

# サンプリング値の補間による未知関数の 近似的再構成\*

首都大学東京 理工学研究科 数理 岡田正己

Masami Okada

Graduate School of Mathematical Sciences and Informatics  
Tokyo Metropolitan University

## 概要

複数次元ユークリッド空間で可算無限の不規則格子点が与えられたときに、その上で観測されたサンプリング値を補間するために用いる、不規則格子点に対応する自然な基底関数を具体的に構成するための数理と一つの具体的計算法を提案したい。

## 1 はじめに

ユークリッド空間  $\mathbb{R}^d$  の規則格子点で与えられたサンプリング観測値から元の関数を再現する一つの逆問題は、従来からスプラインやウェーブレットを用いる方法も含めよく研究されているが、不規則な配置の格子点の場合には全く新たな困難が生じる。

ここでは、関数近似に密接に関連した補間について、比較的最近、応用方面（画像処理、データ解析、科学計算など）で注目されている Scattered Data Approximation の話題を紹介しながら、新たな課題を扱う。それは  $\mathbb{R}^d$  における不規則に配置された点集合上で与えられたサンプリングデータ値がある関数  $F$  のとる値として与えられている場合に、観測値を補間する関数  $f$  を元の関数  $F$  にできるだけ忠実なものとして、しかも安定的に再現するために、しかるべき正定型関数を用いる方法である。

基礎となる数理は主として [15] に従って述べるが、このノートで新しいと思われるのは、点集合が無限集合である場合にサンプリング補間のための一つの自然な十分条件と、その応用として、付随する Cardinal 関数の一つの“具体的な”構成法を見出したことである。

内容は カーキャチャリアン教授とジャファール教授との共同研究に基づくが、今のところ詳しい証明や評価、密接に関連する事項、応用と数値シミュレーションなどを含めたフルペーパーの完成と発表日程は不明であるので、ここで基礎数理としての中間的な成果を発表させて頂けるのは有難いことである。

芦野先生には研究会の企画など、終始お世話になり、感謝します。

\*研究の一部は文部科学省 科学研究費 補助金 基盤C一般 (No. 24540184) の援助を受けて行った。

## 2 背景:サンプリング定理

まず一次元で規則格子でのサンプリング補間の復習から始める。 $\text{sinc}$  関数を  $\varphi_s(x) = \frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)}$  と表記すると、所謂、シャノンのサンプリング定理は次のように述べられる。

定理: 実数全体  $\mathbb{R}$  で定義された関数  $f$  があって、 $|f|$  や  $|f|^2$  が積分可能であるとする。そのとき、 $f$  のフーリエ変換  $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx$  が遠方でゼロ、より定量的には  $\Omega < |\xi|$  でゼロの値をとるとする(帯域制限条件)。このとき、 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)|^2 < \infty$  であり、 $X = \mathbb{Z}$  上での  $f$  の値を用いた再生公式

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \varphi_s(x - k)$$

が全ての実数  $x$  で成立する。但し、定数  $\Omega$  は  $0 < \Omega \leq \pi$  を満たす。

逆にデータ補間という側面からみれば、先に  $X =$  整数点全体  $\mathbb{Z}$  上で観測された実数値の列  $(f_k)$  にたいして、各点  $x$  ごとに

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \varphi_s(x - k)$$

とおけば、例えば  $\sum_k |f_k|^2 < \infty$  のとき、 $F$  は直線全体  $\mathbb{R}$  で有界な連続関数(かつ  $|F|^2$  は積分可能)になり、 $F(k) = f_k, k \in \mathbb{Z}$  が成立する( $X = \mathbb{Z}$  での補間)。

要するにラフに云えば、対応するフーリエ変換値  $\hat{f}(\xi)$  が区間  $[-\pi, \pi]$  の外ではゼロである関数  $f$  は、その整数全体での値を係数にして、 $\text{sinc}$  関数を平行移動して作った基底関数の一次結合和で再生できる、ということであり、「離散」と「連続」を橋渡しするがゆえにデジタル信号処理において基本となる定理である。

以上の事柄を念頭において、サンプリング定理(の類似)を多次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^d$  に一般化し、さらに規則性のない可算無限の点集合  $X$  で考えたほどの程度のことが云えるか調べたい。完全な再生公式は諦めるしかないが、 $X$  上の離散データから少なくとも  $X$  上は一致する値をもつ性質の良い(かなり滑らかな)補間近似関数を構成したいのである。

このテーマは画像処理など応用上も重要であり、 $\varphi_s$  は比較的最近、応用方面で人気のある一般のRBF(Radial Basis Function)  $\varphi$  に一般化することで扱うことができる。それを紹介したい。

## 3 補間の基本

まず1次元において補間の歴史を復習することで、ラグランジュの基底関数に触れる。

相異なる  $n+1$  個の実数の有限集合  $\{x_k | k = 0, 1, \dots, n\}$  と、その上の実数値  $\{y_k | k = 0, 1, \dots, n\}$  が与えられたときに、実  $n$  次多項式  $P_n$  で  $P_n(x_k) = y_k, k = 0, 1, \dots, n$  を満たす補間関数  $P_n$  が一意的に存在する。差分商を用いたニュートンの表記では、 $P_n(x)$  は

$$[y_0] + [y_0, y_1](x - x_0) + [y_0, y_1, \dots, y_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) = \sum_{j=0}^n [y_0, y_1, \dots, y_j](x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})$$

と表現できる。但し、差分商の定義は  $[y_0] = y_0$ ,  $[y_0, y_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$  であり、一般には再帰的に

$$[y_0, y_1, \dots, y_j] = \frac{[y_1, \dots, y_j] - [y_0, y_1, \dots, y_{j-1}]}{x_j - x_0}$$

で定められる。

ニュートンは等間隔無限点列にたいして関数の補間級数展開公式も知っていたという。

ラグランジュの基底函数を用いる方法も興味深い。即ち、

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}$$

となる。ただし、 $\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$  とおき、 $\omega'$  は  $\omega$  を微分したもの。

特に実数値関数  $f$  があって  $y_j = f(x_j)$  のときには、上の補間は  $f$  の関数補間になり、補間点の間隔  $\sup |x_j - x_{j-1}|$  が小さいときには、 $f$  の滑らかさに応じた適当な関数補間近似を与える。

ところが、この方法ではニュートンの方法と同様に、補間すべき点が区間に不規則に並んでいても良いが、点の数が増えれば、それに対応して用いる多項式の次数もあげることになり、両端に近づくほど隣接点の間隔を小さくするような工夫をしない限り、一般には特に両端で振動が大きくなり不安定である（ルンゲの現象）。

これに対処する一つの方法は、時代は前後するがオイラーの時代から知られていた区分的な多項式、即ち、スプライン函数を用いる方法である。1次元の場合はこれで柔軟に適合できるようになり、いろいろと調べられている。ただし、複次元になるとやはり規則格子以外には困難である。

他にも三角多項式や指数関数を用いた補間を、オイラー、クレロー、ガウス、アンペール、コーシー、ラプラス、エルミート、アーベル、フロベニウス、ベンディクソンらが研究している。ロシアのチェビシェフも有名。参考文献として [9] をあげておく。

以上、実の空間1次元の結果を復習した。

さて、実1次元を複素1次元に一般化するという方向では、複素平面で集積点を持たない相異なる可算無限個の集合  $\{z_k\}$  と、全く任意の複素数値  $\{w_k\}$  が与えられたときに、 $f(z_k) = w_k$  であるような整関数  $f$  が存在するという定理があり Guichard の定理というらしい ([4])。一見、驚くべき結果であるが、関数論の（学部で学ぶ可能性のある）2つの定理を結び付けて証明できる。

## 4 irregular sampling

irregular sampling に関連した話題として、ほとんど規則格子に近い不規則格子の場合を扱った古典的な定理に言及しておく。それはフーリエ級数でのパーセヴァルの等式を、非調和級数の一般の場合にノルム同値で置き換えたものである。

まず、ペイリー・ウィーナーが1934年の本で次の問題を提起しているという：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_n c_n \exp(ix_n \xi) \right|^2 d\xi \simeq \sum_n |c_n|^2$$

であるための  $\{x_n\}$  の条件は？ ここで、上の記号  $\simeq$  はノルム同値の意味とする。

この問題は一応、次でほぼ解決されている。

定理 (Kadec[1923-2011] の  $\frac{1}{4}$  定理, 1964):

$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n - n| < \frac{1}{4}$  が、ノルム同値のためのシャープな条件である。

この定理は正規直交基底を一般にしたフレーム理論の起こりとなったという。90年代初めまでの総合報告としては、後述の参考文献の中に Benedetto, Feichtinger-Grochenigらの論説があり、参考になる。ただし、殆ど等間隔規則格子に近い特別な場合なので、応用上は兎も角として、多次元の場合において等間隔規則格子のテンソル積を用いた平凡な一般化を行ってもあまり数学的な興味は少ないと思われる。

以下ではこのような等間隔の多次元規則格子からの小さな摂動に限定せず、大胆に一般的な場合を扱う。複数次元、不規則配置、無限集合という3つの困難を乗り越え、しかも数値計算も可能な基底関数の構成に挑戦する。

## 5 positive definite functions: 正定型関数

以下、 $d$ 次元実ユークリッド空間  $\mathbb{R}^d$  の元  $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$  を簡単のため単に  $x$  で表す。 $d$  は一般の自然数でよいが、画像処理などよく応用されるのは  $d=2$  (つまり平面) のときであり、そのように思って読んで頂いても構わない。さて、適当に滑らかな実数値の偶関数で positive definite (正定型、正の定符号) な関数  $\varphi$  を考えよう。その関数は中央で最大値をとる山型のグラフをもつ。ここで扱うのは実数の場合なので、一応、実数に限った *p.d.* 関数の定義をしておく。

**定義：** 任意の有限集合  $\{a_k\} \subset \mathbb{R}^d$  と同じ個数の任意の実数集合  $\{\alpha_k\}$  にたいして、二重和が非負、即ち、 $0 \leq \sum_{j,k} \alpha_j \alpha_k \varphi(a_j - a_k)$  であって、ゼロになるのは全ての  $k$  について  $\alpha_k = 0$  のときに限る、とする。このとき  $\varphi$  を *p.d.* 関数と呼ぶ。

*p.d.* 関数のラフな特徴づけとして「フーリエ変換が非負の測度」というのが有名 (Bochner 1932) であるが、先行研究は Caratheodory, Toeplitz, Herglotz などが数列について同様の概念を扱い、Mathias(1923) が一方の結果を述べ、F. Riesz などほぼ同時に研究しているという。このように、よく歴史を調べると、有名な結果にもそのヒントになるような先行研究があることが多いようである。

## 6 *p.d.* 関数の応用と例

このとき、与えられた点集合  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$  が有限集合のときには、 $\varphi$  が positive definite であるという条件から、 $N$  次正方行列  $(\varphi(x_j - x_k))$  が正則行列になるので  $X$  上で一意に補間ができる。即ち、各  $x_j$  で与えられた観測値  $b_j$  に等しい関数  $f$  を  $f(x) = \sum_k a_k \varphi(x - x_k)$  の形で探すが可能で、連立の線形方程式を解いて未知の数ベクトル  $(a_k)$  が一意に求まる。

但し、 $X$  に属する点の数  $N$  が大きくなれば、理論上は補間が可能でも一般に行列の条件数は飛躍的に増大することが普通であり、数値計算上の困難は深刻であるので 実際的にはなくなる。これも無限集合の場合を扱うことができればいい理由の一つである。

**Remark 1** : このように、ある関数の平行移動の一次結合和を考えるのは *sinc* 関数によるサンプリングやウェイヴレット解析でも用いられるやり方である。

*p.d.* の例として、既にでてきた *sinc* 関数  $\varphi_s$ 、 $\frac{1}{1+\|x\|^2}$ 、 $\frac{1}{(1+\|x\|^2)^2}$ 、あるいは一般にしてベッセルポテンシャル [13]、 $\exp(-\|x\|^\beta)$ 、但し  $0 \leq \beta \leq 2$  (Schoenberg)、偶数階のカーディナル  $B$ -スプライン  $N_{2m}$  などがある。

一般に *p.d.* 関数の和、積、合成積、直積などを考えても *p.d.* の性質が保たれるので、ある *p.d.* 関数  $f$  に  $\cos(\epsilon x)$  や  $\exp(-\epsilon|x|^2)$  などをつけたものも *p.d.* であり、そのフーリエ変換のゼロとなる部分を少なくできることを注意しておく ( $\epsilon$  は小さな正数)。ほかに、滑らかな場合には、マイナス符号付きのラプラシアン  $(-\Delta)$  の冪を施しても *p.d.* の性質は保たれることは明らかである。

確率論や統計学でもよく現れて、密度関数  $\rho$  (非負!) を持つ確率変数  $\mathbf{X}$  にたいして、特性関数  $\psi(t) = E[\exp(it\mathbf{X})]$  は  $t$  を変数とする *p.d.* 関数である。(定義から  $\psi(t) = \widehat{\rho}(-t)$  となり、そのフーリエ変換はもとの  $\rho(\cdot)$  に一致するので 非負になる。)

文献 [15] には、他に radial でコンパクトサポートを持つ  $\mathbb{R}^d$  での例として、 $(1 - \|x\|)_+^k$ 、ただし、 $\frac{d}{2} + 1 \leq k$  (Askey 1973) や、 $d = 1$  で  $C^2$  級の  $(1 - \|x\|)_+^3 (3\|x\| + 1)$  や、 $d = 2, 3$  で  $C^2$  級の  $(1 - \|x\|)_+^4 (4\|x\| + 1)$  などが簡単なものとして挙げられている。また、ユークリッド空間全体で定義された *p.d.* 関数の特徴付けがある。

**目標** : 一般のユークリッド空間全体  $\mathbb{R}^d$  で 不規則な配置をした可算無限集合  $X$  が与えられたときの補間を調べる ( $X$  は集積点を持たないという条件は当然、必要。)

以下、補間のために用いる *p.d.* 関数  $\varphi$  は かなり滑らかな実数値偶関数で、 $\varphi(0) = 1$  とし、コンパクトサポートを持つか遠方で十分に早く減少するようなものとする。後ほどそのフーリエ変換のとり値についてのやや見慣れない制限条件も加える。

## 7 $\varphi$ から決まる内積と関数空間

ここで、次の実数値関数の集合と それに内積を導入する。収束が問題にならないように まずは有限和を考え、関数の集合

$\mathcal{H}_0 = \{f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi(x - y_k) \mid y_k \in \mathbb{R}^d, \alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots\}$  を導入する。そこでの関数  $f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi(x - y_k)$  と関数  $g(x) = \sum_l \beta_l \varphi(x - z_l)$ ,  $\beta_l \in \mathbb{R}, l = 1, 2, \dots$  との内積を

$$(f, g) = \sum_{k, l} \alpha_k \beta_l \varphi(y_k - z_l)$$

で定義する。上で、 $y_k$  や  $z_l$  は  $X$  の点と限らない  $\mathbb{R}^d$  の一般の点である。これから  $\|f\| = (f, f)^{1/2}$  としてノルムが定まり、ノルムが有限であるなら無限個の和も扱うこととして  $\mathcal{H}_0$  の完備化  $\mathcal{H}$  が自然に決まる。そして、この広げた関数空間にも内積が定まり、それにより  $\mathcal{H}$  は実ヒルベルト空間になる。

面白いことに  $\mathcal{H}$  の任意の元  $f$  にたいして  $f(x) = (f(\cdot), \varphi(\cdot - x))$  がいえるので、 $\varphi$  は  $\mathcal{H}$  のいわゆる再生核になっており、その系として「 $\mathcal{H}$  の任意の元  $f$  が ある点  $x_0$  で  $f(x_0) = 0$  であることと、 $f$  と  $\varphi(\cdot - x_0)$  とが この内積について直交することとが同値」になる。この性質は重要で  $\mathcal{H}$  の元と  $\varphi(\cdot - x_0)$  との内積の計算が非常に簡単になっており、これには数値計算上の大きなメリットがある。

さらに

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} (\widehat{\varphi}(\xi))^{-1} d\xi$$

であり、 $\widehat{\varphi}(\xi)$  が  $\|\xi\| \rightarrow \infty$  とした遠方での減少が早ければ、その減少度に応じて  $\mathcal{H}$  に属する関数は滑らかになることがわかる。従って、 $\varphi$  の仮定により  $\mathcal{H}$  の元は相当に滑らかで遠方では減少する。また  $\varphi$  を適当に選べば、 $\mathcal{H}$  をソボレフ空間に一致させることもできる。このときは近似のオーダーも簡単に評価できる。

## 8 Cardinal functions

$X = \{x_1, x_2, \dots\}$  上で与えられたデータ値を補間するためには、 $X$  の各点  $x_k$  に対応する基底関数  $u_k^*$  があればよい。ただし、 $X$  が有限集合の場合と同様に、 $u_k^*$  は  $\mathcal{H}$  の部分空間

$$\mathcal{V}_X = \{f \in \mathcal{H} \mid f(x) = \sum_j \gamma_j \varphi(x - x_j), x_j \in X, \gamma_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots\}$$

に属し、 $u_k^*(x_j) = \delta_{kj}$  であるものとする。(記号  $\delta_{kj}$  はクロネッカーのデルタで、 $k = j$  で 1、 $k \neq j$  で 0 を意味する)。

あらかじめ基底関数  $\{u_k^*, k = 1, 2, \dots\}$  を計算しておけば、データ補間そのものについての計算時間は少なくともすむのも 実用上の利点であると考えられる。

**Theorem 8.1** : *p.d.* 関数  $\varphi$  は以上の仮定に加えて、そのフーリエ変換  $\widehat{\varphi}(\xi)$  が  $\mathbb{R}^d$  で正という条件を満たすとし、 $X$  はある正の数  $\delta$  があって、 $\mathbb{R}^d$  の可算無限集合  $X$  に属する任意の相異なる 2 点  $x_j, x_k$  について、 $\delta \leq |x_j - x_k|$  という条件を満たすとす。このとき、求めるべきカーディナル基底  $\{u_k^*\}$  が存在する。

証明について以下、説明する。

### 8.1 $\{u_k^*\}$ の存在証明

任意の  $x_j \in X$  にたいして、任意の  $x \in \mathbb{R}^d$  で次を満たすような  $\mathcal{V}_X$  の元として  $u_k^*$  が求められればよい。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x_j - x_k) u_k^*(x) = \varphi(x - x_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

ここで  $X$  が密でなければ、 $\varphi$  の仮定により、右辺は任意の  $x \in \mathbb{R}^d$  をとめるごとに  $j$  を足とする数列とみて  $l^2$  に属することに注意しておく。

よって、無限行列  $(\varphi(x_j - x_k))$  が  $l^2$  上の作用素とみて可逆であることを示せばよい。その鍵となるのが以下の定理である。

**Theorem 8.2** : ある正の数  $\delta$  があって、 $\mathbb{R}^d$  の可算無限集合  $X$  に属する任意の相異なる 2 点  $x_j, x_k$  について  $\delta \leq |x_j - x_k|$  とする。そのとき  $p.d.$  関数  $\varphi$  のフーリエ変換  $\hat{\varphi}(\xi)$  が  $\mathbb{R}^d$  で正であれば、無限行列  $(\varphi(x_j - x_k))$  は  $l^2$  からそれ自身への作用素と考えると可逆である。

証明のアイデア : 適当な有限個の  $k$  以外の  $r_k$  がゼロである任意の実数列  $(r_k)$  にたいして、

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{k=1}^{\infty} r_k \exp(ix_k \xi) \right|^2 \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

はある別の  $p.d.$  関数  $\rho$  と充分大きな正数  $T$  について

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_k r_k \exp(ix_k \xi) \right|^2 \hat{\rho}\left(\frac{\xi}{T}\right) d\xi$$

の ( $T$  に依存してよい) 定数倍よりも大きいことがわかる。ここで正数  $T$  を  $\frac{1}{\delta}$  の十分に大きな定数倍に選ぶ。ここで、複素数の絶対値の 2 乗を  $|z|^2 = z\bar{z}$  として外せば、

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j,k} r_j r_k \exp(i(x_k - x_j) \xi) \hat{\rho}\left(\frac{\xi}{T}\right) d\xi$$

となり、これはフーリエ逆変換の計算から

$$\frac{T^d}{(2\pi)^d} \sum_{j,k} r_j r_k \rho(T(x_j - x_k))$$

に等しい。この  $j, k$  についての 2 重和を  $j = k$  と  $j \neq k$  の部分に分けると、 $j \neq k$  での 2 重和の方は  $\rho$  として急減少関数を選んでおき  $T$  を十分に大きくとれば、 $j = k$  での和に比べて十分小さくできることがわかる。これから、二つの和は  $\sum_k r_k^2$  の正数倍で下から抑えられることがわかる。逆の不等式評価は簡単なのでこれでノルム同値性が云える。

**Remark 2** : 以上の証明を見れば、 $\hat{\varphi}$  は至る所で正である必要はなく、例えば  $\hat{\varphi} = 0$  となる部分が有界集合であれば定理は成立する。ただし、無限行列の条件数は  $\hat{\varphi}$  の減少オーダーや 最小間隔  $\delta$  に依存する。

**Remark 3** : サンプリング定理における *sinc* 関数も帯域制限条件を満たしていた。我々の目標のためにはむしろ逆に、 $\varphi$  のフーリエ変換  $\hat{\varphi}(\xi)$  が真に正である  $\xi$  の集合が非常に大きいという条件をつけた *p.d.* 関数  $\varphi$  を考えるとうまくゆくという“逆転の発想”はちょっと面白い。

浅見は [1] で スプラインの適当な一次結合により、規則格子点に適合した正定型のカーディナル基底関数を構成したが、 $\varphi_s$  や  $N_{2m}$  は、この制限条件をみたしていないので残念ながらそのままでは我々の状況では使えない。

**Remark 4** : 先ほどの定理を見れば、行列は対称であり可逆なので、定義から定まる関数  $u_k^*$  はもともとの  $\varphi$  と同様の滑らかさを持ち、 $\varphi$  によっては  $u_k^*$  の遠方での減少度をソボレフノルムで測れる場合もある。

各  $x_k$  に対応する基底関数  $u_k^*$  の存在が判明したので、次に、近似的に求める構成的方法を考えよう。 $X$  が無限の場合を想定しているので、応用のためには実際の数値計算法を与えることが必要であろう。そこで比較的に最近よく数値計算などで使われる Greedy アルゴリズムの適用法を紹介する。

## 8.2 $u_k^*$ の近似計算

**Corollary 8.1** カーディナル基底関数  $u_k^*$  を求める数値計算法として、以下のように Greedy アルゴリズムが適用できる。

以下、ある定めた  $k, x_k$  に対応する  $u_k^*$  の構成方法を示す。 $f_0(x) = \varphi(x - x_k)$  が  $x_k$  以外の  $x_{j_1} \in X$  で最大値をとるとき、 $\phi_1(x) = \varphi(x - x_{j_1})$  とおく (ノルムは 1)。  $f_0$  から  $\phi_1$  成分を除くため、内積を計算して関数  $f_0(x) - \phi_1(x_k)\phi_1(x)$  を得る。次に、この関数が  $x_k, x_{j_1}$  以外の  $x_{j_2} \in X$  で最大値をとるとき、別途、関数  $\varphi(x - x_{j_2})$  に  $\phi_1$  についてシュミットの直交化を行い、これを正規化したものを関数  $\phi_2(x)$  とおき、関数  $f_0(x) - \phi_1(x_k)\phi_1(x) - \phi_2(x_k)\phi_2(x)$  が求まる。さらに、これが最大値をとる  $x_k, x_{j_1}, x_{j_2}$  以外の点を... として以下続ける。

以上、 $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots$  を定める部分と、シュミットの正規直交化の操作の部分とを複合させている。前者には、 $f_0$  が関係しているが、後の操作の部分は  $\phi_1, \phi_2, \dots$  に関して順々に実行し、 $f_0$  は関与させていないことに注意願いたい。

予め集合  $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots\}$  が与えられているのではなく、選ばれた  $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-1}}\}$  から計算した式において、 $x_{j_n}$  を誤差の一番大きな点として選ぶところが Greedy と呼ばれる理由である。

**Remark 5** : 以上で得られた関数列  $f_0(x) - \sum_{j=1}^n \phi_j(x_k)\phi_j(x)$  が  $n \rightarrow \infty$  で収束することはヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の一般論から簡単にわかる。その極限関数が  $\mathcal{H}$  の  $\mathbf{0}$  要素ではないことを示す部分は非自明なことであるが、そのためには  $\mathbf{0}$  でない  $u_k^*$  の存在が既にいえていることを用いればよい。そしてその極限関数を  $x_k$  で 1 の値をとるように正規化したものが  $u_k^*$  に他ならない。



観測値  $\mathbf{f} = (f_k)$  が与えられたとき、 $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 < \infty$  ならば、 $X$  の各点  $x_k$  で観測値  $f_k$  に一致していて  $\mathcal{V}_X$  に属するノルム最小の関数であることが期待される  $S_{\mathbf{f},X}$  は基底  $\{u_k^*\}$  の一次結合として、(無限)和

$$S_{\mathbf{f},X}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k^*(x)$$

で求まることになる。この和が収束することを直接確認するには、 $\mathbb{R}^d$  の任意の点  $x$  をとめるごとに定理 8.2 により  $\{u_k^*(x)\}$  は  $k$  を足とする数列として  $l^2$  の元であることに注意すればよい。

## 9 近似計算

$\mathbb{R}^d$  で定義されたある滑らかな関数  $f$  があって、観測値  $\mathbf{f} = (f_k)$  が  $f(x_k) = f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  で与えられているとき、 $S_{\mathbf{f},X}$  を  $S_{f,X}$  と書き表すことにする。すると、以上の構成法により、補間関数  $S_{f,X}$  は  $X$  の各点  $x_k$  では、関数  $f$  に等しい値をとるが、そのほかの点  $x \in \mathbb{R}^d$  ではどれくらい  $f$  に近い値をとるのか、という近似誤差評価が問題となる。これについては、 $X$  が  $\mathbb{R}^d$  でどれくらい密であるかを表すメッシュの“充填細かさ”を  $h_X = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \inf_j \|x - x_j\|$  とおくと、次の成立が期待される。

$\varphi$  が十分滑らかで適当な性質をみたすならば、関数  $f$  が  $m$  回微分可能で遠方でしかるべく減少するとき (但し、 $m$  はある自然数)、小さな値  $h_X$  にたいして  $f$  とその関数補間  $S_{f,X}$  との sup ノルム誤差  $\|f - S_{f,X}\|$  は  $(h_X)^m$  と同じオーダーの小さな値となる。

これを見るには、 $f$  が  $m$  回微分可能で遠方でしかるべく減少すれば  $\mathcal{H}$  に属すること、 $S_{f,X}$  の  $\mathcal{H}$  ノルムが  $f$  の  $\mathcal{H}$  ノルムで抑えられること、 $\mathcal{H}$  の元  $f - S_{f,X}$  が  $X$  上でゼロとなればその sup ノルムが  $\mathcal{H}$  で定まるオーダーで小さくなることなど、既に  $X$  が有限集合の場合に証明されている一連の一般的事実を合わせればよい。

この方面に興味を持たれた方のために、今後の課題と思われることをあげておく。

## 10 課題

- (i)  $u_k^*$  のより詳しい性質を調べる。  $u_k^*$  は  $\mathcal{H}$  に属するので、局所的にはかなり滑らかで、無限遠でも比較的素直に減少することは容易に分かる。  $\varphi$  によって  $u_k^*$  はどのように違ってくるのだろうか？
- (ii) コンピュータを使って具体的に  $u_k^*$  を近似計算するために上で述べた Greedy アルゴリズムは十分、実用的であろうか？ ほかに実用的計算アルゴリズムがあればそれを与えること。

参考文献 [15] には  $X$  が有限集合の場合に  $s_n = s_{n-1} + P_n f_{n-1}$ ,  $f_n = f_{n-1} - P_n f_{n-1}$  で ( $s_0 = 0, f_0 = f$ ) として再帰的に  $s_n$  を計算して、 $\lim s_n$  として  $u_k^*$  を求めるアルゴリズムが述べられているが、これとの比較も知りたい。

- (iii) 以上では  $X$  が一様に分離されている場合を扱った。 $\varphi$  や  $X$  の仮定を緩めるとどんなことがおきるだろうか？ 適当な対称性を持った場合や、準均一の際、逆に、非常に不均一の際の考察も望まれる。
- (iv)  $X \subset \mathbb{R}^2$  で  $\varphi$  が実解析的のときに、Guichard の定理から得られるものとの比較を行うこと。
- (v) positive definite を緩めた conditionally p.d. の性質を  $\varphi$  がみたすときに比較すること。この概念は文献 [15] で使われており、thin-plate spline 関数を用いる数学的基礎になっている。もっとも、conditionally p.d. の性質は  $\mathbb{R}^d$  全体での近似では有効でないかもしれない。
- (vi) 逆にみて、基底関数  $u_k^*$  を近似的に求める Greedy アルゴリズムは一般に無限の非負対称行列  $(a_{jk})$  の線形方程式を解く数値計算に何かヒントを与えないか？
- (vii)  $C^m$  クラスを一般にして、ベゾフ空間に属する関数にたいして多次元不規則サンプリングを行うとき、精密な漸近的近似誤差評価を与えること。規則格子の場合は文献 [7] で調べている。そこでの誤差評価は多次元規則格子の場合も標本関数のテンソル積を考えれば同様である。
- (viii) より一般にして、観測値が雑音を伴うことを考慮したサンプリング補間法の研究。

以下で本稿の作成において参考にした主なものをあげておく。(2012年12月27日記)

## 参考文献

- [1] 浅見 健介  
定符号の基本補間関数を用いた関数補間  
首都大学東京 数理情報科学専攻 2010 年度修士論文
- [2] J. J. Benedetto - M. W. Frazier  
*Wavelets: Mathematics and Applications*, CRC Press, 1994.
- [3] P. L. Butzer, P.J.S.G. Ferreira, J. R. Higgins, S. Saitoh, G. Schmeisser  
and R. L. Stens  
*Interpolation and sampling: E.T. Whittaker, K. Ogura and their followers*  
J. Fourier Anal. Appl., 2010.
- [4] P. D. Davis  
*Interpolation and Approximation*, Blaisdell Publishing Co.1963, Dover 1975.
- [5] R. DeVore and G. G. Lorentz  
*Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [6] 猪狩 惺  
フーリエ級数, 岩波書店, 1975.

- [7] St. Jaffard, M. Okada and T. Ueno  
*Approximate sampling theorem and the order of smoothness of the Besov space*  
RIMS, Kyoto Univ., B18(2010), 45-56.
- [8] 岡田 正己  
スプライン関数、ベゾフ空間 そしてサンプリング補間近似  
総合講演・企画特別講演アブストラクト p.63-72.  
2010 年度 日本数学会秋季総合分科会 9月24日
- [9] ペトローヴァーソロベフ  
第4章 差分, 19世紀の数学 III (編集 コルモゴロフ他)  
(監訳) 藤田 宏, 朝倉書店, 2009.
- [10] 斎藤 三郎  
再生核の理論入門, 牧野書店 2002.
- [11] 澤野 嘉宏  
ベゾフ空間論, 日本評論社, 2011.
- [12] I. J. Schoenberg  
*Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*  
Quart. Appl. Math., 4: 45-99(Part A), 112-141(Part B), 1946.
- [13] E. M. Stein  
Singular Integrals and Differentiability of Functions  
Princeton Univ. Press, 1970.
- [14] 洲之内源一郎  
フーリエ解析とその応用, サイエンス社 1977 - (2012年版は第31刷).
- [15] H. Wendland  
*Scattered Data Approximation*, Cambridge Univ. Press, 2005 (Paperback 2010).
- [16] R.M. Young  
*An Introduction to Non-Harmonic Fourier Series*  
Academic Press, New York, 1980.