数理解析研究所講究録
第 1870 巻 2013 年 1-15

Symplectic affine Grassmannian の同変 Schubert 類

池田 岳（岡山理科大学　理学部）

1　序

Kac-Moody Lie 群の等質空間としてアフィン・グラスマン多様体が特に興味深い．こう主張する理由として，２つの（互いに関連するはずの）事柄が挙げられる．第一に，表現論の観点からは幾何的佐武対応（[2],[13]）の舞台であること，第二に，シューベルト幾何を具体的に展開する道具が出てきたことである．第一の観点，および二つの観点の関連については，いずれ別な機会に語られることを期待して，ここではシューベルト幾何に話をしぼる．

近年，アフィン・シューベルト・カルキュラスの研究が活気づいているが，その発端は 1997 年に D. Peterson が MIT で行った講義にある．その内容の一部は Lam-Shimozono [17] などで解説されている．Affine nil-Hecke 代数，ホモロジー群のもつホップ代数構造，量子コホモロジー環，戸田格子などが交錯するこの講義のノートは依然として宝の埋もれた山[*1]のような印象がある．特に nil-Hecke 代数の役割については [4] にて解説を試みた．牽引者たちによる本 [15] の原稿が arxiv に出ているので，詳しい背景などについてはこちらをご覧いただきたい．

1.1　アフィン・グラスマン多様体

G を $\mathbb{C}$ 上の単連結な単純線型代数群とする．$\mathbb{O}=\mathbb{C}[[z]]$ とし $\mathbb{F}$ をその商体とする．G に対するアフィン・グラスマン多様体は

$$\mathcal{G}_G = G(\mathbb{O})/G(\mathbb{F})$$

[*1] Peterson は講義の内容を執筆中で，それが完成するまでに２，３年かかるであろうこと，講義ノートの内容は全貌の３分の１でしかないということを伝え聞いた．本人に確認したわけではないので，話の出所は書かないことにする．もしもこの情報が不正確だったらその責任は私にある．

と定義される．T を G の極大トーラスとする．T 同変コホモロジー環 $H_T^*(\mathcal{G}_G)$ とその双対である T 同変ホモロジー $H_*^T(\mathcal{G}_G)$ のシューベルト基底を具体的に記述することを目標にする．以下（コ）ホモロジーの係数は $\mathbb{Z}$ とする．

G のワイル群を W とし，対応するアフィン・ワイル群を $\tilde{W}$ とする．左商集合 $\tilde{W}/W$ の最短代表系（§2.1 参照）を $\tilde{W}^0$ で表す．T 同変コホモロジー環 $H_T^*(\mathcal{G}_G)$ は $\tilde{W}^0$ の元により添字づけられたシューベルト基底 $\{\xi^w\}_{w\in\tilde{W}^0}$ を持つ．これは $S = H_T^*(pt)$ 上の加群としての自由基底をなす：

$$H_T^*(\mathcal{G}_G) = \bigoplus_{w\in\tilde{W}^0} S\xi^w.$$

なお，同変ホモロジー $H_*^T(\mathcal{G}_G)$ はこれと双対的な基底を持ち，さらに環構造*2も持つ．

$G = SL_n$ の場合は Lam [14] が基本的な結果を証明した．ホモロジー $H_*(\mathcal{G}_{SL_n})$ のシューベルト基底が k-Schur 関数と呼ばれる特殊関数と同一視されるという結果 (Shimozono の予想) である．その他の組合せ論的側面を含めた進展に関しては [15], [16] を参照されたい．$G = Sp_{2n}$ の場合は [19] で同様の方向の結果が示されている．直交群の場合は Pon [21] の仕事がある．

[14], [19], [21] はいずれも T 同変でない（コ）ホモロジーの「シューベルト多項式」を扱っている*3．SL_n に関しては [18] において k-Schur 関数の「二重版」(Molev による) を用いて T 同変理論を展開している．本研究の目的は $G = Sp_{2n}$ の場合にアフィン・グラスマン多様体の T 同変コホモロジーにおけるシューベルト類を具体的な関数により記述することである．この問題に関して，十分に満足のゆく結果が得られたわけではないが，T 同変コホモロジー環の表示が得られ，シューベルト類の一部分をとらえることができたので報告する．

1.2 結果

$G = Sp_{2n}$ とする．対応するアフィン・グラスマン多様体を $\mathcal{G}_{C_n}$ で表す．極大トーラス T の次元は n で S は $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ と同一視できる．Γ を Schur Q 関数（§3 参照）が生成する環 $\mathbb{Z}[Q_1(x), Q_2(x), \ldots]$ とする．$\Gamma_S = S \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma$ とおくとき次数付き S 代数とし

*2 さらに著しいことに，両者は S 上のホップ代数としての構造を持ち，その意味で互いに双対である．

*3 むしろ，T 同変理論から非同変版にもってゆくのに大変苦労しているように見える．余積構造を重視して対称関数環との対応をつけるのが Lam [14] の手法だったから，それを他のタイプに一般化するというのが基本方針である．それとは違う道筋で，同変の利点を生かそうというのが我々の立場だが，余積の取り扱いがいまのところうまくできないのが弱点である．

ての全射

$$\phi^{(n)} : \Gamma_S \longrightarrow H_T^*(\mathcal{G}_{C_n})$$

が構成できる（§4.1）．さらに $\phi^{(n)}$ の核の生成元を具体的に与えることができた（§4.2）．

次の自然な目標として $\phi^{(n)}$ によってシューベルト類 ξ^w に写される Γ_S の元を明示的に与えることを考える（§5）．この問題は，一般のシューベルト類に対しては難しく，部分的な結果のみ得られている（定理 5.2, 定理 5.1）．ここでは factorial Q 関数（§3）と呼ばれる関数が用いられる．

この研究において，商集合 $\tilde{W}/W$ に誘導される Bruhat 順序の理解が本質的である．そのために，この商集合に対する組合せ的モデルとして，**符号付き多重集合**を提案した（§2.3）．その他に有界分割によるモデル[*4]に基づいて順序構造を調べた．

以上の成果は，成瀬弘氏との共同研究に基づく．

1.3 書けなかったこと

ホップ代数構造については興味深いが，確かな結果が得られていないので，予想を簡単に述べるだけにする．また，それと関連して，ホモロジー（双対なホップ代数）についても講演ではいくつかの予想について述べたが，依然として予想にとどまっているので，ここでは割愛することにした．

1.4 謝辞

内藤聡さんには，講演の機会を与えてくださったこと，とても遅い原稿を辛抱強く待ってくださったこと，それから文献 [3] に注意を向けてくださったことに対して，深く感謝します．松村朝雄さんには，原稿の誤りの指摘，および貴重なご意見をいただきましたことに感謝します．

2 アフィン・ワイル群と商集合 $\tilde{W}/W$

アフィン・ワイル群の記号を固定し，$C_n^{(1)}$ 型の商集合 $\tilde{W}/W$ の具体的な記述を与える．

[*4] なお，他にはいわゆるコアおよびアバカスによる記述もある（[3] 参照）．

2.1 アフィン・ワイル群

$C_n^{(1)}$ 型のワイル群は s_i $(i = 0, \dots, n)$ を生成元とし

$$s_i^2 = 1, \quad s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \ (1 \le i \le n-2),$$
$$s_i s_j = s_j s_i \ (|i-j| \ge 2), \quad s_{n-1} s_n s_{n-1} s_n = s_n s_{n-1} s_n s_{n-1}$$

により定義される．この群を $\tilde{C}_n$ と書き，部分群 $\langle s_1, \dots, s_n \rangle$ を単に C_n と書く[*5]ことにする．Coxeter 群としての長さ関数を $\ell : \tilde{C}_n \to \mathbb{Z}_{\ge 0}$ で表す．ここで

$$\tilde{C}_n^0 = \{ w \in \tilde{C}_n \mid \ell(w s_i) = \ell(w) + 1 \ (i = 1, \dots, n) \}$$

とする．よく知られているように $\tilde{C}_n^0$ は左商集合 $\tilde{C}_n / C_n$ の完全代表系（最短代表系と呼ばれる）をなす．

2.2 最短代表系と有界分割

$\tilde{C}_n^0$ の各元のラベル付けをするために複数の方法が知られているが，まず有界分割を用いる方法から説明しよう．

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ を分割（ヤング図形）であって，$\lambda_i \le n$ なる成分には重複が無く，$\lambda_1 \le 2n$ をみたすものとする．$n = 3$ ならば $\lambda = (6,6,5,5,5,3,1)$ などである．このような分割全体の集合を $\mathcal{P}_n^C$ と表す[*6]．

$\tilde{C}_n^0$ の元 ρ_i $(1 \le i \le 2n)$ を以下のように定めることができる：

$$\rho_i = \begin{cases} s_{i-1} \cdots s_1 s_0 & (1 \le i \le n) \\ s_{2n+1-i} \cdots s_{n-1} s_n s_{n-1} \cdots s_1 s_0 & (n+1 \le i \le 2n) \end{cases}.$$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathcal{P}_n^C$ に対して

$$\rho_\lambda = \rho_{\lambda_l} \cdots \rho_{\lambda_1} \tag{2.1}$$

とおく．すると $\rho_\lambda \in \tilde{C}_n^0$ であって，全単射

$$\mathcal{P}_n^C \cong \tilde{C}_n^0 \quad (\lambda \mapsto \rho_\lambda)$$

[*5] $W(C_n^{(1)})$ はちょっと仰々しいので [1] や [3] にしたがって簡潔な $\tilde{C}_n$ を採用する．しかし，そうすると $W(C_n)$ は C_n と書くしかなさそうである．ルート系とワイル群に同じ記号を使うのはよくないとは思うが妥協することにする．

[*6] Type C の bounded partitions.

が得られる．この結果は Eriksson-Eriksson [1] による．[19], Lemma 5.3 によると Morse が独立にこの事実に到達し，[19] の著者らに伝えたとのことである．箱の個数が Coxeter 群の元としての長さに対応している．

$\tilde{C}_n^0$ に誘導される Bruhat 順序[*7] を理解することが以下の考察で本質的である．分割（ヤング図形[*8]）の包含関係（$\lambda \subset \mu$）があれば，対応する $\tilde{C}_n^0$ の元の間には Bruhat 順序が付く（つまり $\rho_\lambda \le \rho_\mu$）ということはわかる（下記の補題 2.1 参照）．しかし，その逆は一般には成り立たない．例えば $n = 3$ の場合に次のような関係がある：

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&3&2&1\\ \hline 0 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \le \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&2&3&2\\ \hline 0&1 \\ \cline{1-2} 0 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

箱の中に書き入れた数字は生成元のインデックスに対応している．上の行から順に下の行に，左から右にインデックスを読んで，対応する生成元 s_i を右から左に並べれば上記 (2.1) と同じ最短表示が得られる．例えば，左の元の第 1 行は $\rho_6 = s_1s_2s_3s_2s_1s_0$ のインデックスを左右逆転して並べたものである．

上の例でみたように，有界分割は，Bruhat 順序を考えるときは，あまり便利ではない．A 型の場合は，アフィン・ワイル群を有限ワイル群で割った集合が n コアの集合と同一視される．この対応で Bruhat 順序がヤング図形の包含関係と一致していることが知られている (Lascoux [20])．この結果の類似として Hanusa-Jones [3] では「C 型の $2n$ コア」の集合と $\tilde{C}_n^0$ との全単射を与え，コアの言葉で順序を記述している．最後の節 §6 で解説する．

次の結果が上記の議論で用いられる（C 型に限らず一般のタイプの $\tilde{W}^0$ で成立）．

補題 2.1 ([3], Theorem 5.1 の証明, [20]) $w, v\ (\neq e) \in \tilde{C}_n^0$ とする．$s_iv < v$ なる i を任意に選ぶとき $w \le v \Longleftrightarrow \min(w, s_iw) \le s_iv$ が成り立つ．

例えば $w = \rho_1\rho_6$, $v = \rho_1\rho_2\rho_5$（上記の例）のとき，$i = 0$ と選べる．$s_0w < w$ だから $w \le v$ が成り立つかどうかを調べるには $s_0w \le s_0v$ が成り立つかどうか調べればよい．このように，長さがそれぞれ 1 だけ小さい場合に帰着できる．$w' = s_0w$, $v' = s_0v$ として，今度は $i = 1$ を選べば $s_1w' \le s_1v'$ を調べることに帰着する．$s_1w' = \rho_5$, $s_1v' = \rho_1\rho_5$ なので $s_1w' \le s_1v'$ がわかる．したがって $w \le v$ である．

*7 私は実験するのに sage を使っているが，とても便利である．

*8 n 以下の成分についてはヤング図形を下にゆくほど右に一つずつ「シフト」するのがおそらく自然だと思われる．

2.3 符号付き多重集合

商集合 $\tilde{C}_n/C_n$ のひとつの記述として $\{1,2,\ldots,n\}$ の**符号付き多重集合**について説明する．通常の多重集合 (multi-set) は $\{1,1,1,2,2,4\}$ のように，集合の要素だけではなくその重複度を込みにした対象である．負の文字からなる集合 $\{\bar{1},\bar{2},\ldots,\bar{n}\}$ も用意して，例えば $\{1,1,1,\bar{2},\bar{2},4\}$ のような対象を符号付き多重集合と呼ぶことにする．ただし，各 $i\,(1\le i\le n)$ ごとに正の文字 i と負の文字 $\bar{i}$ は共存しないものとする．例えば $\{1,1,\bar{1},2\}$ のようなものは符号付き多重集合とは呼ばない．n を固定したときに，$\{1,2,\ldots,n\}$ の符号付き多重集合全体の集合は格子 $\mathbb{Z}^n$ と一対一に対応[*9]する．例えば $(3,-2,0,1)$ を $\{1,1,1,\bar{2},\bar{2},4\}$ に対応させればよい．この対応による $\mathbb{Z}^n$ の元 $(m_1,\ldots,m_n)$ を符号付き重複度と呼ぶ．

$\{1,2,\ldots,n\}$ の符号付き多重集合全体を $\mathbb{M}_n$ と表す．$\mathbb{M}_n$ 上にアフィン・ワイル群 $\tilde{C}_n$ の自然な作用が有る．$s_i\ (1\le i\le n-1)$ は自然な（符号付き）互換であって i と $i+1$ もしくは $\bar{i}$ と $\overline{i+1}$ を重複度込みで交換する．s_n は n と $\bar{n}$ を重複度込みで交換する．s_0 は 1 の（符号付き）重複度 m とするとき，それを $1-m$ に変える[*10]．例えば $s_0(\{\bar{1}\})=\{1,1\}\ (m=-1)$, $s_0(\{2\})=\{1,2\}\ (m=0)$ など．

空集合 $\emptyset$ の stabilizer は $C_n=\langle s_1,\ldots,s_n\rangle$ であって，この作用が推移的であることは容易にわかるから，それより全単射

$$\tilde{C}_n/C_n\cong\mathbb{M}_n$$

が得られる．

$\mathbb{M}_n$ には Bruhat 順序から誘導される半順序構造が入る．符号付き多重集合としての解釈に基づいてその半順序構造を明示的に記述することが重要である．詳細は §6 に述べるが，まずわかりやすい部分から述べる．$\mathcal{SP}(n)$ をすべての成分が n 以下の重複のない分割 (strict partitions) の集合とする．

命題 2.1 負の要素を持たず，重複度が高々 1 であるような $\mathbb{M}_n$ の元全体は $\mathcal{SP}(n)$ と一対一に対応する．また，この埋め込み $\mathcal{SP}(n)\hookrightarrow\mathbb{M}_n$ は順序構造を保つ．

定義 2.1 $r\ge 1$ に対して $r=2na+s\ (0\le s<2n)$ として $\rho_r=\rho_s(\rho_{2n})^a$ とおく．

[*9] これは $\mathbb{M}_n\cong\mathbb{Z}^n$ が余ルート格子 $Q^\vee$ と自然に同一視されることを示している．実際，アフィン・ワイル群の $Q^\vee$ 上への自然な作用と，$\mathbb{M}_n$ への作用は対応している．それなら最初から $\mathbb{Z}^n$ を考えればよいようなものだが，符号付き多重集合という観点も組合せ的には有用である．

[*10] 超平面 $m=1/2$ に関する鏡映．

補題 2.2 集合 $\{v \in \mathbb{M}_n \mid \rho_r \not\leq v\}$ は重複度 $m_i\ (1 \leq i \leq n)$ が不等式

$$-\lceil \tfrac{r+i-1}{2n} \rceil + 1 \leq m_i \leq \lceil \tfrac{r-i}{2n} \rceil$$

をみたす元全体と一致する.

具体例：$n=3$ とする.

$r=4$ の場合.

$$0 \leq m_1 \leq 1, \quad 0 \leq m_2 \leq 1, \quad 0 \leq m_3 \leq 1,$$

つまり $\{1,2,3\}$ の任意の部分集合. $\mathcal{SP}(3)$ と同一視できる.

$r=5$ の場合.

$$0 \leq m_1 \leq 1, \quad 0 \leq m_2 \leq 1, \quad -1 \leq m_3 \leq 1,$$

$\{1,2,3,\bar{3}\}$ の部分集合で $3, \bar{3}$ をともには含まないもの.

$r=7$ の場合.

$$-1 \leq m_1 \leq 1, \quad -1 \leq m_2 \leq 1, \quad -1 \leq m_3 \leq 1,$$

$\{1,2,3\}$ の "符号付き部分集合" (各文字の重複は無し).

$r=8$ の場合.

$$-1 \leq m_1 \leq 2, \quad -1 \leq m_2 \leq 1, \quad -1 \leq m_3 \leq 1,$$

$\{1,1,\bar{1},2,\bar{2},3,\bar{3}\}$ の "符号付き部分多重集合" であって 1 だけ重複を 2 回まで許す. 長さ 9 ならば $\{\bar{1},2,3\},\{1,\bar{2},\bar{3}\},\{\bar{1},\bar{3}\},\{1,1,3\}$ の 4 つ (残りは $\{1,2,2\},\{3,3\}$). 長さ 10 ならば $\{1,1,2,3\},\{\bar{1},2,\bar{3}\},\{\bar{1},\bar{2}\},\{1,1,\bar{3}\}$ の 4 つ (残りは $\{2,2,3\},\{1,3,3\},\{\bar{3},\bar{3}\}$). 長さ 11 ならば $\{1,1,2,\bar{3}\},\{\bar{1},\bar{2},3\},\{1,1,\bar{2}\}$ の 3 つ (残りは 5 個).

2.4 ルート系

T の指標全体がなす格子を $\hat{T}$ で表す. $S = \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\hat{T})$ とみなすのが自然である. $t_1, \ldots, t_n$ を $\hat{T} \cong \mathbb{Z}^n$ の標準的な基底とする. ここで

$$\alpha_0 = 2t_1, \quad \alpha_i = t_{i+1} - t_i\ (1 \leq i \leq n-1), \quad \alpha_n = -2t_n$$

と定める. これらはアフィンの意味での単純ルートを有限型ルート系の張る空間に射影したものである. $\Delta \subset \hat{T}$ を C_n 型のルート系とし, Δ^+ を正ルートの集合とする. 余ルート格子 $Q^\vee$ の元 $\alpha^\vee$ ごとに translation 元 $t_{\alpha^\vee} \in \tilde{C}_n$ が定まる. S にはアフィン・ワイル群 $\tilde{C}_n$ が自然に作用していることに注意しておく.

3 Factorial Q 関数

Schur の Q 関数と factorial 版について最低限必要なことをまとめておく．より基本的なことについては [12] を参照されたい．母関数

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1+x_iu}{1-x_iu}=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(x)u^k$$

により $Q_k(x)$ $(k\geq 0)$ が定義される．Ivanov [9] は Q 関数の多重パラメータ変形として factorial Q 関数を導入した．シューベルト・カルキュラスの文脈における factorial Q 関数の役割は [5] で明らかになった．実際，この関数はラグランジアン型グラスマン多様体の同変シューベルト類と同一視することができる．

ここでは，factorial Q 関数に対して，ひとつの明示的な表示を与える．その他の詳しい性質や公式等については原論文の他，[6] を参考にされたい．記号等は主に [6] にしたがう．パラメータ $t=(t_1,t_2,\ldots)$ を用意する．$k\geq 1, l\geq 2$ を整数として

$$Q_k^{(l)}(x|t)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j e_j(t_1,\ldots,t_{l-1})Q_{k-j}(x)$$

とおく．e_j は j 次の基本対称式である．変数 t_i, x_i の次数を 1 として，これは k 次の斉次多項式である．また $Q_k^{(1)}(x|t)=Q_k(x)$, $Q_0^{(l)}(x|t)=1$ とする．l という添字は幾何学的には自然なシフトに対応していて Kazarian の論文 [10] に現れる公式を参考にして定めたものである．Ivanov により定義された関数は $Q_k^{(k)}(x|t)$ であって単に $Q_k(x|t)$ と書かれる．$k\geq l\geq 0$ として

$$Q_{k,l}(x|t)=Q_k^{(k)}(x|t)Q_l^{(l)}(x|t)+2\sum_{i=1}^{l}(-1)^iQ_{k+i}^{(k)}(x|t)Q_{l-i}^{(l)}(x|t)$$

と定める．$\lambda=(\lambda_1>\ldots>\lambda_r)$ を strict partition とする．必要に応じて $\lambda_r=0$ を許して r は偶数であるとする．Factorial Q 関数は次の式で定義できる：

$$Q_\lambda(x|t)=\mathrm{Pf}(Q_{\lambda_i,\lambda_j}(x|t))_{1\leq i<j\leq r}.$$

ここで Pf はパッフィアンを表している．

Factorial Q 関数のもっとも基本的な性質は以下の消滅条件である．$\mu=(\mu_1>\cdots>\mu_l>0)$ を strict partition とするとき $x=(x_1,x_2,\ldots)$ を $t_\mu=(t_{\mu_1},t_{\mu_2},\ldots,t_{\mu_l},0,0,\ldots)$ と特殊化することを考える．

命題 3.1 $\mu \not\supset \lambda$ のときに $Q_\lambda(t_\mu|t) = 0$ が成り立つ.

4 局所化写像

写像 $\phi^{(n)}$ の定義とその核の記述を与える.

4.1 局所化写像の定義

$\Gamma_S = S \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma$ とおく. S 代数の準同型写像

$$\phi^{(n)} : \Gamma_S \longrightarrow H_T^*(\mathcal{G}_{C_n})$$

を構成することがこの節の目標である.

T 作用の固定点集合 $\mathcal{G}_{C_n}^T$ は $\tilde{C}_n^0$ と一対一に対応する. $v \in \tilde{C}_n^0$ に対応する T 固定点を e_v で表そう. 次の同一視ができる:

$$H_T^*(\mathcal{G}_{C_n}^T) = \prod_{v \in \tilde{C}_n^0} H_T^*(e_v) = \mathrm{Map}(\tilde{C}_n^0, S).$$

命題 4.1 ([18], Section 3.2) $\mathcal{G}_{C_n}^T \hookrightarrow \mathcal{G}_{C_n}$ が誘導する写像

$$H_T^*(\mathcal{G}_{C_n}) \to \mathrm{Map}(\tilde{C}_n^0, S)$$

は単射である. さらに $f \in \mathrm{Map}(\tilde{C}_n^0, S)$ がこの写像の像に属すためには以下が必要十分条件である:

(1) $\alpha \in \Delta^+$ と $v \in \tilde{C}_n^0$ に対して $f(v) - f(s_\alpha v) \in \alpha S$,

(2) $\alpha \in \Delta^+$ と正の整数 d と $v \in \tilde{C}_n^0$ に対して

$$f((1 - t_{\alpha^\vee})^d v) \in \alpha^d S, \quad f((1 - t_{\alpha^\vee})^{d-1}(1 - s_\alpha)v) \in \alpha^d S.$$

$v \in \tilde{C}_n^0$ に対応する符号付き多重集合を符号付き重複度により $(m_1, \ldots, m_n)$ と表す. このとき S 代数の準同型 $\phi_v : \Gamma_S \to S$ を, 任意の $F(x_1, x_2, \ldots) \in \Gamma_S$ に対して

$$\phi_v(F(x_1, x_2, \ldots)) = F(\varepsilon_1 t_1, \ldots, \varepsilon_1 t_1, \varepsilon_2 t_2, \ldots, \varepsilon_2 t_2, \ldots, \varepsilon_n t_n, \ldots, \varepsilon_n t_n, 0, 0, \ldots)$$

として定義する. ここに ε_i は m_i の符号で $\varepsilon_i t_i$ が $|m_i|$ 回繰り返されている.

この写像は, 命題 3.1 で考えた特殊化を拡張したものになっていることに注意してほしい. 実際, v が $\mu \in \mathcal{SP}(n)$ に対応するならば ϕ_v は $x = t_\mu$ という代入そのものである.

命題 4.2 積写像 $\prod_v \phi_v : \Gamma_S \to \mathrm{Map}(\tilde{C}_n^0, S)$ は S 代数の全射

$$\phi^{(n)} : \Gamma_S \longrightarrow H_T^*(\mathcal{G}_{C_n})$$

を引き起こす.

証明の筋：像が命題 5.1 の条件 (1), (2) を満たすことを示す．全射性は別に議論する.

注：ϕ_v は局所化写像（制限写像）$H_T^*(\mathcal{G}_{C_n}) \to H_T^*(e_v)$ を代数的に先取りして定めたものなので ϕ_v および $\phi^{(n)}$ を局所化写像と呼んでいる.

4.2 $\mathrm{Ker}(\phi^{(n)})$ の記述

$p_r(x)$ を r 次の冪和対称関数とする．次の関数を定義する：

$$p_{2k+1}^{(n)}(x|t) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j e_j(t_1^2, \ldots, t_n^2) p_{2k+1-2j}(x) \quad (k \geq n).$$

$2p_{2i+1}(x)$ は Γ に属すことが知られているので $2p_{2k+1}^{(n)}(x|t) \in \Gamma_S$ であることがわかる.

補題 4.1 次が成立する：$\mathrm{Ker}(\phi^{(n)}) = \langle 2p_{2k+1}^{(n)}(x|t) | k \geq n \rangle \subset \Gamma_S$.

証明の筋：$2p_{2k+1}(x|t)$ が Kernel に属すことは直接計算で示せる．これらが生成元であることは $H_T^*(\mathcal{G}_{C_n})$ の各次数成分の S 上の階数が次の母関数（ポアンカレ級数）

$$\sum_{w \in \tilde{C}_n^0} q^{\ell(w)} = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n-1})}$$

で表されることを用いて示す.

命題 4.2，補題 4.1 により次が得られた.

定理 4.1 ([8]) 同変コホモロジー環 $H_T^*(\mathcal{G}_{C_n})$ は次数付き S 代数として $\Gamma_S^{(n)} := \Gamma_S / \langle 2p_{2k+1}^{(n)}(x|t) \mid k \geq n \rangle$ と同型である.

注：2つの環 $H_T^*(\mathcal{G}_{C_n})$, $\Gamma_S^{(n)}$ はそれぞれ幾何学的および組合せ論的（対称関数的）な由来により自然な S 上のホップ代数の構造を持つ．それらが一致することが予想されるが証明できていない.

5 シューベルト多項式の探索

定理 4.1 によると，T 同変シューベルト類 ξ^w $(w \in \tilde{C}_n^0)$ に対して

$$\phi^{(n)}(F_w(x|t)) = \xi^w$$

をみたす多項式*11 $F_w(x|t) \in \Gamma_S$ が存在する．しかし，このような多項式は一意的ではないので，何らかの意味で「良い」性質を持つもの*12を見いだしたい．$\tilde{C}_n^0$ 全体では，何をもって「良い」とするべきかの指針が今のところ無い．$\tilde{C}_n^0$ のある部分集合では以下に述べるような「シューベルト多項式」の候補が有る．

まず，ξ^w の特徴付けについて述べておく．命題 5.1 によって記述される $\phi^{(n)}$ の像としての $\mathrm{Map}(\tilde{C}_n^0, S)$ の部分環を $\Xi^{(n)}$ で表す．我々は $\Xi^{(n)}$ は $H_T^*(\mathcal{G}_{C_n})$ と同一視する．

命題 5.1 **([18],[11])** $\Xi^{(n)}$ の元 $\xi^w \in \mathrm{Map}(\tilde{C}_n^0, S)$ は次の条件で特徴づけられる：

(1) 任意の $v \in \tilde{C}_n^0$ に対して $\xi^w(v) \in S$ は $\ell(w)$ 次の斉次元である．

(2) $v \not\geq w$ ならば $\xi^w(v) = 0$.

(3) $\xi^w(w) = \prod_{\alpha \in I_w} \alpha$, $I_w = \{\alpha \in \Delta^+ \mid s_\alpha w < w\}$.

ρ_r に対応するシューベルト類について述べる．$t = (t_1, t_2, \ldots)$ の特殊化として

$$t^{(n)} = (t_1, t_2, \ldots, t_n, -t_n, \ldots, -t_2, -t_1, t_1, t_2, \ldots, t_n, -t_n, \ldots)$$

と定める．

定理 5.1 **([8])** $r \geq 1$ とする．このとき $\phi^{(n)}(Q_r(x|t^{(n)})) = \xi^{\rho_r}$ が成り立つ．

Proof. 命題 5.1 を用いる．$v \not\geq \rho_r$ のときに $Q_r(x|t^{(n)})$ が v における局所化で消えることを示す．母関数表示

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(r)}(x|t) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+x_i}{1-x_i} \prod_{j=1}^{r-1} (1 - t_j)$$

*11 正確には x の形式冪級数だが $Q_i(x)$ の多項式として書けるから多項式といってもよいだろう．「シューベルト形式冪級数」というのでは詩的でない．

*12 これまでの文献の流れでは double affine Stanley symmetric functions of type C という呼び名が順当であろう．

を用いる．$\prod_{j=1}^{r-1}(1-t_j)$ という因子を $t=t^{(n)}$ に特殊化すると，r によって決まる非負整数 α_j,β_j によって $\prod_{j=1}^{n}(1-t_j)^{\alpha_j}(1+t_j)^{\beta_j}$ と書ける．補題 2.2 の不等式を用いると，局所化の際に分母の $1+x_i$ という因子がすべてキャンセルして r 次未満の多項式になることがわかる．ρ_r における局所化の値は直接計算できるので (3) の条件がチェックできる．□

もうひとつ，シューベルト多項式がつかまるのは以下の場合である．

定理 5.2 ([8]) $\lambda\in\mathcal{SP}(n)$ とする．このとき $\phi^{(n)}(Q_\lambda(x|t))=\xi^{\rho_\lambda}$ が成り立つ．

$\lambda\in\mathcal{SP}(n)$ ならば $Q_\lambda(x|t)$ はラグランジアン・グラスマン多様体 $LG(n)$ のシューベルト類を代表することがわかっている ([5])．この事実と命題 2.1 とから定理は自然に予想されることである．命題 5.1 によれば，ここで特に証明しなければいけないのは $v\not\geq\rho_\lambda$ のときに $\phi_v(Q_\lambda(x|t))=0$ が成立することである． 命題 3.1 と次の補題からこのことがしたがう．

補題 5.1 $\lambda\in\mathcal{SP}(n)$ とする．このとき $\{v\in\tilde{C}_n^0 \mid v\not\geq\rho_\lambda\}=\{\rho_\mu \mid \mu\not\supset\lambda\}$.

Proof. 補題 2.1 を用いる．□

注意：$\lambda\in\mathcal{SP}(n)$ のときは $Q_\lambda(x|t)=Q_\lambda(x|t^{(n)})$ がなりたつ．定理 5.1 と定理 5.2 とは $\rho_r(1\leq r\leq n)$ の部分では共通している．

Factorial Q 関数は strict partitions の包含関係によって定まる消滅条件（命題 3.1）で特徴付けられる．$\tilde{C}_n^0$ の順序構造はそれと比較すると複雑であるが，その構造に見合った特殊多項式が Γ_S のなかに存在するのだと思われる．それは適切な tableaux の和のような形で捉えられることが期待できる．[19] ではその非同変版にあたる「多項式」が提案されているが，注意深く読むと，実はそれは Γ の剰余環の元を巧妙に定めているだけであって，Q 関数の環 Γ への「持ち上げ」は与えられていない．この点を不満に思ってこの研究を開始した．一般の場合に「良い」$F_w(x|t)$ を見つけるためには，根本的に新しい組合せ論的アイデアが必要であろう．難しいが魅力的な問題である．

6 付記

Bruhat 順序の具体的な記述が必要だと書いた．Hamusa-Jones [3] に関連の深いことが書かれているので簡単に触れる．

ヤング図形においてすべてのフック長が k で割り切れないとき k コアであると言われる．$2n$ コアであって，対角線に関して対称であるヤング図形全体の集合*13を考える．そのようなヤング図形に対して，対角線よりも下の箱を取り去って得られる図形を $\tilde{C}_n$ 型のシフトされたコアと呼ぶことにする．

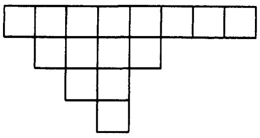
定理 6.1 ([3]) $\tilde{C}_n$ 型のシフトされたコア全体の集合と $\tilde{C}_n^0$ との間には自然な全単射がある．この対応によって $\tilde{C}_n^0$ の Bruhat 順序はコアの包含関係に対応する．

この全単射は A 型の場合を知っていれば自然なものだとわかる（詳細は [3] を参照されたい）．いわゆる weak (left) order をヤング図形に翻訳したものであると言える．これが (strong) Bruhat order と直結していることは非自明である．

上記と関連して，次のことに気が付いた．

命題 6.1 $\tilde{C}_n$ 型のシフトされたコア全体の集合と $\mathbb{M}_n$ との間の自然な全単射が以下のように与えられる．コアの第 i 行の成分が $2n$ を法として $1 \leq r_i \leq 2n$ と合同であるとする．各 i ごとに，$1 \leq r_i \leq n$ ならば正の元 r_i を，$n+1 \leq r_i \leq 2n$ ならば負の元 $r_i - 2n - 1$ を対応させ，それらを集めて多重集合を作ればよい．

例えば $\tilde{C}_3$ 型のシフトされたコア $(8, 4, 2, 1)$



2
$\bar{3}$
2
1

に対応する符号付き多重集合は $\{1, 2, 2, \bar{3}\}$ である．

参考文献

[1] H. Eriksson, K. Eriksson, Affine Weyl groups as infinite permutations. Electron. J. Combin. 5 (1998), Research Paper 18, 32 pp. (electronic).

[2] V. Ginzburg, Perverse sheaves on a Loop group and Langlands' duality. arXiv:alg-geom/9511007

*13 §2.2 で考えた有界分割の集合との全単射が知られている（[3] 参照）．フック長が（対称なヤング図形の）$2n$ を超えるような非対角の箱をすべて消して，対角を残して左に詰める．

[3] C. R. H. Hanusa, B. Jones, Abacus models for parabolic quotients of affine Weyl groups. J. Algebra 361 (2012), 134-162.

[4] 池田 岳, Kostant-Kumar の nil-Hecke 代数, 数理解析研講究録「ホップ代数と量子群–応用の可能性」2012 年.

[5] T. Ikeda, Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian. Adv. Math. 215 (2007), 1-23.

[6] T. Ikeda, L. Mihalcea, H. Naruse, Double Schubert polynomials for the classical groups. Adv. Math. 226 (2011) 840-886.

[7] T. Ikeda, H. Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus. Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 10, 5193-5221.

[8] T. Ikeda, H. Naruse, in preparation.

[9] V. N. Ivanov, Interpolation analogues of Schur Q-functions. Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 307 (2004), Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 10, 99–119, 281–282; translation in J. Math. Sci. (N. Y.) 131 (2005), no. 2, 5495-5507.

[10] M. Kazarian, On Lagrange and symmetric degeneracy loci. (2000), Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences Preprint Series

[11] B. Kostant, S. Kumar, T-equivariant K-theory of generalized flag varieties. J. Diff. Geom. 32 (1990), no. 2, 549-603.

[12] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials.* 2nd edition, Oxford Univ. Press, Oxford 1995.

[13] I. Mirković, K. Vilonen, Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings. Ann. of Math. (2) 166 (2007), no. 1, 95-143.

[14] T. Lam, Schubert polynomials for the affine Grassmannian. J. Amer. Math. Soc. 21 (2008), no. 1, 259-281.

[15] T. Lam, L. Lapointe, J. Morse, A. Schilling, M. Shimozono, M. Zabrocki, k-Schur functions and affine Schubert calculus. arXiv:1301.3569

[16] T. Lam, L. Lapointe, J. Morse, M. Shimozono, *Affine insertion and Pieri rules for the affine Grassmannian.* Mem. Amer. Math. Soc. 208 (2010).

[17] T. Lam, M. Shimozono, Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian. Acta Math. 204 (2010), no. 1, 49-90.

[18] T. Lam, M. Shimozono, k-Double Schur functions and equivariant (co)homology

of the affine Grassmannian. Math. Ann. 356 (2013), no. 4, 1379-1404.

[19] T. Lam, A. Schilling, M. Shimozono, Schubert polynomials for the affine Grassmannian of the symplectic group. Math. Z. 264 (2010), no. 4, 765-811.

[20] A. Lascoux, Ordering the affine symmetric group, in Algebraic combinatorics and applications (Gößweinstein, 1999), Springer, Berlin, 2001, pp. 219-231.

[21] S. Pon, Affine Stanley symmetric functions for classical types. J. Alg. Combnat. 36 (2012), issue 4, 595-622.