle x|\rho|x' \rangle \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' dp \langle x'|A|x \rangle e^{ip(x-x')/\hbar} \rho_W(p, q) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp dq P_W A(q, p) P_W \rho(q, p) \quad (13)$$

のように $P_W\rho(q, p, t)$ と $P_W A(q, p)$ の積の積分として表わすことができる。このことは $P_W\rho(q, p, t)$ を、古典力学における相空間上の密度分布関数の 対応物 と解釈する動機付けを与えている。

古典力学では相空間上の密度分布関数の時間発展は Liouville 方程式によって記述される。量子力学では、例えば Hamiltonian

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad (14)$$

で支配される 1 次元系においては密度行列の時間発展（の座標表示）は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x|\rho(t)|x' \rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) + U(x) - U(x') \right] \langle x|\rho(t)|x' \rangle \quad (15)$$

となり、これより Wigner 分布の時間発展を記述する方程式（Liouville 方程式）が次のように得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} P_W\rho(q, p, t) = \left[-\frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{i\hbar} \left\{ U\left(q - \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) - U\left(q + \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p}\right) \right\} \right] P_W\rho(q, p, t) \quad (16)$$

3 Wigner-Ville 分布

3.1 定義

1948 年 Ville は Wigner 分布を信号解析の分野に導入した [3]。もともと Wigner 分布は作用素 A に対する概念であるが、関数 $f(x)$ の場合には作用素を $A = |f\rangle\langle f|$ と定義すると $f(x)$ の Wigner 分布を考えることができる。これにより関数 $f(x)$ の相空間の密度分布 $P_W f(p, q)$ は次のように定義される。これは Wigner-Ville 分布または（作用素と関数の違いはあるものの）Wigner 分布とよばれている。

$$P_W f(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-ipr/\hbar} \langle x|f\rangle \langle f|x' \rangle \quad (17)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-ipr/\hbar} f(x) \overline{f(x')} \quad (18)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-ipr/\hbar} f\left(q + \frac{r}{2}\right) \overline{f\left(q - \frac{r}{2}\right)} \quad (19)$$

ここで q, r と x, x' は次の関係にある。

$$q = \frac{x + x'}{2}, \quad r = x - x' \quad (20)$$

以下では量子力学から離れて Wigner-Ville 分布について述べるため、 $\hbar = 1$ とおき、あらためて次のように定義する。

Wigner-Ville 分布とは信号 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ に対する次の 2 次形式をいう [3, 4].

$$P_W f(b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(b + \frac{x}{2}\right) \overline{f\left(b + \frac{x}{2}\right)} e^{-i\omega x} dx. \quad (21)$$

例えば $f(x) = \exp(-x^2)$ に対しては

$$P_W f(b, \omega) = \sqrt{2\pi} e^{-2b^2} e^{-\omega^2/2} \quad (22)$$

となる (フーリエ変換は $\hat{f}(x) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$).

3.2 推移不変性, 周辺条件, サポート

Wigner 分布は, 信号が複素数のときにも実数値となり, 信号が時間軸あるいは周波数軸に平行移動すれば同様に平行移動する (推移不変性).

Wigner-Ville 分布は時間と周波数についての 周辺条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_W f(b, \omega) db = |\hat{f}(\omega)|^2, \quad (23)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_W f(b, \omega) d\omega = |f(b)|^2, \quad (24)$$

を満たす.

また $f(x)$ のサポート $\text{supp } f$ がコンパクトな場合は

$$\text{supp } P_W f(\bullet, \forall \omega) \subset \text{supp } f \quad (25)$$

が成り立ち, $\hat{f}(\omega)$ のサポート $\text{supp } \hat{f}$ がコンパクトな場合は

$$\text{supp } P_W f(\forall b, \bullet) \subset \text{supp } \hat{f} \quad (26)$$

が成り立つ. すなわち W_f のサポートの時間軸あるいは周波数軸への射影は, それぞれ f あるいは \hat{f} のサポートに含まれる. これは時間周波数面における分布として自然な性質と考えられる [1].

3.3 干渉項, 非正值性

Wigner-Ville 分布は上述の良い性質と共に, 2 次形式であることに起因する欠点も伴っている. その一つは, 信号の和 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ の Wigner-Ville 分布には $P_W f = P_W f_1 + P_W f_2 + I(f_1, f_2)$ のように干渉項 $I(f_1, f_2)$ が生じることである. この項がしばしば物理的解釈が困難な正負の振動を伴う. また, より深刻なのは $P_W f(\omega, b)$ の正值性¹が保証されないことである. これは原理的な問題で,

¹正確には非負値性.

一般に周辺条件 (23)(24) を満たす Hermite 2 次形式の非負値分布 $P_W f(\omega, b)$ は存在しないことが知られている (Wigner). 例えば区間 $[-1, 1]$ の定義関数 $1_{[-1,1]}(x)$ を $f(x)$ とするとき

$$P_W f(b, \omega) = \frac{2 \sin(2\omega(1 - |b|))}{\omega} 1_{[-1,1]}(b) \quad (27)$$

となるが, これは ω とともに振動し符号が変化するため, 正值性を保たない [1].

3.4 Moyal の関係式

作用素 A の量子統計力学的な平均値 (10)-(13) において

$$A = |f\rangle\langle f|, \quad \rho = |h\rangle\langle h| \quad (28)$$

とおくと次式が得られる. これを Moyal の関係式という.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(x)} f(x) dx \right|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp dq P_W h(q, p) P_W f(q, p) \quad (29)$$

この関係式からさまざまな関係式を導くことができる [1, 4]. Moyal の関係式 (29) で $h(x) = w(x-b)e^{i\omega x}$ とおくと, 次のようにスペクトログラムが信号と窓関数の Wigner-Ville 分布によって表される.

$$|S_f(b, \omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_W f(b', \omega') P_W w(b' - b, \omega' - \omega) db' d\omega' \quad (30)$$

また, 連続ウェーブレット変換に対してはアナライジングウェーブレット $\psi(x)$ に対して

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (31)$$

とおくと (29) より

$$|T(a, b)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_W \psi\left(\frac{b'-b}{a}, a\omega'\right) P_W f(b', \omega') d\omega' db' \quad (32)$$

が得られる. これらはスペクトログラムや連続ウェーブレット変換 (の二乗) が Wigner 分布から得られることを示している.

3.5 スペクトログラムと Cohen クラス

窓付きフーリエ変換の場合について, スペクトログラム (窓付きフーリエ変換の絶対値の二乗) のフーリエ変換を考える.

$$\hat{S}_f(\tilde{b}, \tilde{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{b}\omega - i\tilde{\omega}b} S_f(b, \omega) db d\omega \quad (33)$$

この $\hat{S}_f(\tilde{b}, \tilde{\omega})$ は特性関数ともよばれる。(30) が二つの Wigner-Ville 分布の畳み込みの形をしていることから分かるように、特性関数はこれらの Wigner-Ville 分布のフーリエ変換の積となるが、一般に $f(x)$ の Wigner-Ville 分布 $P_W f(b, \omega)$ のフーリエ変換は $f(x)$ の曖昧さ関数 $A_f(\tilde{\omega}, \tilde{b})$ (定義は (4)) であるので、結局、スペクトログラムのフーリエ変換は信号および窓関数の曖昧さ関数の積として表される。

$$\hat{S}_f(\tilde{b}, \tilde{\omega}) = A_f(\tilde{\omega}, \tilde{b}) A_w(\tilde{\omega}, \tilde{b}) \quad (34)$$

以上の観察に基づき、この式において、窓関数の曖昧さ関数 $A_w(\tilde{\omega}, \tilde{b})$ を一般の二変数関数 (核関数) $\phi(\tilde{\omega}, \tilde{b})$ に置き換えてフーリエ逆変換して得られる分布

$$P_C(b, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tilde{b}\omega + i\tilde{\omega}b} A_f(\tilde{\omega}, \tilde{b}) \phi(\tilde{\omega}, \tilde{b}) d\tilde{b} d\tilde{\omega} \quad (35)$$

を考える。これは 1966 年に Cohen によって提案され現在 Cohen クラスとよばれている分布である [4]。Cohen 分布の性格は核関数によって決定される。特に $\phi(\tilde{\omega}, \tilde{b}) = 1$ の場合は Wigner-Ville 分布となるが、他に適当な核関数を選ぶことによってさまざまな時間周波数分布を得ることができる。

Cohen クラスについては、 $\phi(\omega, 0) = 1$ であれば周波数のついでにの周辺条件、

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_C f(b, \omega) db = |\hat{f}(\omega)|^2 \quad (36)$$

が、また、 $\phi(0, b) = 1$ であれば時間のついでにの周辺条件、

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_C f(b, \omega) d\omega = 2\pi |f(b)|^2 \quad (37)$$

がそれぞれ成り立ち、 $\phi(0, 0) = 1$ であればエネルギー保存の条件

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_C f(b, \omega) db d\omega = \|f\|^2, \quad (38)$$

が成り立つ。

3.6 スカログラムとアフィンクラス

窓付きフーリエ変換の二乗をスペクトログラムと呼んだように、連続ウェーブレット変換の二乗

$$|T(a, b)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_W \psi \left(\frac{b' - b}{a}, a\omega' \right) P_W f(b', \omega') d\omega' db' \quad (39)$$

を スカログラム (scalogram) と呼ぶ。ここで ψ はアナライジングウェーブレットである。

そこで (39) の中で $P_W\psi((b' - b)/a, a\omega')$ を一般の関数 $\hat{\phi}((b' - b)/a, a\omega')$ に置き換えて, 新しい分布 $P_Af(a, b)$ を

$$P_Af(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{b' - b}{a}, a\omega'\right) P_Wf(b', \omega') d\omega' db' \quad (40)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\omega}b} \phi\left(a\tilde{\omega}, \frac{\tilde{b}}{a}\right) A_f(\tilde{\omega}, \tilde{b}) d\tilde{b} d\tilde{\omega} \quad (41)$$

と定義し, これををアフィンクラス分布という (便宜上 ϕ ではなく $\hat{\phi}$ と書いた).

3.7 Cohen クラスとアフィンクラス

Cohen クラスの核関数 $\phi(\tilde{\omega}, \tilde{b})$ がスケール不変条件

$$\phi\left(a\tilde{\omega}, \frac{\tilde{b}}{a}\right) = \phi(\tilde{\omega}, \tilde{b}), \quad \text{すなわち} \quad \phi(\tilde{\omega}, \tilde{b}) = g(\tilde{\omega}\tilde{b}) \quad (42)$$

を満たすとき (積型核関数) を考える.

$$\Phi(\tilde{\omega}, \tilde{b}) = g(\tilde{\omega}\tilde{b})e^{-i\omega_0\tilde{b}} \quad (43)$$

とおくと

$$\Phi\left(a\tilde{\omega}, \frac{\tilde{b}}{a}\right) = g(\tilde{\omega}\tilde{b})e^{-i\omega_0\tilde{b}/a} = \phi(\tilde{\omega}, \tilde{b})e^{-i\omega_0\tilde{b}/a}, \quad (44)$$

となるので

$$P_Cf(b, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{b}(\omega_0/a - \omega) + i\tilde{\omega}\tilde{b}} A_f(\tilde{b}, \tilde{\omega}) \Phi\left(a\tilde{\omega}, \frac{\tilde{b}}{a}\right) d\tilde{b} d\tilde{\omega} \quad (45)$$

が得られる. これは

$$P_Cf\left(b, \frac{\omega_0}{a}\right) = P_Af(a, b), \quad (46)$$

すなわち積型核関数に対してはアフィンクラスと Cohen クラスは一致することを示している.

このように, 時間周波数分布の二つの形式である Cohen クラスとアフィンクラスには, それぞれ核関数の選び方によってさまざまなものがあるが, 特に核関数が積型核関数となるときにはこれらは実質的に同じ分布族を与える. すなわちこれら二つのクラスには (積型核関数による) 共通部分が存在する. とくに Wigner-Ville 分布は, 核関数が定数関数したがって積型核関数であるため, この共通部分に属する時間周波数分布の一つである.

3.8 Husimi (伏見) 分布

Wigner-Ville 分布は正値性が保証されないが、確率あるいは分布密度としての解釈のためには正値性が必要である。そこで正値性を保証する相空間分布として提案されたもののひとつが Husimi 分布 [5] である。近年 Husimi 分布は、量子カオスの分野で波動関数と古典軌道の対応を論じる際にしばしば用いられる。以下 1 次元の場合を考える。量子統計力学における密度行列 ρ に対し、最小波束

$$\Psi_{p,q}(x) = \frac{1}{(\pi\alpha)^{1/4}} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha}(x-q)^2 + \frac{i}{\hbar}px\right] \quad (47)$$

による平均

$$P_H\rho(p,q) = \langle \Psi_{p,q} | \rho | \Psi_{p,q} \rangle \geq 0 \quad (48)$$

を Husimi 分布という。密度行列は定義から正値性が保証されているので Husimi 分布は正値²となる。関数に対しては、Wigner-Ville 分布の時と同様、純粋状態の密度行列 $\rho = |f\rangle\langle f|$ を考える。このとき Husimi 分布は $P_H f(p,q) = |\langle f | \Psi_{p,q} \rangle|^2$ となるので

$$P_H f(p,q) \quad (49)$$

$$= \frac{1}{\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq' dr f\left(q' + \frac{r}{2}\right) \overline{f\left(q' - \frac{r}{2}\right)} \quad (50)$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{\alpha}(q-q')^2 - \frac{1}{4\alpha}r^2 - \frac{i}{\hbar}pr\right] \quad (51)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq' dp' 2 \exp\left[-\frac{1}{\alpha}(q-q')^2 - \frac{\alpha}{\hbar^2}(p-p')^2\right] P_W f(p',q') \quad (52)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq' dp' P_W \Psi_{p,q}(p',q') P_W f(p',q') \quad (53)$$

となり、Wigner-Ville 分布を用いて表すことができる。

4 発展方程式と Wigner-Ville 分布

4.1 非線形方程式の解の統計理論

短時間フーリエ変換やウェーブレット変換は微分作用素との相性があまり良くないため、データ解析に多用される反面、微分方程式に用いられる機会は少ない。しかし Wigner-Ville 分布はもともと量子統計力学的な背景のもとに考案されたもので、微分方程式の解析にも使用されることがある。その一例は、水面に立つ波

²非負値。

の統計理論に関するものである [6, 7, 8]. 以下では次の非線形 Schrödinger 方程式
方程式

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\omega_0}{dk_0} \frac{\partial}{\partial x} \right) A + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_0}{dk_0^2} A - \frac{1}{2} \omega_0 k_0^2 |A|^2 A = 0 \quad (54)$$

の解の統計理論への応用に触れる ($\omega_0 = \omega_0(k_0)$ は既知の分散関係式で各項の係数はすべて定数). 解のアンサンブルに対し, 準正規近似の下にエネルギースペクトルの定常性を議論する [9].

4.2 準正規近似による二次相関方程式

上の方程式を変数変換によって

$$i \frac{\partial}{\partial t} A - \frac{\partial^2}{\partial x^2} A - |A|^2 A = 0 \quad (55)$$

の形に書き, 解のアンサンブルに対して振幅 $A(x, t)$ の二次相関

$$C(x, r, t) = \langle A(x_1, t) A^*(x_2, t) \rangle \quad (56)$$

$$= \left\langle A \left(x + \frac{r}{2}, t \right) A^* \left(x - \frac{r}{2}, t \right) \right\rangle \quad (57)$$

$$(58)$$

の時間発展を考える. ここでは $x = (x_1 + x_2)/2$, $r = x_2 - x_1$ とおいた. 二次相関の時間微分は

$$i \frac{\partial}{\partial t} C - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) C - \langle A^2(x_1) A^*(x_1) A^*(x_2) \rangle + \langle A^2(x_2) A^*(x_2) A^*(x_1) \rangle = 0 \quad (59)$$

となるが, 準正規近似

$$\langle A^2(x_1) A^*(x_1) A^*(x_2) \rangle = 2 \langle A(x_1) A^*(x_1) \rangle \langle A(x_1) A^*(x_2) \rangle, \quad (60)$$

$$\langle A^2(x_2) A^*(x_2) A^*(x_1) \rangle = 2 \langle A(x_2) A^*(x_2) \rangle \langle A(x_2) A^*(x_1) \rangle \quad (61)$$

を導入すると, 二次相関についての閉じた時間発展方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} C(x, r, t) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial r} C(x, r, t) - 2C(x, r, t) [C(x + r/2, 0, t) - C(x - r/2, 0, t)] = 0 \quad (62)$$

が得られる.

4.3 平均 Wigner-Ville 分布の発展方程式

振幅 $A(x, t)$ の Wigner-Ville 分布

$$P_W A(x, \omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A\left(x + \frac{r}{2}, t\right) A^*\left(x - \frac{r}{2}, t\right) e^{-i\omega r} dr \quad (63)$$

を考慮して、そのアンサンブル平均を平均 Wigner-Ville 分布と定義する。

$$W(x, \omega, t) = \langle P_W A(x, \omega, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} C(x, r, t) e^{-i\omega r} dr \quad (64)$$

上述の近似のもとに平均 Wigner-Ville 分布の時間発展は次の方程式で記述される [9].

$$\frac{\partial}{\partial t} W - 2\omega \frac{\partial}{\partial x} W - \left[4 \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial x'}\right) W(x, \omega, t) C(x', 0, t) \right]_{x'=x} = 0, \quad (65)$$

$$C(x', 0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(x', \omega, t) d\omega \quad (66)$$

4.4 応用例：空間一様分布の安定性

このように平均 Wigner-Ville 分布を用いることで波動場の位置波数構造の平均的振る舞いが記述される。例えば空間的に一様な分布

$$W(\omega, x, t) = W_0(\omega) \quad (67)$$

の安定性を知るためには、微小摂動を加えて

$$W(\omega, x, t) = W_0(\omega) + W_1(\omega, x, t) \quad (68)$$

を代入し、 W_1 に関する線形化方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} W_1 - 2\omega \frac{\partial}{\partial x} W_1 - \left[\left(4 \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial x'}\right) W_0(\omega) C_1(x', 0, t) \right) \right]_{x'=x} = 0, \quad (69)$$

$$C_1(x', 0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\omega, x', t) d\omega \quad (70)$$

を調べればよい。

この線形化方程式は x に関する Fourier 分解

$$W_1(\omega, x, t) = \hat{W}_1(\omega, t) e^{i\gamma x} \quad (71)$$

によって

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{W}_1 - 2ik\omega \hat{W}_1 = 2ik\eta(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{W}_1(\omega, t) d\omega, \quad (72)$$

$$\eta(\omega) = \frac{1}{\gamma} \left[W_0\left(\omega + \frac{\gamma}{2}\right) - W_0\left(\omega - \frac{\gamma}{2}\right) \right], \quad (73)$$

となる。これを用いて、例えば空間的に一様な分布

$$W_0(\omega) = \frac{2B\sigma}{\omega^2 + \sigma^2}, \quad (74)$$

は

$$\sigma \geq \sqrt{B} \quad (75)$$

のとき（線形）安定であることが知られている [9].

多くの時間周波数解析手法が観測実験データや数値解のデータ解析に留まる中、基礎方程式の理論解析と直接関わっている点で Wigner-Ville 分布はデータ解析手法として独特の位置を占めている。

参考文献

- [1] S.Mallat, A wavelet tour of signal processing, The Sparse Way, Academic Press, 2009.
- [2] E.Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, Phys.Rev. 40 (1932)749.
- [3] J.Ville, Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique, in Cables et Transmissions, (1948), volume 2a, pages 61-74.
- [4] L.Cohen, Time-frequency analysis, Prentice Hall, 1995 (邦訳：時間-周波数解析, 吉川昭, 佐藤俊輔訳, 朝倉書店, 1998) .
- [5] K.Husimi, Some Formal Properties of the Density Matrix, Prof.Phys.Math.Soc. Japan 22(1940)264.
- [6] I.E.Alber, Proc.R.Soc.Lond. A363(1978)545.
- [7] I.E.Alber and P.G.Saffman, TRW report no.31326-6035-RU-00. (1978).
- [8] D.R.Crawford, P.G.Saffman and H.C.Yuen, Wave Motion, 2(1980)321.
- [9] P.A.E.M.Janssen, Long-time behaviour of a random inhomogeneous field of weakly nonlinear surface gravity waves, J.Fluid Mech., 133(1983)113.