数理解析研究所講究録
第 1870 巻 2013 年 98-105

$A_{2\ell}^{(2)}$ 型箙ヘッケ代数の表現型について*

大阪大学・情報科学研究科† 有木 進
Susumu Ariki
Dept. of Pure and Appl. Math.,
Grad. School of Info. Sci. & Tech.
Osaka University

§1. 序

著者は Lascoux-Leclerc-Thibon の仕事をきっかけに $A_{e-1}^{(1)}$ 型リー代数の可積分加群の圏化を 1990 年代に考え、とくにレベルが 1 より大きい場合に現れる円分ヘッケ代数のモジュラー表現論を研究してきた。その後、2000 年代に入って Khovanov-Lauda および Rouquier の仕事により箙ヘッケ代数が導入され、Brundan-Kleshchev により円分ヘッケ代数が円分箙ヘッケ代数の特別な場合であることが示された。すなわち、**圏化理論は円分箙ヘッケ代数**という新しい自己入射代数の族を与え、これらの代数はヘッケ代数の自然な拡張であるだけに研究に値すると思われるのである。

とくに、対称群に付随した有限ヘッケ代数の自然な拡張である $R^{\Lambda_0}(n)$ は、Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa のソリトン方程式の研究の中で現れたアフィンリー代数の理論と直接結びついており、圏化理論から得られる新しい証明手法と従来の有限次元代数の研究手法を融合させて円分箙ヘッケ代数の表現論を研究するという方向性に著者は魅力を感じている。たとえば、Chuang-Rouquier の sl_2-圏化定理を用いれば、$R^{\Lambda_0}(\beta)$ の安定 Auslander-Reiten 箙や表現型の決定は $R^{\Lambda_0}(k\delta)$ の場合の計算に帰着される。

対称群に付随した有限ヘッケ代数のブロック代数の表現型は [5] で決定されたので、$R^{\Lambda_0}(\beta)$ の表現型を与える定理を Erdmann-Nakano 型定理と呼ぶことにしよう。

〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1

著者は Euiyong Park 氏とともに、Erdmann-Nakano 型定理を与える一般的な証明の枠組みを与え、$A_{e-1}^{(1)}$ 型の場合、つまり対称群に付随した有限ヘッケ代数のブロック代数の場合、の別証明を与えるとともに、$A_{2\ell}^{(2)}$ 型の場合の $R^{\Lambda_0}(\beta)$ の表現型を決定した [1]。また証明の手法は一般に通用する枠組みを与えたとはいえ、型に応じて必要となる計算が違うので型ごとに計算を実行する必要があり、最近 [2] において $D_{\ell+1}^{(2)}$ の場合を解決した。今までのところ、暴表現型でない限り特殊双列代数 (special biserial algebra) になっており、安定 Auslander-Reiten 箙を完全に決定できる。

§2. 円分箙ヘッケ代数

ここでは円分箙ヘッケ代数の定義を簡単に復習する。以下、$\mathbf{k}$ は代数閉体でありすべての代数は $\mathbf{k}$ 上の有限次元代数である。

$(\mathsf{A},\mathsf{P},\Pi,\Pi^\vee)$ を Cartan データとし、$i,j\in I$ に対し次の形の 2 変数多項式 $\mathcal{Q}_{i,j}(u,v)$ を固定する。ただし、$t_{i,j;p,q}\in\mathbf{k}$ は $t_{i,j;-a_{ij},0}\neq 0$ と $\mathcal{Q}_{i,j}(u,v)=\mathcal{Q}_{j,i}(v,u)$ とする。

$$\mathcal{Q}_{i,j}(u,v)=\begin{cases}\sum_{p(\alpha_i|\alpha_i)+q(\alpha_j|\alpha_j)+2(\alpha_i|\alpha_j)=0}t_{i,j;p,q}u^pv^q & \text{if } i\neq j,\\ 0 & \text{if } i=j,\end{cases}$$

このとき、 支配的正重み $\Lambda\in\mathsf{P}^+$ に対し円分箙ヘッケ代数 $R^\Lambda(n)$ を生成元

$$\{e(\nu)\mid \nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)\in I^n\},\ \{x_k\mid 1\le k\le n\},\ \{\psi_l\mid 1\le l\le n-1\}$$

と次の基本関係で定める。まず、$1=\sum_{\nu\in I^n}e(\nu)$ は直交冪等元分解であり、さらに

$$x_ke(\nu)=e(\nu)x_k,\ x_kx_l=x_lx_k,$$
$$\psi_le(\nu)=e(s_l(\nu))\psi_l,\ \psi_k\psi_l=\psi_l\psi_k \text{ if } |k-l|>1,$$
$$\psi_k^2e(\nu)=\mathcal{Q}_{\nu_k,\nu_{k+1}}(x_k,x_{k+1})e(\nu),$$
$$(\psi_kx_l-x_{s_k(l)}\psi_k)e(\nu)=\begin{cases}-e(\nu) & \text{if } l=k \text{ and } \nu_k=\nu_{k+1},\\ e(\nu) & \text{if } l=k+1 \text{ and } \nu_k=\nu_{k+1},\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$
$$(\psi_{k+1}\psi_k\psi_{k+1}-\psi_k\psi_{k+1}\psi_k)e(\nu)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\mathcal{Q}_{\nu_k,\nu_{k+1}}(x_k,x_{k+1})-\mathcal{Q}_{\nu_k,\nu_{k+1}}(x_{k+2},x_{k+1})}{x_k-x_{k+2}}e(\nu) & \text{if } \nu_k=\nu_{k+2},\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$
$$x_1^{\langle h_{\nu_1},\Lambda\rangle}e(\nu)=0.$$

とくに $\Lambda = \Lambda_0$ のとき**有限箙ヘッケ代数**と呼ぶことにする。円分箙ヘッケ代数は下記により $\mathbb{Z}$-次数付代数になる。

$$\deg(e(\nu)) = 0, \quad \deg(x_k e(\nu)) = (\alpha_{\nu_k}|\alpha_{\nu_k}), \quad \deg(\psi_l e(\nu)) = -(\alpha_{\nu_l}|\alpha_{\nu_{l+1}}).$$

次に $\beta = \sum_{i=0}^{\ell} n_i\alpha_i \in \mathsf{Q}^+$ を $\sum_{i=0}^{\ell} n_i = n$ 個の単純ルートの和とし、

$$I^\beta = \{\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in I^n \mid \alpha_{\nu_1} + \cdots + \alpha_{\nu_n} = \beta\}$$

$$e(\beta) = \sum_{\nu \in I^\beta} e(\nu)$$

とおく。$e(\beta)$ は $R^\Lambda(n)$ の中心冪等元である。次の代数が主たる興味の対象である。

定義 1 $R^{\Lambda_0}(\beta) = R^{\Lambda_0}(n)e(\beta)$

$A_\ell^{(1)}$ 型のとき $R^{\Lambda_0}(\beta)$ は対称群に付随した有限ヘッケ代数のブロック代数になるので $R^{\Lambda_0}(\beta)$ はブロック代数の自然な拡張であるが、$e(\beta)$ がつねに原始中心冪等元かどうかはわかっていない。ただし、今まで計算した例ではすべて直既約代数になっている。

§3. 主結果 — Erdmann-Nakano 型定理—

e-core と e-weight の一般化として、任意の $\beta \in \mathsf{Q}^+$ は $\kappa \in \mathsf{W}\Lambda_0$ と $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて

$$\beta = \Lambda_0 - \kappa + k\delta$$

とただひと通りに表わすことができることに注意しておく。下記が主結果である。

定理 2 $\ell \geq 1$ とする。$A_{2\ell}^{(2)}$ 型 $R^{\Lambda_0}(\beta)$ の表現型は次で与えられる。

(1) $k = 0$ ならば単純代数である。
(2) $k = 1$ ならば Brauer 木代数であり、半単純でない有限表現型。
(3) $k \geq 2$ なら暴表現型である。
(4) 順表現型は現れない。

定理 3 $\ell \geq 2$ とする。$D_{\ell+1}^{(2)}$ 型 $R^{\Lambda_0}(\beta)$ の表現型は次で与えられる。

(1) $k = 0$ ならば単純代数である。
(2) $k = 1$ ならば $\mathbf{k}[x]/(x^2)$ 上の行列代数に同型で、半単純でない有限表現型。
(3) $k = 2$ ならば対称特殊双列代数であり、順表現型である。
(4) $k \geq 3$ ならば暴表現型である。

§4. 特殊双列代数の安定 Auslander-Reiten 箙

前節のふたつの定理に現れた Brauer 木代数と対称特殊双列代数の直既約加群は分類できる。なぜならこれらの代数の安定 Auslander-Reiten 箙は記述可能だからである。

まず対称 Brauer 木代数から始めよう。対称 Brauer 木代数も対称特殊双列代数であるが、ここで重要なのは対称 Brauer 木代数は対称中山代数に導来圏同値であることである。このことより、安定 Auslander-Reiten 箙は対称中山代数に対して計算すればよいことがわかる。まず論文 [1] より次の結果を引用する。

命題 4 定理 2(2) の Brauer 木は次の形である。

$$\underset{e=2}{\bullet}\;\overset{S_0}{\text{———}}\;\circ\;\overset{S_1}{\text{———}}\;\circ\;\text{——}\cdots\cdots\text{——}\;\circ\;\overset{S_{\ell-2}}{\text{———}}\;\circ\;\overset{S_{\ell-1}}{\text{———}}\;\circ\,.$$

よって、計算すべき対称中山代数の Brauer 木を $T=(V,E)$ とすると、T は

(a) $V=\{S,T_1,\ldots,T_\ell\}$ が頂点集合

(b) $E=\{ST_i \mid 1\le i\le \ell\}$ が辺集合

で与えられる星型木であり、中心 S に重複度 $e=2$ の例外頂点を持つ。これは長さ ℓ の巡回箙 Q に対し始点 i、終点 $i+1$ の有向辺を α_i としたとき、道代数 $\mathbf{k}Q$ に

$$(\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{i-1})^{e\ell}\alpha_i=0 \quad (\forall i\in\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$$

という関係式を入れた代数に他ならない。このとき、

$$M_i^{(j)}=P_i/\operatorname{Soc}^j(P_i) \quad (1\le j\le 2\ell)$$

が非射影加群の同型類の完全代表系であり、概分裂完全系列が

$$0\to M_{i+1}^{(j)}\to M_i^{(j-1)}\oplus M_{i+1}^{(j+1)}\to M_i^{(j)}\to 0$$

で与えられるので、定理 2(2) の $R^{\Lambda_0}(\beta)$ $(\beta=\Lambda_0-\kappa+\delta)$ の安定 Auslander-Reiten 箙が $\mathbb{Z}A_{2\ell}/\langle\tau^\ell\rangle$ と分かる。ただし、$\tau=D\mathrm{Tr}$ である。

次に $D_{\ell+1}^{(2)}$ 型 $R^{\Lambda_0}(\beta)$ が順表現型の場合に安定 Auslander-Reiten 箙を決定しよう。

まず一般論を復習する。A を自己入射特殊双列代数とすると、$A/\operatorname{Soc}(A)$ は紐代数であり、A の安定 Auslander-Reiten 箙は $A/\operatorname{Soc}(A)$ の Auslander-Reiten 箙に一致する。

そして直既約 $A/\operatorname{Soc}(A)$-加群は帯加群または紐加群で、帯加群はすべて同次筒連結成分 $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau\rangle$ に属する。そして、無限表現型の場合は、紐加群の属する連結成分は有限個の非同次筒 $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau^r\rangle$ $(r>1)$ を除けば A_∞^∞/G の形であって、より詳しくは次の 2 定理が成り立つ。

定理 5　[6, Thm.2.1] A が無限表現型特殊双列代数で、多項式増大とすると、安定 Auslander-Reiten 箙は m 個の $\mathbb{Z}\tilde{A}_{p,q}$ の連結成分、m 個の非同次筒連結成分 $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau^p\rangle$ と m 個の非同次筒連結成分 $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau^q\rangle$ を持ち、それ以外は無限個の同次筒連結成分 $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau\rangle$ である。ただし、m,p,q は正整数である。

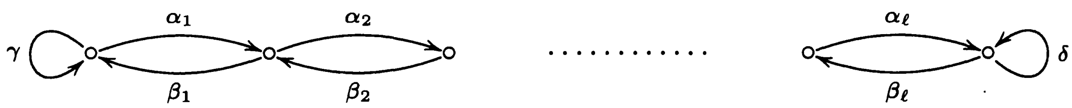
定理 6　[6, Thm.2.2] A が無限表現型特殊双列代数で、多項式増大でないとすると、安定 Auslander-Reiten 箙は有限個の非同次筒連結成分 $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau^n\rangle$ を持ち、それ以外は無限個の同次筒連結成分 $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau\rangle$ と無限個の A_∞^∞ 型連結成分である。

無限表現型特殊双列代数は順表現型であるから、各自然数 d に対して有限個の $(A,\mathbf{k}[x])$-両側加群が存在して、有限個の d 次元直既約加群を除けば、すべての d 次元直既約加群はこれらの両側加群が定める一変数加群族のどれかに属する。この両側加群が最低 $\mu(d)$ 個必要だとしよう。定理 5、定理 6 における多項式増大とは次の意味である。

定義 7　$\mu(d)$ が多項式増大のとき、順表現型代数 A は**多項式増大**であるという。

以下 $D_{\ell+1}^{(2)}$ 型 $R^{\Lambda_0}(\beta)$ が順表現型の場合は多項式増大ではないことを示し、さらに周期加群を分類し周期を決定する。まず論文 [2] より次の結果を引用する。

命題 8　定理 3(3) の特殊双列代数の有向グラフは次の形であり、



関係式は下記の通りである。

$$\begin{gathered}\gamma\alpha_1=0,\ \ \beta_1\gamma=0,\ \ \gamma^2=\alpha_1\beta_1,\quad \alpha_\ell\beta_\ell=0,\ \ \delta^2=0,\\ \beta_i\alpha_i=\alpha_{i+1}\beta_{i+1}\ \ (1\le i\le \ell-2),\\ \alpha_i\alpha_{i+1}=0,\ \ \beta_{i+1}\beta_i=0\ \ (1\le i\le \ell-1),\\ \beta_{\ell-1}\alpha_{\ell-1}=\alpha_\ell\delta\beta_\ell,\ \ \delta\beta_\ell\alpha_\ell=\beta_\ell\alpha_\ell\delta.\end{gathered}$$

よって、$B = A/\operatorname{Soc}(A)$ は次の関係式で定まる紐代数である。

$$
\begin{aligned}
\gamma^2 = 0,\ \ \gamma\alpha_1 = 0,\ \ \beta_1\gamma &= 0,\\
\alpha_i\beta_i &= 0 \quad (1 \leq i \leq \ell),\\
\beta_i\alpha_i &= 0 \quad (1 \leq i \leq \ell - 1),\\
\alpha_i\alpha_{i+1} &= 0 \quad (1 \leq i \leq \ell - 1),\\
\beta_{i+1}\beta_i &= 0 \quad (1 \leq i \leq \ell - 1),\\
\delta\beta_\ell\alpha_\ell = \beta_\ell\alpha_\ell\delta = 0,\ \ \alpha_\ell\delta\beta_\ell &= 0,\ \ \delta^2 = 0.
\end{aligned}
$$

補題 9　定理 3(3) の特殊双列代数は多項式増大でない。

上記の定理 [6, Thm.2.1, 2.2] には多項式増大でないことと下記で述べる原始的紐語の同値類が無限個あることが同値であることも述べられており、補題 9 を示すには原始的語の同値類が無限個あることを示せばよい。そこで、上でも少し触れた紐代数の直既約加群の分類をもう少し詳しく復習しよう。この組合せ論的記述の背景には被覆理論を用いた美しい表現論的理解が存在することを注意しておく。さて、$B = \mathbf{k}Q/I$ を紐代数とし、

$$\{\alpha^{\pm} \mid \alpha \text{ は } Q \text{ の有向辺 }\}$$

をアルファベットとする有限長の語 $w = w_1 \ldots w_n$ を考える。w が**紐語**とは

(i) w_i の終点と w_{i+1} の始点は一致する。
(ii) $w_i \cdots w_j = \alpha_i^+ \cdots \alpha_j^+$ ならば $\alpha_i \cdots \alpha_j \notin I$ である。
(iii) $w_i \cdots w_j = \alpha_i^- \cdots \alpha_j^-$ ならば $\alpha_j \cdots \alpha_i \notin I$ である。
(iv) $(w_i, w_{i+1}) = (\alpha^{\pm}, \alpha^{\mp})$ は現れない。

を満たすときをいう。また、以上に加えて各頂点ごとにただひとつ紐語があると考える。

紐語全体のなす集合に $w \sim w^{-1}$ により同値関係を入れる。すると、異なる同値類に非同型な直既約加群が対応するように、**紐加群** $M(w)$ を定義できる。紐加群の次元は $\dim M(w) = n + 1$ であるから、次元 d を固定したときの紐加群の個数は有限個である。とくに多項式増大かどうかの判定には関係しない。

紐語 w が**巡回的**とは、w_1 の始点と w_n の終点が一致していて、しかも w^n $(n \geq 1)$ がすべて紐語になっているときをいう。また、巡回的紐語 w が**原始的紐語**とは、別の語 u があって、$w = u^m$ と書けるのは $w = u, m = 1$ のときに限るときをいう。

原始的紐語全体のなす集合に $w \sim w^{-1}$ と $w_1 \ldots w_n \sim w_2 \cdots w_n w_1$ の 2 つが生成する同値関係を入れる。すると、同値類ごとに $(\mathbf{k}Q/I, \mathbf{k}[X, X^{-1}])$-両側加群が構成されて、

$\mathbf{k}[X, X^{-1}]/(X-\lambda)^m$ ($\lambda \in \mathbf{k}$) をテンソル積すると一変数直既約加群族が定まる。これらの直既約加群族に現れる加群が**帯加群**であり、異なる同値類から同型な直既約加群が得られることはないことが知られている。これら一変数直既約加群族の個数が一定であることと多項式増大であることが実は一致しており、そのため原始的紐語の同値類の個数が無限だと多項式増大にならないことがわかるのである。さて、準備ができたので補題 9 を証明しよう。

(証明) 紐語 a と b を次のように定める。

$$a = \delta\alpha_\ell^{-1}\beta_\ell^{-1},\ \ b = \delta\alpha_\ell^{-1}\beta_{\ell-1}\cdots\alpha_2^{-1}\beta_1\gamma^{-1}\alpha_1\beta_2^{-1}\cdots\alpha_{\ell-1}\beta_\ell^{-1} \qquad (\ell\text{ が偶数のとき})$$

$$a = \delta^{-1}\beta_\ell\alpha_\ell,\ \ b = \delta^{-1}\beta_\ell\alpha_{\ell-1}^{-1}\cdots\alpha_2^{-1}\beta_1\gamma^{-1}\alpha_1\beta_2^{-1}\cdots\alpha_\ell \qquad (\ell\text{ が奇数のとき})$$

q が素数ならば $\{x_1\cdots x_q \mid x_i = a \text{ or } b\} \setminus \{a^q, b^q\}$ が $(2^q-2)/q$ 個の原始的紐語の同値類を与えることが簡単に証明できるから、[12, Lem.1] と同様の議論で $\mu(d)$ が多項式増大にならないことがわかる。(証明了)

最後に非同次筒の個数と周期を決定する。そのためには非同次筒の境界に属する紐加群を考えればよく、言い換えれば、中央項が直既約になる概分裂完全系列に現れる紐加群を見ればよい。紐加群の概分裂完全系列の記述によれば、このような紐加群は

$$\{Be_i/B\alpha \mid \alpha\text{ は有向辺、}i\text{ は }\alpha\text{ の終点}\}$$

であり、有向辺の個数だけある。さらに、$Be_i/B\alpha = M(u)$ および $\tau(Be_i/B\alpha) = M(v)$ と紐加群として表示したとき、次の概分裂完全系列を得る。

$$0 \to M(v) \to M(u\alpha^{-1}v) \to M(u) \to 0.$$

まず、$Be_\ell/B\delta$ は特別で同次筒に属する。実際、$Be_\ell \to Be_\ell$ を $x \mapsto x\delta$ として、

$$Be_\ell \to Be_\ell \twoheadrightarrow Be_\ell/B\delta = \frac{\langle e_\ell, \delta, \alpha_\ell, \beta_\ell\alpha_\ell, \alpha_\ell\delta\rangle_{\mathbf{k}}}{\langle \delta, \alpha_\ell\delta\rangle_{\mathbf{k}}} = M(\beta_\ell\alpha_\ell)$$

が $Be_\ell/B\delta$ の射影分解を与えるから、定義に従って計算すれば $\tau(M(\beta_\ell\alpha_\ell)) \simeq M(\beta_\ell\alpha_\ell)$ を得る。次に $Be_0/B\gamma$ の τ-軌道を計算すると、周期は $2\ell+1$ で残りの $Be_i/B\alpha$ ($\alpha \neq \delta$) をすべて通る。とくに非同次筒はただひとつである。以上から次の結論を得る。

命題 10 $\ell \geq 2$ とし、$D_{\ell+1}^{(2)}$ 型有限箙ヘッケ代数 $R^{\Lambda_0}(\beta)$ が順表現型とすると、$R^{\Lambda_0}(\beta)$ の安定 Auslander-Reiten 箙の連結成分は次のどれかである。

(i) ただひとつ存在する非同次筒 $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau^{2\ell+1}\rangle$

(ii) 無限個存在する同次筒 $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau\rangle$

(iii) 無限個存在する $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$

参考文献

[1] S. Ariki and E. Park, *Representation type of finite quiver Hecke algebras of type* $A_{2\ell}^{(2)}$, arXiv:1208.0889.

[2] S. Ariki and E. Park, *Representation type of finite quiver Hecke algebras of type* $D_{\ell+1}^{(2)}$, in preparation.

[3] J. Brundan and A. Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras*, Invent. Math. **178** (2009), 451-484,

[4] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, and T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations. Euclidean Lie algebras and reduction of the KP hierarchy*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), no. 3, 1077–1110.

[5] K. Erdmann and D. K. Nakano, *Representation type of Hecke algebras of type A*, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), 275–285.

[6] K. Erdmann and A. Skowroński, *On Auslander-Reiten components of blocks and self-injective biserial algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **330** (1992), 165–189.

[7] S.-J. Kang and M. Kashiwara, *Categorification of Highest Weight Modules via Khovanov-Lauda-Rouquier Algebras*, Invent. Math. **190** (2012), no. 3, 699–742.

[8] M. Kashiwara, *Biadjointness in cyclic Khovanov-Lauda-Rouquier Algebras*, arXiv:1111.5898 (2011).

[9] M. Khovanov and A. D. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I*, Represent. Theory **13** (2009), 309–347.

[10] M. Khovanov and A. D. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 5, 2685–2700.

[11] R. Rouquier, *2 Kac-Moody algebras*, arXiv:0812.5023 (2008).

[12] A. Skowroński, *Group algebras of polynomial growth*, Manuscr. Math., **59** (1987), 499–516.

[13] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Canonical bases and KLR algebras*, J. Reine Angew. Math. **659** (2011), 67–100.