

# Poker dice game and multivariate Krawtchouk polynomial

水川 裕司 (Hiroshi Mizukawa)

防衛大学校 総合教育学群 数学教育室

Department of Mathematics, National Defense Academy  
mzh@nda.ac.jp

## 1 Krawtchouk 多項式

$N$  を非負整数,  $p$  を実数とする. Krawtchouk 多項式  $K_n(x : p : N)$  ( $0 \leq n \leq N$ ) とは 2 つのパラメーター  $(p, N)$  をもつ 離散直交多項式の一つであり, 次のようなものである.

- (超幾何表示)

$$K_n(x : p : N) = {}_2\tilde{F}_1(-n, -x; -N \mid 1/p)$$

ただし, 非負整数  $N$  にたいして,

$${}_2\tilde{F}_1(\alpha, \beta; -N \mid X) = \sum_{j=0}^N \frac{(\alpha)_j (\beta)_j X^j}{(-N)_j j!}$$

である.

- (直交性) Krawtchouk 多項式は重み関数  $w(x : p : N) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$  を用いて次の直交関係を満たす.

$$\sum_{x=0}^N K_m(x : p : N) K_n(x : p : N) w(x : p : N) = \frac{\binom{1-p}{p}^n}{\binom{N}{n}} \delta_{nm}.$$

- (母関数) Krawtchouk 多項式の母関数は次で与えられる.

$$\left(1 - \frac{1-p}{p}t\right)^x (1+t)^{N-x} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} K_n(x : p : N) t^n.$$

ひとつコメントしておく、最後の母関数はガウスの超幾何関数の積分表示の事である。また、Krawtchouk 多項式は Askey スキームの中の位置付けで言うと、Racah 多項式を頂点として、Hahn 多項式の下に現れる直交多項式である [9].

次に上で述べた Krawtchouk 多項式の変数版を紹介する。

**Definition 1.1** (R. C. Griffiths, 1971 [4]).  $\mathbb{N}_0$  を非負整数全体とする。また  $r, N \in \mathbb{N}_0$  に対し、

$$X(r, N) = \{(\ell_0, \dots, \ell_{r-1}) \in \mathbb{N}_0^r \mid \ell_0 + \dots + \ell_{r-1} = N\}$$

と置く。このとき、

$$\begin{cases} \ell = (\ell_0, \dots, \ell_{r-1}) \in X(r, N) \\ A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq r-1} \in M_n(\mathbb{C}) \text{ s. t. } a_{0j} = a_{i0} = 1 \ (0 \leq i, j \leq r-1) \end{cases}$$

に対して、

$$\Phi_A(\ell) = \prod_{j=0}^{r-1} \left( \sum_{j=0}^{r-1} a_{ij} t_j \right)^{\ell_j}$$

と置き、これの  $t_0, \dots, t_{r-1}$  に関する展開

$$\Phi_A(\ell) = \sum_{m \in X(r, N)} \binom{N}{m} \phi_A(\ell, m) t^m$$

に現れる  $\phi_A(\ell, m)$  を多変数 Krawtchouk 多項式と呼ぶ。ただし、ここで  $m = (m_0, \dots, m_{r-1}) \in X(r, N)$  に対して、 $\binom{N}{m} = \binom{N}{m_0, \dots, m_{r-1}}$  および、 $t^m = t_0^{m_0} \dots t_{r-1}^{m_{r-1}}$  である。

このようにして定義された多変数 Krawtchouk 多項式が、いつ直交するのかが重要であるが、直交性の必要十分条件は行列  $A$  の関係式を用いて次のように述べる事が出来る。

**Theorem 1.2** ([5]( $r=3$  のとき), [12](一般の  $r$ )).

2つの対角行列を  $D_i = \text{diag}(\eta_{0i}, \dots, \eta_{(r-1)i}) \in M_n(\mathbb{C})$  ( $i = 1, 2$ ) と置く。このとき、多変数 Krawtchouk 多項式の直交関係式

$$\sum_{m \in X(r, N)} \phi_A(\ell : m) \overline{\phi_A(\ell' : m)} \binom{N}{m} \prod_{j=0}^{r-1} \eta_{j1}^{m_j} = \frac{\prod_{j=0}^{r-1} \eta_{j2}^{\ell_j}}{\binom{N}{m}} \delta_{\ell, \ell'}$$

が成り立つ必要十分条件は行列の関係式

$$A^* D_1 A = \zeta D_2 \tag{1}$$

が成り立つことである ( $\zeta$  は 1 の  $r$  乗根)。

定理に現れた行列の関係式 (1) を満たすものとして、有限群の Gelfand ペアの帯球関数表がある。この場合は、 $D_1, D_2$  は両側剰余類のオーダー、置換表現の既約分解に登場する  $G$  既約表現の次元から得られる量を並べた対角行列である ([10, 第 7 章])。実際にこれには次のような表現論的背景がある。

**Theorem 1.3** ([11]).  $(G, H)$  を有限群の Gelfand pair とする。また、 $\Omega$  をこのペアの帯球関数のテーブルとする。このとき  $(G \wr S_N, H \wr S_N)$  も Gelfand pair であって帯球関数は

$$(\phi_\Omega(\ell, m))_{\ell, m \in X(r, N)}$$

で与えられる。

また多変数 Krawtchouk 多項式の超幾何表示もわかっている。

**Theorem 1.4** ([11]).  $J$  を  $r \times r$  の行列で、成分が全て 1 であるようなものとする。このとき、

$$\phi_\Omega(\ell, m) = F(-\ell, -m, -N \mid J - A)$$

ここで、 $F(-\ell, -m, -N \mid J - A)$  は Aomoto-Gelfand の超幾何関数 [2] である。

また、多変数 Krawtchouk 多項式の特異関数としての性質もいろいろと研究されているので [8] 等を参考にして欲しい。

## 2 ポーカー・ダイスゲームの確率過程

### 2.1 ポーカー・ダイスゲーム

ここでは Grümbaum と Rahman[6] によって導入されたポーカー・ダイスゲームと呼ばれる確率モデルを紹介し、前節の多変数 Krawtchouk 多項式との関係を述べる。もともとポーカー・ダイスゲームとはその名の通り、トランプの柄の描かれた 5 つのサイコロを振ってポーカーの役を作る遊びである。ルールは簡単で、「まず、全てのサイコロを振り、気に入ったものをホールドし、それ以外をもう一度振り、役が確定する」というものである。これから紹介する確率モデルは今紹介したそのものではないが、「二回振る」という特性を反映したものである。

まず、プレイヤーは各ターンにおいて状態  $v = (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$  をとる。そして  $w = (w_1, \dots, w_n)$  に

$$P(v, w) = \prod_{j=1}^n p(v_j, w_j)$$

の確率で移る. ここで,  $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}, \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i \leq 1$  に対して,

$$\begin{cases} p(i, i) = (1 - \alpha_i)\beta_i + \alpha_i & (i \neq 0), \\ p(i, j) = \beta_j(1 - \alpha_i) & (i \neq j, i, j \neq 0), \\ p(i, 0) = (1 - \alpha_i)(1 - \beta_1 - \dots - \beta_{r-1}) & (i \neq 0), \\ p(0, i) = \beta_i & (i \neq 0) \\ p(0, 0) = 1 - \beta_1 - \dots - \beta_{r-1} \end{cases}$$

とおく. 本当はこれがどうしてポーカー・ダイスゲームと呼ぶのかということに対してもう少し説明が必要だが, ここで解説するとどうしても冗長に流れるので省略する. 詳しくは [6] を参照して欲しい. ただ, 「確率  $\alpha$  が一投目に,  $\beta$  が 2 投目に対応している」とだけ言っておこう. また, 論文 [6] ではむしろ確率,

$$\frac{1}{\ell_0! \dots \ell_{r-1}!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n p(v_j, w_{\sigma(j)}),$$

ここで  $\ell_j$  は  $(w_1, \dots, w_n)$  にある  $j$  の個数,  $\ell$  が考えられている. これは対称性より,  $v_j$  たちの順序によらないから,  $m_j$  を  $(v_1, \dots, v_n)$  にある  $j$  の個数としてやると,  $m = (m_0, \dots, m_{r-1})$  から  $\ell = (\ell_0, \dots, \ell_{r-1})$  にうつるある確率を表す (だから上の式を  $K(\ell, m)$  と置く), つまり, 彼らは各状態を  $X(r, n)$  に取る確率過程を考えている. この論文ではこれを細密化した確率空間  $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$  を取り扱う.  $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$  の各元の順番を忘れたものが  $X(r, n)$  である. どうして細分化したものを考えるかという, この試行を  $M$  回繰り返したときの確率を求めたいのだが, 細分化した方でそれを求めてやれば, オリジナルの場合も (簡単な組合せ論的議論で) 再現できるからである.

ところで, 彼らの論文では, この確率過程の基本的なことが調べられているが, それをおおざっぱにまとめるとこの確率行列  $(K(\ell, m))_{\ell, m \in X(r, n)}$  の固有ベクトルが多変数 Krawtchouk 多項式で与えられる, ということである.

ここではこの確率空間に有限群の作用を考えて Diaconis 流の解析 [3] を試みようと思う.

## 2.2 群論からの準備

準備として, 有限群の作用する確率空間の復習をする.

$\mathfrak{X}$  を有限集合とする.  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$  上の関数  $p: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$  が  $X$  上の確率関数であるとは,

$$\begin{cases} p(x, y) \geq 0, \\ \sum_{y \in \mathfrak{X}} p(x, y) = 1 \end{cases}$$

を満たすことである。更に  $\mathfrak{X}$  に有限群  $K$  が推移的に作用しているとする。このとき、任意の  $K$  の元  $k$  に対して、

$$p(kx, ky) = p(x, y)$$

であるとき、確率関数  $p$  は  $K$ -不変であるという。

$K$ -不変な確率関数があったとき、 $x_0 \in \mathfrak{X}$  の固定群  $L = C_K(x_0)$  を考える。いま、 $x_0 \in \mathfrak{X}$  とする。いま、 $K$  の作用が推移的であることから、 $x$  の各元に対して  $x = g_x x_0$  となるような  $g_x \in K$  が存在するので、

$$\begin{aligned} p(x, y) &= p(g_x x_0, g_y x_0) \\ &= p(x_0, g_0^{-1} g_1 x_0) \end{aligned}$$

となり、 $G$  上の関数

$$\tilde{\nu}(g) = \frac{1}{|L|} p(x_0, g x_0)$$

は両側  $K$ -不変な関数であることがわかる。従い  $\tilde{\nu}$  はヘッケ環  $\mathcal{H}(K, L)$  の元である。よって  $\tilde{\nu}$  は帯球関数による展開を考えることが出来る。さらに、 $p^{(N)}(x_0, x_N)$  を  $x_0$  を起点に試行を  $N$  回繰り返したとき  $x_N$  に至る確率とすると、簡単な計算で公式、

$$p^{(N)}(x_0, x_N) = |L| \tilde{\nu}^{*N}(g_N)$$

を得る。ここで、 $*N$  はたたみ込み積による  $N$  乗を表す。

### 2.3 ポーカー・ダイスゲームの解析

さて、話を戻して、まずは空間  $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$  に群の作用を入れよう。考える群  $K$  は  $G(r, 1, n) \cong \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \wr S_n$  である。ここでは  $a_i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) および、 $\sigma \in S_n$  に対して、 $G(r, 1, n)$  の元を  $(a_1, a_2, \dots, a_n : \sigma)$  と書く。 $G(r, 1, n)$  が次のように作用する、

$$(a_1, a_2, \dots, a_n : \sigma)(x_1, \dots, x_n) = (a_1 + x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_n + x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

以下では、次の条件を仮定する

**Assumption 2.1.** 任意の  $a \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  に対して、

$$p(i, j) = p(a + i, a + j).$$

すると次が成り立つ

**Proposition 2.2.** Assumption 2.1 の下, 任意の  $K$  の元  $g$  と任意の  $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$  の元  $x, y$  に対して

$$P(gv, gw) = P(v, w)$$

が成り立つ.

さて, このことと, Theorem 1.3 を合わせて計算すると次のことがわかる.

**Theorem 2.3.**  $x_0 = (0, \dots, 0)$  と置く.  $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$  に対して,  $\ell_i = |\{j \mid x_i = j \ (1 \leq i \leq r-1)\}|$  と置くと,

$$P^{(N)}(x_0, x_N) = \frac{1}{r^n} \prod_{j=0}^{r-1} \left( \sum_{i=0}^{r-1} \zeta^{ij} t_i^N \right)^{\ell_i}$$

が成り立つ. ただし,  $\zeta$  は 1 の原始  $r$  乗根である. また,  $t_j$  は

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{r-1} \zeta^{ij} t_j$$

によって定める.

上の定理は, 多変数 Krawtchouk 多項式の定義 (母関数を) 考えることによって計算される. また,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^{(N)}(x_0, x_N) = 1/r^n$$

も示すことが出来る. このことによって, 全変動距離の評価等をするべきであるが, 現時点では良い評価を得ていない.

### 3 直積集合への群作用と確率

前節において述べられたことは,  $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$  という  $r$  元集合の  $n$  個の直積に環積が作用したことが本質的であった. さらに不変な作用を作るため, Assumption 2.1 の制限も必要であった. この節ではより一般に有限群  $G$  が与えられた  $r$  元集合  $X$  に推移的に作用しているとするとき,  $X$  の  $n$  個のコピー  $X^n = X \times X \times \dots \times X$  が  $G$  の選び方によってどのような  $G \wr S_n$  不変な確率空間と見なせるかを考えたい. ここで  $G \wr S_n$  の  $X^n$  への作用は

$$(g_1, g_2, \dots, g_n : \sigma)(x_1, \dots, x_n) = (g_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, g_2 x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, g_n x_{\sigma^{-1}(n)})$$

である.  $G$  の  $X$  の作用を  $\theta$  と書くと,  $\{\theta(g) \mid g \in G\} \subset \mathfrak{S}(X) \cong S_r$  (ここで  $\mathfrak{S}(X)$  は  $X$  上の対称群) である. したがってここでは忠実な作用を与える  $G$  つまり,  $S_r$  の部分群を考える.

### 3.1 Ehrenfest の拡散モデル (自由に出し入れ)

古典的には Ehrenfest の拡散モデルとは,  $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$  上の確率過程で  $v, w \in (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$  に対して  $v$  から  $w$  に移る確率を

$$p(v, w) = \begin{cases} \frac{1}{(r-1)^n}, & d(v, w) = 1 \\ 0 & d(v, w) \neq 1 \end{cases}$$

で与えたものである. これは「 $r$  個の壺があって, その中に  $n$  種類のボール (1 から  $n$  の番号で区別しよう) が散らばって入っており, 一回の操作でボールを一つ選び ( $1/n$  通り), 他の壺に移す ( $1/(r-1)$  通り) という試行を繰り返す確率過程と見なすことが出来る (どのボールがどの壺に入っているかを記録したものが  $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$  の元である). ここで,  $d(v, w) = |\{j \mid v_j \neq w_j\}|$  である. ここには前節と同様に  $G(r, 1, n)$  の作用を考えることも出来るが, より大きな群である  $\mathfrak{S}(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr S_n \cong S_r \wr S_n$  の作用を考えてやる方が良い. なぜなら, この作用によっても確率は不変であるばかりか,  $0 \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  の固定群として  $\mathfrak{S}(X \setminus \{0\}) \cong S_{r-1}$  を考えれば,  $(S_r, S_{r-1})$  は Gelfand ペアであり, なおかつ  $(S_r, S_{r-1})$  の帯球関数表は  $2 \times 2$  なので,  $(S_r \wr S_n, S_{r-1} \wr S_n)$  の帯球関数は一変数の Krawtchouk 多項式で与えられる. つまりわざわざ多変数のもので解析するのは無駄, ということである. また, この場合の完全な解析は [7] で行われている.

### 3.2 Ehrenfest の拡散モデル (壺の間の相互作用) [13]

では,  $G(r, 1, n)$  の作用を考えるのは全くの無駄なのだろうか, というとそうではなくてボールの移動に次のような制限をかけてみる:

制限: 壺は円を描いて並んでいる, そして取り出したボールは右隣の壺にしか入れてはいけない. これを式で書くと,

$$p(v, w) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & d(v, w) = 1 \text{ かつ } v_i \neq w_j \text{ なら } w_j = v_j + 1 \pmod{r} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

この場合は前述の  $S_r \wr S_n$  では群が大きすぎて不変な作用にはならない. しかし,  $G(r, 1, n)$  の作用なら不変である事がわかる. 従ってこの場合は多変数 Krawtchouk 多項式が必要である.

また, 別の制限

制限: 壺は円を描いて並んでいる, そして取り出したボールは右隣または左隣の壺にしか入れてはいけない.

を考える. 式で書くと,

$$p(v, w) = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & d(v, w) = 1 \text{ かつ } v_i \neq w_j \text{ なら } w_j = v_j \pm 1 \pmod{r} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

となるが、やはりこの場合も  $S_r \wr S_n$  の作用によって不変にはならない。では  $G(r, 1, n)$  の作用によってはどうかという、不変になる事がわかるのだが、このときはもっと良い作用があって、二面体群  $D_r = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^r = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 1 \rangle$  の  $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  への作用を

$$\begin{cases} \alpha(i) = i + 1 \\ \beta(i) = -i \end{cases}$$

と定めてやると、これを使って  $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$  に  $D_r \wr S_n$  の作用を定めることができる。また 0 の固定群  $\langle \beta \rangle$  を考えてやることでこの場合は Gelfand ペア  $(D_r \wr S_n, \langle \beta \rangle \wr S_n)$  がうまく機能する。こちらのペアの方が  $G(r, 1, n)$  に比べて指標表は半分ほど小さいことが重要である [1]。また、ちょっとした注意だが、 $r = 3$  のときは、3.1 節で考えた自由な出し入れそのものであるが、これは同型  $D_3 \cong S_3$  により、群論との整合性がある。

### 3.3 群 $G$ が統制するもの

上で Ehrenfest の拡散モデルにおいて  $G$  の選び方が実は相互作用を記述している、ということを観察した。ポーカー・ダイスゲームのところでの Assumption 2.1 もこの意味において緩和できるかもしれない（もっと面白いモデルになるかもしれない）。従って  $r$  を固定して考えるとき、 $S_r$  の部分群たちが確率論的にどのような意味を持っているのかをうまく記述できると良いと思う。

## 参考文献

- [1] H. Akazawa and H. Mizukawa, Orthogonal polynomials arising from the wreath products of dihedral group J. Combin. Theory Ser. A 104, (2003) pp. 371-380.
- [2] 青本-喜多, 超幾何関数論 (シュプリンガー現代数学シリーズ), シュプリンガー東京 (1994).
- [3] P. Diaconis, *Group Representation in Probability and Statistics*, IMS Lecture Notes-Monograph Series (1988).
- [4] R. C. Griffiths, Orthogonal polynomials on the multinomial distribution, Austral. J. Statist. 13 (1971), pp. 27-35.
- [5] A. Grünbaum and M. Rahman, On a family of 2-variable orthogonal Krawtchouk polynomials, SIGMA 6, 090 (2010), 12 pages.
- [6] A. Grünbaum and M. Rahman, A system of multivariable Krawtchouk polynomials and a probabilistic application, SIGMA 7, 119 (2011), 17 pages.



- [7] A. Hora, The Cut-Off Phenomenon for Random Walks on Hamming Graphs with Variable Growth Conditions, Publ. RIMS 33, 4(1997), pp. 695-710.
- [8] P. Iliev, A Lie theoretic interpretation of multivariate hypergeometric polynomials, Compos. Math. Vol. 148, 03 (2012), pp. 991-1002.
- [9] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue, arXiv math/9602214, (1996).
- [10] I.G.Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials 2nd.ed.*, Oxford Science Pub, (1995).
- [11] H. Mizukawa and H. Tanaka,  $(n+1, m+1)$ -hypergeometric functions associated to character algebras, Proc. AMS. 132 no. 9 (2004), pp. 2613-2618.
- [12] H. Mizukawa, Orthogonality relations for multivariate Krawtchouck polynomials, SIGMA 7, 017 (2011), 5 pages.
- [13] H. Mizukawa, Finite Gelfand pair approaches for Ehrenfest diffusion model, in progress.