

# 半離散化ウェーブレット変換を応用した 測地データの局在化信号分離の試み

国土交通省国土地理院 黒石 裕樹

Yuki Kuroishi

Geospatial Information Authority of Japan

Ministry of Land, Infrastructure, Transport and Tourism

## 要旨

半離散化ウェーブレット変換に基づき、一次元関数及び二次元関数の局在化信号展開と再構築を行うフレームを構成する。これらを測地学分野の時系列（一次元関数）と地理的分布データ（二次元関数）に適用し、局在化信号に展開する。さらに、異なる二地点で得られた時系列のウェーブレット展開から、時系列間のコヒーレンシー分析を行う。それらの結果から、半離散化ウェーブレット・フレーム表現に基づく入力データのフィルター効果を調べる。

## 1 はじめに

測地学分野においては、全地球的あるいは地域的な物理量分布を異種観測から決定する問題や、多様な地球物理的諸現象を含む物理量の連続的観測について、地理的に近接する地点での共通性変化を分離、抽出する問題などを扱うことがある。ここでは、前者に属するものとして日本列島周辺の海域重力場のモデル化、後者に属するものとして潮位観測におけるコヒーレンシー分析を対象として考える。

海域重力場に関しては、人工衛星アルチメトリー（海面高度計）による全球海域の重力場推定モデル（以下、高度計モデル）と海（船）上重力計による計測が利用可能である。それぞれの手法には固有の誤差要因があり、地理的位置により異なるスケール分布を持つ、局在的な系統的誤差を含んでいる。そのため、これら二種類の観測による測定値の較差分布について、局在化信号分解を行うことができれば、誤差の局在的特性を把握し、誤差低減を実現できると考えられる。

一方、潮位の時間変化については、潮汐、気圧応答といった短周期変動、海水の温度・塩分濃度の変化によるステリックな変化、海流や風などによる変動や氷河の融解による海水総量の変化、経年的熱膨張などに伴った長期的変化をしている。潮位観測から海面上昇などの中長期的な変化を知るためには、観測点毎に推定された潮汐変動・気圧応答を除去された潮位時系列について、隣接する点間でコヒーレントな変化を示すと思われる、ステリックな変化と海流などによる変化を推定、除去する必要がある。

本稿では、Kuroishi and Keller(2005)と黒石(2012)を再編し、これらの問題について、半離散化ウェーブレット変換に基づくフレームを用いた信号の局在化展開とそれらをコヒーレンシー分析に応用する試みについて紹介する。

## 2 半離散化ウェーブレット変換に基づくフレーム

### 2.1 Morlet ウェーブレットを用いた一次元半離散化ウェーブレットのフレーム

時系列データについて、progressiveな関数であって周波数領域における関数形(特性)が複雑でなく、フレームをなす際の冗長性が小さなものとして、Morlet ウェーブレットを母関数とする一次元半離散化ウェーブレット変換を適用する。Morlet ウェーブレットは、時間領域と周波数領域において、それぞれ、次式で表される：

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= (1/\pi^{1/4}) \exp(-t^2/2) \{ \exp(-i\omega_0 t) - \exp(-\omega_0^2/2) \} \\ \hat{\Psi}(\omega) &= (\sqrt{2}\pi^{1/4}) \exp\{-(\omega - \omega_0)^2/2\}.\end{aligned}$$

ただし、 $\hat{\Psi}$  は周波数領域の関数であることを示し、 $t$  と  $\omega$  はそれぞれ時刻と周波数の変数、 $i$  は虚数単位、 $\omega_0$  は中心周波数であり、以下の値をとる場合、上式の中括弧内の第二項は無視できる：

$$\omega_0 = \pi\sqrt{2/\ln 2} \doteq 5.3364.$$

この値は、周波数領域における関数値において、最大値と第一サイドローブのピーク値の振幅比を2:1とするものである。

離散化ウェーブレット変換においてスケール・パラメータを  $s = 2^{j/4}$  ( $j$  は整数; 1 オクターブにつき4個のスケールというマルチ・ボイスをなす)、時刻パラメータを  $b = n$  ( $n$  は自然数; データ間隔を単位とする)にとるとき、このウェーブレット関数を用いたフレームの冗長度の下限  $A$  と上限  $B$  は、それぞれ、6.918 と 6.923 であり、復元における誤差は、冗長度の上限と下限の比より0.04%である(Daubechies, 1992)。Kuroishi and Keller (2005) は、スケール・パラメータについてこの離散化を導入し、時刻パラメータについては等間隔サンプリングによるデジタル・データの間隔のまま用いるという、半離散化ウェーブレット変換により、同じ精度で復元が可能であることを示した。ここでは、その結果に従い、Morlet ウェーブレットによる半離散化変換とその復元を手法として採用する。つまり、元の時系列を  $X(t)$ 、パラメータ対  $(s, n)$  におけるウェーブレット変換を  $W_n^X(s)$ 、復元関数を  $X^\sim(t)$  とすると、これらの関係は次式になる：

$$\begin{aligned}W_n^X(s) &= (1/\sqrt{s}) \sum_{n'=1}^N X(n') \Psi^* \{ (n - n')/s \} \\ X^\sim(t) &= \{2/(A + B)\} \sum_{n=1}^N \sum_j W_n^X(2^{j/4}) \Psi^* \{ ((t - n)/2^{j/4}) \} / 2^{j/8} \\ &\cong (1/C) \sum_j W_n^X(2^{j/4}) / 2^{j/8}.\end{aligned}$$

ここで、 $C$  は定数、 $N$  は時系列の個数、 $*$  は複素共役をとることを示し、離散化スケールを定める  $j$  の範囲はナイキスト周波数を下限とし、時系列の長さにおいてウェーブレットのパワーの 99.9 % が含まれるようなスケールを上限とするように選ぶ (Kumar and Foufoula-Georgiou, 1994). 最後の式は復元において同心の半離散化ウェーブレット変換だけを考慮すればよいことを示しており、この式による復元は離散フーリエ変換とその逆変換を用いて効率的に算出できる. 詳細は Kuroishi and Keller (2005) を参照されたい. この Morlet ウェーブレットを用いたウェーブレット変換では、元の時系列において取り出される最大の波長 (フーリエ波長) が  $\omega_0$  によって変化し、次式で与えられる (Torrence and Compo, 1998) :

$$4\pi s / (\omega_0 + \sqrt{2 + \omega_0^2}).$$

ここで、 $s$  は上記のスケール・パラメータである. したがって、上記の  $\omega_0$  を用いる場合、フーリエ波長 (周期) は  $1.157s$  になることに注意が必要である.

## 2.2 Halo ウェーブレットを用いた二次元半離散化ウェーブレットのフレーム

二次元データについて、Morlet ウェーブレットを二次元関数に拡張した Halo ウェーブレット (Dallard and Spedding, 1993) を母関数とする半離散化ウェーブレット展開によるフレームを適用する. このウェーブレットは、球対称な実関数であるため、二次元データにおいて位相情報が失われるが、解析において等方性をもつことになる. Halo ウェーブレットは周波数領域において次式で表される :

$$\hat{\Psi}(\vec{\omega}) := \exp\{-(|\vec{\omega}| - \omega_0)^2/2\} / \kappa.$$

ここで、 $\kappa$  は正規化係数、 $\vec{\omega}$  は二次元波数ベクトル、 $\omega_0$  は基準波数の大きさであり、ここでは前節の Morlet ウェーブレットの場合と同一の値にとることとする.

Halo ウェーブレットを母関数として、2.1 における場合と同じ半離散化ウェーブレット展開を行う. この場合、エネルギーが有限である任意の二次元関数に対する半離散化ウェーブレット展開によるノルムは、対応する Morlet ウェーブレットによる半離散化ウェーブレット・フレームにおけるフレーム定数について回転対称をとったものと一致することを Kuroishi and Keller (2005) は示した. 従って、Halo ウェーブレットを用いた半離散化ウェーブレット展開はフレームをなすことになる. また、半離散化ウェーブレット展開からの再構築は、各データ点において全てのウェーブレット係数を考慮する代わりに、その点において同心の半離散化ウェーブレット変換だけを考慮することで、十分な精度で復元されることも示された. 従って、半離散化ウェーブレット展開からの再構築は、近似として、有界な窓関数を持つ離散化フーリエ逆変換と等価になる.

## 3 一次元半離散化ウェーブレットのフレームに基づくコヒーレンシー分析

時系列データに Morlet ウェーブレットによる半離散化ウェーブレット展開を行うと、(離散的な) スケール・パラメータと時刻パラメータの組みごとにウェーブレット変換が得られ、これは複素数値をとり、振幅と位相を持つ. それは、パラメータに対応する時刻と時間スケール (周期) において局在化された信号成分を示すものである. 半離散化ウェーブ

レット展開は冗長なフレームをなすため、得られたウェーブレット変換は、相互に独立したのではなく、時間と周波数の両方の領域においてスケールに応じた広がりの中で相関をもつことになる。

二つの時系列に対する相互ウェーブレット変換は、個々の時系列をウェーブレット変換したものの複素共役積で定義される。フーリエ・スペクトルにおけるコヒーレンシーをウェーブレット変換にそのまま拡張すると、相互ウェーブレット変換のパワーを個々のウェーブレット変換のパワー積の平方根で割ったものになるが、その値は原理的に常に1となってしまう、コヒーレンシー分析に用いることができない。しかし、Torrence and Webster (1999) は、ウェーブレット変換について時間・周波数領域のそれぞれにおいて相関を持つ範囲での平滑化を適用するという考えを導入し、ウェーブレット二乗コヒーレンシー (wavelet squared coherency ; 以下,  $WSC$  と記す) を提案した。二つの時系列  $X$  と  $Y$  について、スケール・パラメータ  $s$ 、時刻パラメータ  $n$  におけるウェーブレット変換を、それぞれ、 $W_n^X(s), W_n^Y(s)$  とすると、 $WSC$  である  $R_n^2(s)$  は次のように与えられる：

$$R_n^2(s) = |S(W_n^{XY}(s)/s)|^2 / \{S(|W_n^X(s)|^2/s) \cdot S(|W_n^Y(s)|^2/s)\}$$

ここで、 $W_n^{XY}(s) \equiv W_n^X(s) \cdot W_n^Y(s)^*$  は相互ウェーブレット変換、 $S$  は平滑化関数であり、スケール・パラメータに関する平滑化  $S_{scale}$  と時刻パラメータに関する平滑化  $S_{time}$  の連続変換で定義される：

$$\begin{aligned} S(W_n(s)) &= S_{scale}(S_{time}(W_n(s))) \\ S_{time}(W_n(s))|_s &= (W_n(s) \cdot c_1 \exp(-t^2/2s^2))|_s \\ S_{scale}(W_n(s))|_s &= (W_n(s) \cdot c_2 \Pi(0.6s))|_s \end{aligned}$$

ここで、 $\Pi$  は箱形関数、 $c_1$  と  $c_2$  は規格化定数である。この定義によって得られる  $WSC$  は0から1までの値をとる。

二つの時系列の間における局在化信号の  $WSC$  の有意性は、信号やノイズの特性によって異なる。本稿では、その閾値として0.8を採ることとする。これは、数多くの地球物理現象にみられる赤色ノイズが1次の自己回帰モデルで十分モデル化できることを考慮し、Grinsted et al. (2004) がモンテカルロ法によるシミュレーションで調査した有意水準の評価結果に基づいて選んだものである。彼らがMorletウェーブレットについて上記の設定による離散化ウェーブレット変換を対象に行った調査では、 $WSC$  の95%信頼水準は、いずれのスケール・パラメータ値の範囲においても、ほぼ0.8以上であることが明らかにされている。

#### 4 二次元半離散化ウェーブレットの応用：日本周辺の海域重力場モデルにおける局在化較差分離

日本列島は四つのプレートが収斂する境界に位置し、陸海における地形起伏が激しく、重力場とジオイド形状が広い波長域に亘って大きく変化している。そのため、陸域のジオイドを重力手法によって詳細に決定する場合、周辺海域における重力場を正確かつ詳細に把握する必要がある。

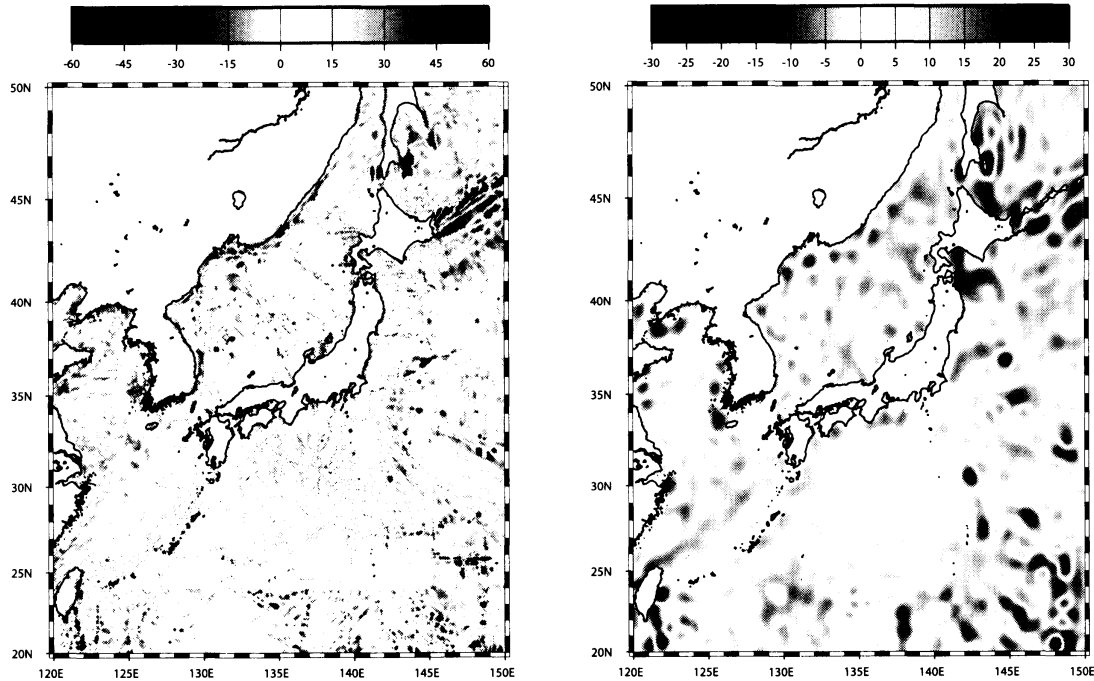


図 1: Marine gravity difference field between a model obtained using marine gravity data and an altimetry-derived model shown in the left panel, and gravity correction model in the right panel, both from Kuroishi and Keller (2005). Units for the scale above the image are mGal.

日本列島周辺海域においては、海上重力計による稠密な測定が利用可能であるが、それらの観測は主に 1970-80 年代に行われ、当時の航法精度の限界のため、船の速度に対するエトベス効果（コリオリ力の鉛直成分）の補正などに伴う、観測毎に系統的な中・長波長誤差が含まれているものがある。一方、高度計モデルも利用可能であるが、空間分解能が十数  $km$  程度以上で中波長域の復元に限られ、また、沿岸部では精度が劣る。そこで、高度計モデルを利用して、海上重力計による重力場モデルの局所的系統誤差を推定、除去することで海域重力場の決定精度を向上させることが可能となる。

日本列島周辺の海域について、海上重力計によるモデルと高度計モデルの較差分布を入力として、二次元半離散化ウェーブレット・フレームにより、異なるスケールでの局在化較差信号に分離する。その局在化信号の分布特性に従い、海上重力計によるモデルに対する補正モデルの作成を行った。図 1 に重力較差分布とそれから作成された補正モデルの結果を示す。北海道のオホーツク海沿岸域と三陸北部沖にみられる顕著な補正分布は、特定の海上重力観測航海の群によく対応している結果となった。

## 5 一次元半離散化ウェーブレットに基づくコヒーレンシー分析の応用： 東京湾近傍の潮位データの平滑化

国土地理院による油壺験潮場と海上保安庁による横須賀験潮所における潮位観測の 1 時間間隔時系列について、二段階の平滑化を考える。まず、それぞれの潮位時系列に対し

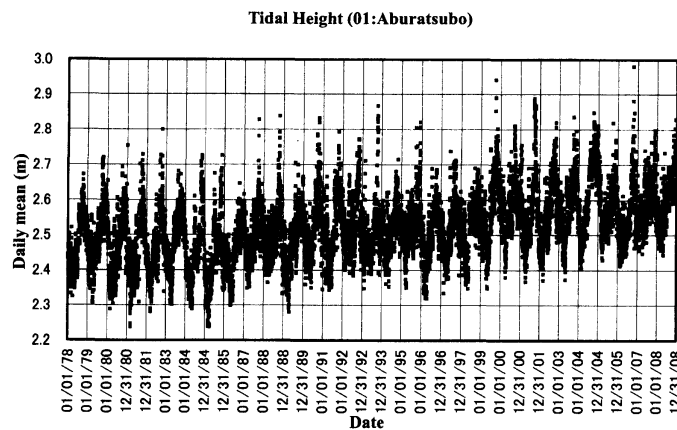


図 2: Time series of tidal heights at Aburatsubo for the period 1978-2008 after removing ocean tides and oceanic response to atmospheric pressure change estimated using *BAYTAP - G* (taken from Kuroishi, 2012).

て、横浜地方気象台における気圧測定 of 1 時間間隔時系列を併せて用い、*ABIC* (Akaike's Bayesian Information Criterion; Akaike, 1980) に基づき、潮汐変化と lag つきの気圧応答を推定する *BAYTAP - G* (Tamura et al., 1991) を適用して滑らかに変化する成分を取り出す。つぎに、得られた成分について、時間に線形なドリフトを除いた上で一次元半離散化ウェーブレット・フレーム表現を求め、油壺と横須賀の二点のウェーブレット係数間で *WSC* を算出し、有意なコヒーレンシーとなる成分を除去することにより、平滑化された時系列を得る。

油壺における 1978 年から 2008 年の潮位について、潮汐と気圧応答を除去した時系列を図 2 に示す。1 年を周期とする三角波状の変動が、一定でない振幅で顕著にみられ、海水のステリック変動であると考えられる。横須賀についても同様の処理を行い、二つの時系列の間で、第 3 章に示す *WSC* を求めた結果をその位相差とともに図 3 に示す。年周スケールにおいては、位相差がなく、安定して高いコヒーレンシーを示しているほか、広汎なスケールにおいて有意なコヒーレンシーとなっている。有意なコヒーレンシー成分を除去することで平滑化された、油壺の潮位時系列を図 4 に示す。一部の期間においては細かな変動が含まれるが、全体として緩やかな上昇を示し、その緩やかな変化は、横須賀の平滑化された潮位時系列と共通していることが分かった。

1997 年以降においては、別種の測地学的手法によって二つの験潮場とも地盤の上下変動が連続的に観測されている。その結果と併せると、図 4 にみられる緩やかな変化は、1997 年以降においては、2003 年頃を境として異なる速度での地盤の隆起と、ほぼ一定速度の海面位上昇からなると推定される。

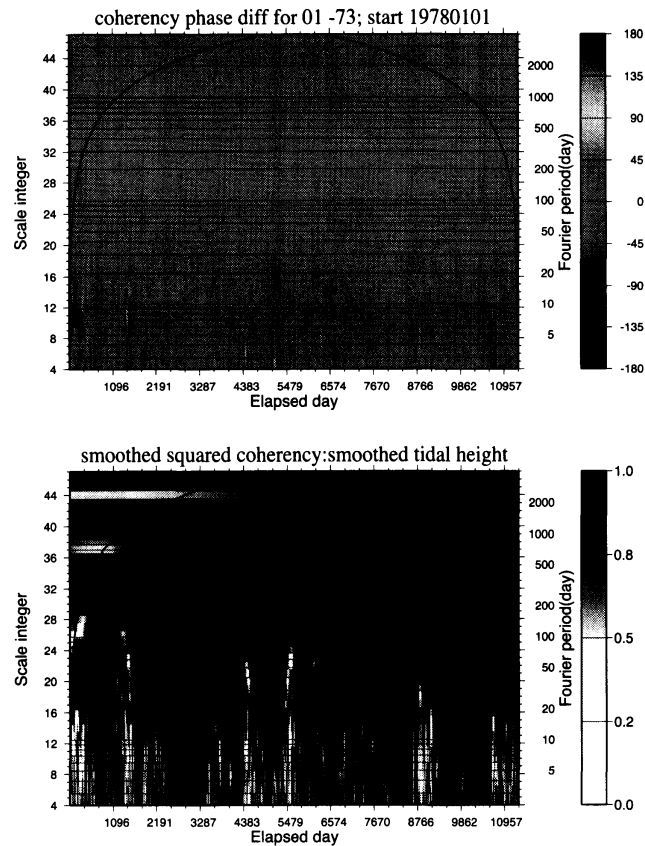


図 3: Wavelet squared coherency (bottom panel) and its phase difference (top panel) between two time series of tidal heights at Aburatsubo and at Yokosuka for the period 1978-2008 (taken from Kuroishi, 2012). *BAYTAP-G* was applied in advance to the time series for removing ocean tides and oceanic response to atmospheric pressure change. The Morlet wavelet is used in the analysis. Horizontal axes are the elapsed day since January 1, 1978 with ticks at a one-year interval and corresponding Fourier periods in days are given on the right vertical axes. Phase differences are given in degrees.

## 6 まとめ

Halo ウェーブレットを母関数とする半離散化展開・復元手法を用いて、二次元分布関数の局在化信号を分離抽出する手法を紹介した。その手法を異種観測による二種類の重力場モデルからの最適混合処理に適用し、それぞれのモデルの持つ局在化誤差の特徴把握とその分離が実現された。

つぎに、Morlet ウェーブレットを母関数とする半離散化展開・復元手法を用いて一次元関数（時系列）を局在化信号に展開し、隣接する測点の時系列間でコヒーレンシー解析する手法を紹介した。その手法を、近接する二点での潮位観測に適用すると、海水のステリック変化と海象成分が広汎なスケールにおいてコヒーレントな変動として低減され、緩やかな経年的潮位変化が明らかとなった。得られた結果を地盤の上下変動観測と併せるとほぼ一定の海面上昇速度であることを示し、その大きさは衛星アルチメトリーによる推定

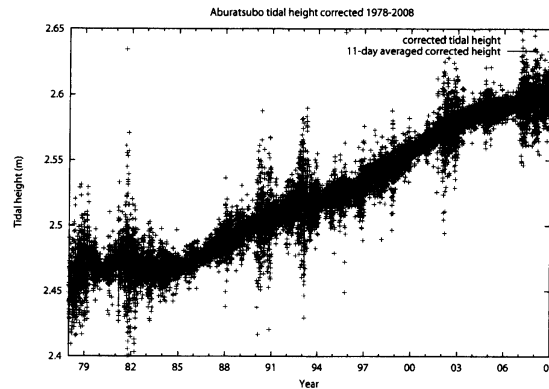


図 4: Time series of mean tidal heights at Aburatsubo for the period 1978-2008 smoothed by removing the components coherent to those at Yokosuka, based on *WSC* analysis (taken from Kuroishi, 2012). Crosses are daily values and the solid curve is smoothed by taking 11-days moving average of the daily values.

と整合した。

これらの結果は、半離散化ウェーブレット展開・復元手法が二次元関数の局在化信号分離・抽出、一次元時系列の局在化信号分離と近傍点の時系列間のコヒーレンシー解析とそれを用いたコヒーレント信号の分離・除去に有効であることを示している。これらの手法に関する今後の課題として二つのことが挙げられる。まず、用いられた半離散化復元は data node ごとに実行される手法であり、局所的に最適なスケール域を抽出混合することが可能である。そのためには、局所的なスケール域を最適推定する手法の開発が必要となる。つぎに、地球物理的な活用においては、ウェーブレット母関数として特定の現象に対応するものが望ましい。抽出された成分について物理過程を直接特定できるからであるが、それに該当する関数を寡聞にして把握していない。ウェーブレット展開としては直交系でなく redundant フレームであっても十分であるので、数理科学分野において開発していただくことを期待している。

**謝辞** 大阪教育大学の芦野隆一先生には、本シンポジウムへ参加する機会をご提供いただきました。また、一部の図の作成には、GMT (Wessel and Smith, 1991) を用いました。ここに記して謝意を表します。

## 参考文献

- [1] Kuroishi, Y. and W. Keller  
*Wavelet approach to improvement of gravity field-geoid modeling for Japan*  
 J. Geophys. Res., **110**, B03402, DOI:10.1029/2004JB003371, 2005.



- [2] 黒石 裕樹  
平均海面位変化と上下変動の検出に向けた験潮データの平滑化手法  
測地学会誌, **58**, 2012, 27–42.
- [3] Daubechies, I.  
*Ten lectures on wavelets*, Soc. for Ind. and Appl. Math., Philadelphia, 1992, 53–78.
- [4] Kumar, P. and E. Foufoula-Georgiou  
*Wavelet analysis in geophysics: An introduction, in Wavelets in Geophysics, edited by E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar*, Academic Press, 1994, 1–43.
- [5] Torrence, C. and G.P. Compo  
*A practical guide to wavelet analysis*  
Bull. American Meteorological Society, **79**, 1998, 61–78.
- [6] Dallard, T. and G.R. Spedding  
*2-D wavelet transforms: generalization of the Hardy space and application to experimental studies*  
Eur. J. Mech., B/Fluids, **12-1**, 1993, 107–134.
- [7] Torrence, C. and P.J. Webster  
*Interdecadal changes in the ENSO-monsoon system*  
J. Climate, **12**, 1999, 2679–2690.
- [8] Grinsted, A., J.C. Moore, and S. Jevrejeva  
*Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series*  
Nonlinear Processes in Geophysics, **11**, 2004, 561–566.
- [9] Akaike, H.  
*Likelihood and Bayes Procedure, in Bayesian Statistics, edited by J.M. Bernardo, M.H. DeGroot, D.V. Lindley and A.F.M. Smith*, University Press, Valencia, 1980, 143–166.
- [10] Tamura, Y., T. Sato, M. Ooe, and M. Ishiguro  
*A procedure for tidal analysis with a Bayesian information criterion*  
Geophys. J. Int., **104**, 1991, 507–516.
- [11] Wessel, P. and W.H.F. Smith  
*Free software helps map and display data*  
EOS Trans. AGU, **72**, 1991, 441,445–446.