数理解析研究所講究録
第 1871 巻 2013 年 6-17

Periods of automorphic forms: the case of $(\mathrm{U}_{n+1} \times \mathrm{U}_n, \mathrm{U}_n)$

九州大学大学院数理学研究院　山名俊介 (Shunsuke Yamana)
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1　保型形式の周期と L 函数とリフティング

H を代数体 F 上の簡約代数群, H' を H の F 上の代数的閉部分群とする. F のアデール環を $\mathbb{A}=\mathbb{A}_F$ で表す. $H'(\mathbb{A})$ の指標 χ は $\chi(H'(F))=1$ を満たすとする. π を H 上の保型形式の空間の既約部分表現, V_π を π を実現する保型形式の空間とするとき, 積分

$$\mathbf{P}^{H',\chi}(f)=\int_{H'(F)\backslash H'(\mathbb{A})} f(h)\chi(h)dh$$

により定義される線型形式 $P^{H',\chi}: V_\pi \to \mathbb{C}$ を (H',χ) 周期と呼ぶ. π が尖点的保型表現ならば, この積分は普通収束する. アイゼンシュタイン級数のようなより一般的な保型形式に対しては, 収束するとは限らない. しかし, 収束しなくても, 適当に regularize すれば, 積分の意味付けができることもある (例えば, [15, 19, 22, 12] などを参照). 任意の $f \in \pi$ に対して, $\mathbf{P}^{H',\chi}(f)$ が収束するとき,

$$\mathbf{P}^{H',\chi} \in \mathrm{Hom}_{H'(\mathbb{A})}(\pi, \chi^{-1})$$

である. 線形汎函数 $\mathbf{P}^{H',\chi}$ が V_π 上 0 でないとき, π を (H',χ)-distinguished と呼ぶ. $\chi=1$ のときには, 略して $\mathbf{P}^{H'}$ と書いたり, H'-distinguished と言う. F の素点 v に対して, χ の $H(F_v)$ への制限を χ_v と書く. $H(F_v)$ の既約許容表現 σ は, $\mathrm{Hom}_{H'(F_v)}(\sigma, \chi_v^{-1}) \neq 0$ であるとき, (H',χ_v)-distinguished と呼ぶ. 保型表現 π が (H',χ)-distinguished ならば, 任意の素点 v に対して, その局所成分 π_v も (H',χ_v)-distinguished である. しかし, 全ての素点で局所成分 π_v が (H',χ)-distinguished でも π が (H',χ)-distinguished であるとは一概に言えない. もし任意の素点で $\mathrm{Hom}_{H'(F_v)}(\pi_v, \chi_v^{-1}) \leq 1$ ならば, $\mathrm{Hom}_{H'(\mathbb{A})}(\pi, \chi^{-1}) \leq 1$ であり, 純テンソル $f=\otimes_v f_v$ に対して, 周期は

$$\mathbf{P}^{H',\chi}(f)=\prod_v \mathbf{P}^{H',\chi_v}(f_v)$$

のように分解するはずであり, $\mathbf{P}^{H',\chi_v}$ は $\mathrm{Hom}_{H'(F_v)}(\pi_v, \chi_v^{-1})$ の元を与え, 局所体上の簡約群の既約表現の分岐則を研究する上でも重要であろう. この上, 保型形式の周期はしばしば, 保型 L 函数の特殊値やリフティングと関係し, 保型表現や保型 L 函数の理論で重要な役割を果たす.

例 1　$\pi = \pi_1 \boxtimes \pi_2$ を $H = \mathrm{GL}_{n+1} \times \mathrm{GL}_n$ の既約尖点的保型表現とし

$$H' = \Delta(\mathrm{GL}_n) = \{(g,g) \in H \mid g \in \mathrm{GL}_n\}$$

とする. H の尖点的保型形式の H' 周期は, Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika による H の保型 L 函数の積分表示を使って表される. その結果, π が H'-distinguished であることと保型 L 函数の中心特殊値 $L(1/2, \pi_1 \times \pi_2)$ が 0 でないことが同値であること分かる (詳しくは, [5] などを参照). 筆者と市野篤史氏 [12] は, この場合に周期積分の regularization を構成し, Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika の理論を任意の保型形式に拡張した (詳しくは市野氏の原稿参照).

例 2　$H = \mathrm{GL}_{2n}$, $H' = Sp_{2n}$ を階数 n のシンプレクティック群のときを考える. シンプレクティック周期は多くの場合に収束する. Jacquet, Lapid, Rogawski の構成法 [15, 19] を真似て, Offen [22] はシンプレクティック周期の regularization を構成している.

$$\mathrm{GL}_m(\mathbb{A})^1 = \{g \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{A}) \mid |\det h| = 1\}$$

とおく. d を N の約数, $N = dm$ とおき, σ を $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A})^1$ の既約尖点的保型表現, P を GL_N の $(m, \ldots, m)$ 型の放物型部分群とするとき, 誘導表現

$$\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{\mathrm{GL}_N(\mathbb{A})}(\sigma|\det|^{(d-1)/2} \otimes \sigma|\det|^{(d-3)/2} \otimes \cdots \otimes \sigma|\det|^{(1-d)/2})$$

の唯一の既約商を $Sp(\sigma, d)$ と表す. 次の分解

$$L^2_{\mathrm{disc}}(H(F)\backslash H(\mathbb{A})^1) = \oplus_{m \geq 1,\ d \geq 1,\ md = 2n} \oplus_\sigma Sp(\sigma, d)$$

が成り立つ (詳しくは, [20] を参照). 離散的保型表現 $Sp(\sigma, d)$ が distinguished であるための必要十分条件は d が偶数であることである (詳しくは, [16, 22, 23] を参照). この結果は筆者 [25] により連続スペクトラムに拡張されている.

例 3　E を代数体 F の二次拡大, $H' = \mathrm{U}(V)$ を E 上 n 次非退化エルミート空間 V のユニタリ群, $H = \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n$ を E 上の n 次一般線形群の F への Weil の係数制限とする. このとき, ある V が存在して, H の既約尖点的保型表現 π が $\mathrm{U}(V)$-distinguished であるための必要十分条件は π が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の既約尖点的保型表現からのベースチェンジリフトであることである (詳しくは, [14] などを参照). ユニタリ周期の regularization は Jacquet, Lapid, Rogawski [15, 19] がより一般的設定で構成している. 即ち, 彼らは, $H = \mathrm{Res}_{E/F}H'$ の関係にある場合に周期積分の regularization を構成している.

例 4　E を代数体 F の二次拡大, $\delta_{E/F}$ を $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の E に対応する二次指標とする. $H = \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n$, H' を F 上の n 次一般線形群とするとき, Flicker と Rallis は以下の例 3 と対照的な予想を提出した.

Flicker-Rallis 予想 ([4, 26]). π が H の既約尖点的保型表現であるとき, 以下の二条件は同値である:

- π は $(H', \delta_{E/F}^n \circ \det)$-distinguished;
- π はあるユニタリ群の既約尖点的保型表現の弱ベースチェンジリフトである.

例 5 V を非退化エルミート形式付き空間, V' をその余次元 1 の非退化部分空間とする. $H = \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(V')$ と $H' = \Delta(\mathrm{U}(V'))$ などの場合に, Gross と Prasad は以下の予想を提出した.

大域 Gan-Gross-Prasad 予想 ([9, 11, 5]). $\Pi = \pi \otimes \pi'$ が H の既約緩増加尖点的保型表現であるとき, 以下の二条件は同値である:

- $L(1/2, \pi \times \pi') \neq 0$;
- 非退化エルミート形式付き空間の組 $W' \subset W$ と $\Delta(\mathrm{U}(W'))$-distinguished な $\mathrm{U}(W) \times \mathrm{U}(W')$ の保型表現 Π' が存在して, ほとんど全ての素点 v で Π_v と Π'_v は同型である.

この予想はユニタリ群以外の古典群に対しても定式化されている. 例 1 は Gan-Gross-Prasad 予想の一般線形群での類似である. 大域 Gan-Gross-Prasad 予想は, Wei Zhang により以下の条件下に証明された ([26, 27] を参照):

(i) 全ての F のアルキメデス素点は E で分裂する.

(ii) 二つの E で分裂する F の非アルキメデス素点が存在して, π のそれらの素点での局所成分は超尖点的である.

本稿では例 5 の場合に regularized 周期を構成し, アイゼンシュタイン級数の regularized 周期を計算する. さらにアイゼンシュタイン級数の留数の周期を計算し, Gan-Gross-Prasad 予想に応用する. 以下の定理が証明される:

定理 1.1. *H が準分裂的であり, $\Pi = \pi \otimes \pi'$ が H の既約大域的生成的尖点的保型表現であるとき, Π が H'-distinguished ならば, $L(1/2, \pi \times \pi') \neq 0$.*

注意 1.2. (1) 既約大域的生成的尖点的保型表現は $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{A}_E) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ の既約保型表現へのベースチェンジを持つことが証明されている ([18, 3, 10] などを参照). ベースチェンジが尖点的保型表現であるとき安定的, そうでないとき内視的と呼ばれる.

(2) (ii) を仮定すれば, Π は安定的になる. 周期と内視的保型表現の関係は重要であり, Wei Zhang の研究の条件を外すことは重要な問題である.

(3) Ginzburg と Jiang と Rallis [6, 7, 8] は, Π が安定的であるときに, 定理 1.1 を証明した. 彼らの手法を regularized 周期の理論を用いて一般化することで, 定理 1.1 が証明される.

2 設定

最初に以下で用いる記号をまとめておく. 本稿の全ての代数群は F 上定義される. G を連結簡約代数群, P をその放物型部分群とし, M をその Levi 部分群, U をそのべき単根基とする. $X^*(M)$ を M の F 上代数的指標からなる自由 $\mathbb{Z}$ 加群とし,

$$\mathfrak{a}_P^* = \mathfrak{a}_M^* = X^*(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \qquad \mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(M), \mathbb{R})$$

とおく. $\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{a}_P^* \times \mathfrak{a}_P \to \mathbb{R}$ を標準的ペアリングとする. G の F 上の極小放物型部分群 P_0 とその Levi 分解 $P_0 = M_0U_0$ を固定する. G の放物型部分群 P は P_0 を含むとき標準的と呼ばれ, M_0 を含む G の Levi 部分群は標準的と呼ばれる. $G(\mathbb{A})$ の良い極大コンパクト部分群 K を固定し, 岩澤分解を使って, $G(\mathbb{A})$ の左 $U(\mathbb{A})$ 不変, 右 K 不変な $\mathfrak{a}_P$ 値函数 H_P が次の条件から一意的に定まる:

$$e^{\langle\chi, H_P(m)\rangle} = |\chi(m)| \qquad (\chi \in X^*(M),\ m \in M(\mathbb{A})).$$

さらに, $M(\mathbb{A})^1 = \{m \in M(\mathbb{A}) \mid H_P(m) = 0\}$ とおく.

簡明のために, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{P_0}$, $\mathfrak{a}_0^* = \mathfrak{a}_{P_0}^*$ とおく. 標準的分解

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_P \oplus \mathfrak{a}_0^P, \qquad \mathfrak{a}_0^* = \mathfrak{a}_P^* \oplus (\mathfrak{a}_0^P)^*$$

が成り立つ. X_P と X^P は $X \in \mathfrak{a}_0$ の $\mathfrak{a}_P$ と $\mathfrak{a}_0^P$ への射影を表す. $\mathfrak{a}_0^*$ についても同様である.

$\mathscr{A}_P(G)$ を $P(F)U(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ の保型形式の空間とし, その部分空間を

$$\mathscr{A}_P^1(G) = \{\varphi \in \mathscr{A}_P(G) \mid g \in G(\mathbb{A}) \text{ と } a \in A_P \text{ に対して} \varphi(ag) = e^{\langle\rho_P, H_P(a)\rangle}\varphi(g)\}$$

により定義する. $\mathscr{A}_P^c(G)$ を $\mathscr{A}_P^1(G)$ の尖点形式の空間とする. M の保型表現 π に対して, $\mathscr{A}_P^\pi(G)$ を任意の $k \in K$ に対して, 函数 $m \mapsto e^{-\langle\rho_P, H_P(m)\rangle}\varphi(mk)$ が π に属するような保型形式 $\varphi \in \mathscr{A}_P(G)$ の空間とする. $P = G$ のとき, 添え字 P は省くことにする. P に含まれる任意の放物型部分群 $Q = LV$ に対して, φ の Q に添っての定数項 φ_Q は次の積分で定義される滑らか函数 $\varphi : P(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ である:

$$\varphi_Q(g) = \int_{V(F)\backslash V(\mathbb{A})} \varphi(vg)dv.$$

写像 $\varphi \mapsto \varphi_Q$ は空間 $\mathscr{A}_P(G)$ を空間 $\mathscr{A}_Q(G)$ に写す. 保型形式 $\varphi \in \mathscr{A}_P(G)$ は分解

$$\varphi(uamk) = \sum_i Q_i(H_P(a))\psi_i(mk)e^{\langle\lambda_i+\rho_P, H_P(a)\rangle}$$

を持つ. ここで, $u \in U(\mathbb{A})$, $a \in A_P$, $m \in M(\mathbb{A})^1$, $k \in K$, $Q_i \in \mathbb{C}[\mathfrak{a}_P]$, $\psi_i \in \mathscr{A}_P^1(G)$, $\lambda_i \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ である. この分解に現れる λ_i を φ の指数と呼ぶ. $Q \subset P$ のとき, φ_Q の指数の集合を $\mathscr{E}_Q(\varphi)$ で表し, 尖点的指数の集合を $\mathscr{E}_Q^{\mathrm{cusp}}(\varphi)$ により表す.

Δ_P を G のシンプルルートの $\mathfrak{a}_P$ への制限の中で 0 でないものからなる集合とし, $\Delta_P^\vee$ を G のシンプルコルートの $\mathfrak{a}_P^*$ への制限の中で 0 でないものからなる集合とする. これらはそれぞれ $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ は $\mathfrak{a}_P^G$ の基底である. $\hat{\Delta}_P$ を $\Delta_P^\vee$ の双対基底とする. 以上の記号のより詳しい説明は [20] を参照.

E を F の二次拡大, $\mathbb{A}_E$ をそのアデール環, $x \mapsto \bar{x}$ は E の F 上非自明な自己同型とする. E 上の有限次元ベクトル空間 X に対して, X の E 上の自己同型群を $\mathrm{GL}(X)$ と表し, F 上の代数群と見做す. 従って, X が a 次元のとき, $\mathrm{GL}(X)$ は E 上の一般線形群 GL_a の F への Weil の係数制限 $G_a = \mathrm{R}_{E/F}\mathrm{GL}_a$ に同型である.

エルミート形式 $(\ ,\ )$ とは, 列ベクトル空間 $V = E^{n+1}$ 上定義された F 上双線形形式であり, 以下が成り立つものとする:

$$(ax, by) = \bar{a}b(x, y), \qquad (x, y) = \overline{(y, x)} \qquad (a, b \in E;\ x, y \in V).$$

さらに $(x,V)=0$ ならば $x=0$ が成り立つとき, 非退化と呼ぶ. $(V,(\ ,\ ))$ のユニタリ群を $G=G(V)$ で表す. V の非等方的ベクトル e を選び, V' を e の生成する部分空間の直交補空間とする. $(\ ,\ )$ を V' に制限して得られるエルミート形式も同じ記号で表す. V' は n 次元非退化エルミート空間である. G' を V' のユニタリ群とする. V の Witt 指数を r, V' の Witt 指数を r' で表す.

注意 2.1. 明らかに $r'\le r\le r'+1$ である. $r=r'+1$ となるための必要十分条件は, $(x,x)=-(e,e)$ を満たす $x\in V'_{r'}$ が存在することである.

以下では常に, $r>0$ を仮定する. V' の極大等方的部分空間 X' と Y' をエルミート形式 $(\ ,\ )$ の制限が X' と Y' の非退化な pairing を定めるように選ぶ. X' の基底 $\{e_1,\dots,e_{r'}\}$ を固定し, $\{f_1,\dots,f_{r'}\}$ を Y' の双対基底とする. $a\le r'$ に対して, X'_a を $e_1,\dots,e_a$ により生成される部分空間とし, Y'_a を $f_1,\dots,f_a$ により生成される部分空間とする.

$$V'_a=\{v\in V'\mid \langle v,x\rangle=\langle v,y\rangle=0\ (x\in X'_a,\ y\in Y'_a)\},$$
$$\mathbf{V}_a=\{v\in V\mid \langle v,x\rangle=\langle v,y\rangle=0\ (x\in X'_a,\ y\in Y'_a)\}$$

とおけば, Witt 分解

$$V'=X'_a\oplus V'_a\oplus Y'_a,\qquad\qquad V=X'_a\oplus\mathbf{V}_a\oplus Y'_a$$

が成り立つ.

$$P'_a=\{g\in G'\mid gX'_a=X'_a\}$$

は G' の極大放物型部分群であり, P'_a の Levi 部分群は G_a と V'_a のユニタリ群 $\mathcal{G}'_a=G(V'_a)$ の直積に同型である.

より一般に G' の標準的放物型部分群と標準的 Levi 部分群は $a_l\le r'$ を満たす狭義単調増大非負整数列 $\mathbf{a}=(0,a_1,\dots,a_l)$ と一対一に対応する. 即ち, G' の標準的放物型部分群 $P'_{\mathbf{a}}$ を以下のように定義する:

$$P'_{\mathbf{a}}=\{g\in G'\mid gX'_{a_i}=X'_{a_i}\ \text{for}\ 1\le i\le l\}.$$

一方, G に対しても標準的放物型部分群 $\mathbf{P_a}$ を

$$\mathbf{P_a}=\{g\in G\mid gX'_{a_i}=X'_{a_i}\ \text{for}\ 1\le i\le l\}$$

により定義する. $\mathbf{c}=(0,1,2,\dots,r')$ として, $\mathbf{B}=\mathbf{P_c}$ とおく. 写像

$$\mathbf{P}\mapsto P'=\mathbf{P}\cap G'$$

は, G の $\mathbf{B}$ を含む放物型部分群と G' の標準的放物型部分群の間の一対一対応を与える. $\mathcal{W}'_a$ を放物型部分群 $P'_{(0,1,2,\dots,a)}$ のべき単根基とする.

3 Regularization

例 5 の周期積分はアイゼンシュタイン級数などの保型形式に対しては一般に収束しないので, 発散する積分をどのように意味付けるかが問題になる. そこで例 3 に

言及した Jacquet, Lapid, Rogawski [15, 19] による周期積分の regularization を $H = G \times G'$ の $H' = G'$ の場合に拡張する. それは以下で見るように容易である.

$$(\mathfrak{a}_0')^+ = \{X \in \mathfrak{a}_0' \mid \text{ 全ての } \alpha \in \Delta_{B'} \text{ に対して } \langle \alpha, X \rangle > 0\}$$

とおく. $\tau_{P'}$ を次の部分集合の定義函数とする:

$$\{X \in \mathfrak{a}_0' \mid \alpha \in \Delta_{P'} \text{ に対して } \langle \alpha, X \rangle > 0\}$$

$\hat{\tau}_{P'}$ を次の部分集合の定義函数とする:

$$\{X \in \mathfrak{a}_0' \mid \varpi \in \hat{\Delta}_{P'} \text{ に対して } \langle \varpi, X \rangle > 0\}.$$

十分正な截頭パラメータ $T \in (\mathfrak{a}_0')^+$ を固定すると, Arthur の截頭作用素は, $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の滑らか函数 φ に対して, 以下のように定義される:

$$\Lambda^T \varphi(g) = \sum_P (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P} \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \varphi_P(\gamma g) \hat{\tau}_P(H_P(\gamma g) - T)$$

([1] 参照). ここで, P は G の全ての標準的放物型部分群を渡る. [1] の補題 1.4 より $\Lambda^T \varphi$ は $G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})$ 上の急減少函数であるから, 積分

$$\int_{G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})} \Lambda^T \varphi(g) \varphi'(g) dg$$

は任意の $\varphi \in \mathscr{A}(G)$ と $\varphi' \in \mathscr{A}(G')$ に対して収束する. しかし, この積分の計算は困難なので, 次のような混合截頭作用素を用いる:

$$\Lambda_m^T \varphi(g) = \sum_{P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}} \sum_{\gamma \in P'(F)\backslash G'(F)} \varphi_{\mathbf{P}}(\gamma g) \hat{\tau}_{P'}(H_{P'}(\gamma g) - T), \quad g \in G'(\mathbb{A}).$$

ここで, P' は G' の全ての標準的放物型部分群を渡り, $\mathbf{P}$ は $\mathbf{P} \cap G' = P'$ を満足する G の $\mathbf{B}$ を含む標準的放物型部分群である. 以下の補題は重要である.

補題 3.1. 滑らか函数 $\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ とその全ての微分が緩増加であるとき, $\Lambda_m^T \varphi(g)$ は $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上急減少である.

Proof. Arthur の論文 [1] の補題 1.4 の証明を適当に修正すればよい. □

$\varrho \in \mathfrak{a}_{P'_{r'}}^*$ を以下のように定義する:

$$\varrho = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) \in (\mathfrak{a}_0')^*.$$

定義 3.2. $\mathscr{A}(G \times G')^*$ は, 以下の条件を満たす組 $(\varphi, \varphi') \in \mathscr{A}(G) \oplus \mathscr{A}(G')$ の空間とする: G' の全ての真の放物型部分群 P' に対して,

$$\langle \lambda + \lambda' + \varrho, \varpi^\vee \rangle \neq 0 \qquad (\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbf{P}}(\varphi),\ \lambda' \in \mathscr{E}_{P'}(\varphi'),\ \varpi^\vee \in \hat{\Delta}_{P'}^\vee).$$

命題 3.3. $\varphi \in \mathscr{A}(G)$, $\varphi' \in \mathscr{A}(G')$ に対して, 多項式 $p_\lambda \in \mathbb{C}[\mathfrak{a}_0']$ が存在して,

$$\int_{G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})} \Lambda_m^T \varphi(g)\varphi'(g)dg = \sum_\lambda p_\lambda(T)e^{\langle\lambda,T\rangle}.$$

ここで, 指数 λ は以下の有限集合を渡る:

$$\bigcup_{P'}\{\lambda+\lambda'+\varrho_{P'} \mid \lambda \in \mathscr{E}_{\mathbf{P}}(\varphi),\ \lambda' \in \mathscr{E}_{P'}(\varphi')\}.$$

さらに $(\varphi, \varphi') \in \mathscr{A}(G \times G')^*$ のとき, $p_0(T)$ は定数である.

定義 3.4. $(\varphi, \varphi') \in \mathscr{A}(G \times G')^*$ に対して, 周期積分の regularization を

$$\Pi^{G'}(\varphi \otimes \varphi') = p_0(T)$$

により定義する.

注意 3.5. 命題3.3 より $\Pi^{G'}(\varphi\otimes\varphi')$ は T に依存しない複素数である. 混合截頭作用素の定義は G や G' の極小放物型部分群や極大コンパクト部分群の取り方に一見依存しているように見えるが, 実はそれらの取り方に依存しないことが証明できる. さらに写像 $\varphi\otimes\varphi' \mapsto \Pi^{G'}(\varphi\otimes\varphi')$ は保型表現の $G'(\mathbb{A})$ 不変な線形汎函数であることも証明できる.

φ が尖点形式ならば, $\Lambda_m^T\varphi = \varphi$ なので, $\Pi^{G'}(\varphi\otimes\varphi') = \mathbf{P}^{G'}(\varphi\otimes\varphi')$ 成り立つことは当然である. 実際には, より強い以下の命題を証明できる.

命題 3.6. $\varphi \in \mathscr{A}(G)$, $\varphi' \in \mathscr{A}(G')$ とする. もし $\Re\langle\lambda+\lambda'+\varrho, \varpi^\vee\rangle < 0$ が G' の任意の真放物型部分群 P', Q' と $\lambda \in \mathscr{E}_{\mathbf{P}}(\varphi)$, $\lambda' \in \mathscr{E}_{Q'}^{\mathrm{cusp}}(\varphi')$, $\varpi^\vee \in \hat{\Delta}_{P'}^\vee \cap \hat{\Delta}_{Q'}^\vee$ に対して成り立てば, (φ, φ') は $\mathscr{A}(G\times G')^*$ に属し, $\varphi(g)\varphi'(g)$ は $G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})$ 上可積分であり, 次の等式が成り立つ:

$$\Pi^{G'}(\varphi\otimes\varphi') = \mathbf{P}^{G'}(\varphi\otimes\varphi').$$

以上より regularized 周期が周期積分の発散する場合への自然な拡張であることが納得されよう.

$\mathbf{P}(F)\mathbf{U}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ 上の保型形式 $\varphi_{\mathbf{P}}$ と $P'(F)U'(\mathbb{A})\backslash G'(\mathbb{A})$ 上の保型形式 $\varphi'_{P'}$ の regularized 周期

$$\int^*_{P'(F)\backslash G'(\mathbb{A})} \varphi_{\mathbf{P}}(g)\varphi'_{P'}(g)\hat{\tau}_{P'}(H_{P'}(g)-T)dg$$

は全く同様に定義できる. regularized 周期は截頭された保型形式の周期の定数項として定義されたが, 逆に regularized 周期から截頭された保型形式の周期を復元することも可能である.

命題 3.7. $(\varphi, \varphi') \in \mathscr{A}(G\times G')^{**}$ に対して, 以下の等式が成り立つ:

$$\int_{G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})} \Lambda_m^T\varphi(g)\varphi'(g)dg$$
$$= \sum_{P'}(-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}} \int^*_{P'(F)\backslash G'(\mathbb{A})} \varphi_{\mathbf{P}}(g)\varphi'_{P'}(g)\hat{\tau}_{P'}(H_{P'}(g)-T)dg.$$

4 ユニタリ群の保型形式のBessel周期

$\nu_0 = (e, e)$ とおく．注意2.1より V'_{r-1} のベクトル e' で $(e', e') = -\nu_0$ を満たすものが存在する．

$$\varkappa = e + e', \qquad \varkappa' = \frac{e - e'}{2\nu_0}$$

とおき，各 $1 \le k \le r$ に対して新たな V の等方的部分空間

$$X_k = X'_{k-1} \oplus \langle \varkappa \rangle, \qquad Y_k = Y'_{k-1} \oplus \langle \varkappa' \rangle$$

を考える．これらの部分空間は V' に含まれない．$b_t \le r$ を満たす狭義単調増大非負整数列 $\mathbf{b} = (0, b_1, \dots, b_t)$ に対して，G の非標準的放物型部分群 $P_{\mathbf{b}}$ を以下のように定義する:

$$P_{\mathbf{b}} = \{g \in G' \mid 1 \le i \le t \text{ に対して } gX_{b_i} = X_{b_i}\}.$$

$\mathcal{W}_k$ を放物型部分群 $P_{(0,1,2,\dots,k)}$ のべき単根基とする．$\mathcal{W}'_{k-1} = \mathcal{W}_k \cap G'$ が成り立つことは容易に確かめられる．V_a を X_a と Y_a の V での直交補空間とする．$P_a = \{g \in G \mid gX_a = X_a\}$ は G の極大放物型部分群であり，P_a の Levi 部分群は $\mathrm{GL}(X_a)$ と V_a のユニタリ群 $\mathcal{G}_a$ の直積に同型である．

注意 4.1. $k \le r$ に対して，

$$V_k \subset V'_{k-1} = V_k \oplus \langle e' \rangle \subset \mathbf{V}_{k-1} = \langle e \rangle \oplus V'_{k-1}, \qquad \mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}'_{k-1} \subset \mathbf{G}_{k-1}$$

が成り立つ．

$\mathcal{W}'_{k-1}(\mathbb{A})$ の指標 χ が $\chi(\mathcal{W}'_{k-1}(F)) = 1$ を満たすとき，$\varphi' \in \mathscr{A}(G')$ の χ に関するフーリエ係数は積分

$$W^{\chi}(g, \varphi') = \int_{\mathcal{W}'_{k-1}(F)\backslash \mathcal{W}'_{k-1}(\mathbb{A})} \varphi'(ug)\overline{\chi(u)}du$$

により定義される．$E\backslash\mathbb{A}_E$ の非自明な指標 ψ を固定する．$\mathcal{N}_k$ を旗 $X'_1 \subset X'_2 \subset \cdots \subset X'_{k-1}$ により定義される $\mathcal{M}_k$ の Borel 部分群のべき単根基とする．準同型 $\wp_k : \mathcal{N}_k \to \mathbb{G}_a$ と $\rho'_{k-1} : \mathcal{W}'_{k-1} \to \mathbb{G}_a$ を

$$\wp_k(u) = (ue_2, f_1) + (ue_3, f_2) + \cdots + (ue_{k-1}, f_{k-2}) + (u\varkappa_k, f_{k-1}),$$
$$\rho'_{k-1}(u') = (u'e_2, f_1) + \cdots + (u'e_{k-1}, f_{k-2}) + (u'e', f_{k-1})$$

により定義すれば，ρ'_{k-1} は $\wp_k$ の $\mathcal{W}'_{k-1}$ への制限に一致する．さらに $\mathcal{N}_k(\mathbb{A})$ と $\mathcal{W}'_{k-1}(\mathbb{A})$ の指標を

$$\Psi_k(u) = \psi(\wp_{\ell+1}(u)), \qquad u \in \mathcal{N}_k(\mathbb{A}),$$
$$\psi'_{k-1}(u') = \psi(\rho'_{k-1}(u')), \qquad u' \in \mathcal{W}'_{k-1}(\mathbb{A})$$

により定義する．ψ'_{k-1} は $\mathcal{G}_k(F)$ の共役作用で不変であるから，$W^{\overline{\psi'_{k-1}}}(\varphi')$ は $\mathcal{G}_k(F)$ 上左不変である．

$\mathbf{b}$ と $\eta \in G(F)$ を $P = \eta P_{\mathbf{b}} \eta^{-1}$ が成り立つように選び, $b = b_t$, $\sigma_0 = w_{M_{\mathbf{b}}}^{M_b}$ とおく. 保型形式 $\varphi \in \mathscr{A}_P(G)$ とパラメータ $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ に対して,

$$W_P^{\psi}(\varphi)(g) = \int_{(\mathcal{N}_b \cap M_{\mathbf{b}})(F)\backslash(\mathcal{N}_b \cap M_{\mathbf{b}})(\mathbb{A})} \varphi(\eta u g)\overline{\Psi_b(u)}du,$$

$$\mathbb{W}_P^{\psi}(g,\varphi,\lambda) = \int_{(\mathcal{N}_b \cap {}^{\sigma_0}M_{\mathbf{b}})(\mathbb{A})\backslash\mathcal{N}_b(\mathbb{A})} W_P^{\psi}(\varphi)(\sigma_0^{-1}ug)e^{\langle\lambda, H_P(\eta\sigma_0^{-1}ug)\rangle}\overline{\Psi_b(u)}du$$

とおく. 函数 $h \mapsto \mathbb{W}_P^{\psi}(hg,\varphi,\lambda)$ が $\mathcal{G}_b(F)\backslash\mathcal{G}_b(\mathbb{A})$ 上急減少ならば, 積分

$$\mathcal{B}(\varphi_\lambda \otimes \varphi')(g) = \int_{\mathcal{G}_b(F)\backslash\mathcal{G}_b(\mathbb{A})} \mathbb{W}_P^{\psi}(hg,\varphi,\lambda)W^{\overline{\psi'_{b-1}}}(hg,\varphi')dh$$

は任意の $\varphi' \in \mathscr{A}(G')$ に対して絶対収束する. さらに次の積分は

$$I(\varphi,\varphi',\lambda) = \int_{\mathcal{W}'_{b-1}(\mathbb{A})\mathcal{G}_b(\mathbb{A})\backslash G'(\mathbb{A})} \mathcal{B}(\varphi_\lambda \otimes \varphi')(g)dg$$

λ の実部が十分正ならば収束する.

注意 4.2. 重複度一定理 [5, 17] より, この積分はオイラー積を持つことが分かる.

5 アイゼンシュタイン級数の regularized 周期

$\varphi \in \mathscr{A}_P^c(G)$ と $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ に対して, 級数

$$E(g,\varphi,\lambda) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \varphi(\gamma g)e^{\langle\lambda, H_P(\gamma g)\rangle}$$

は λ の実部が十分正ならば収束し, $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 全体に解析接続される.

定理 5.1. $\varphi \in \mathscr{A}_P^c(G)$ と $\varphi' \in \mathscr{A}(G')$ に対して, 有理型函数の等式

$$\mathbf{P}^{G'}(E(\varphi,\lambda)\otimes\varphi') = I(\varphi,\varphi',\lambda)$$

が成立する.

この定理の詳しい証明は [13] を参照.

6 アイゼンシュタイン級数の留数の周期

以下では G と G' は準分裂とし, $\delta_{E/F}$ を二次拡大 E/F に対応する $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の二次指標とする. $1 \le a \le r'$ を固定する. σ を G_a の既約尖点的保型表現, π を $\mathbf{G}_a$ の既約生成的尖点的保型表現, ρ を G'_a の既約生成的尖点的保型表現とする. それらの反傾表現 $\sigma^\vee$, $\pi^\vee$, $\rho^\vee$ はそれらの空間の保型形式の複素共役を取って得られる

保型形式からなる空間に実現される. π と ρ のテンソル積 L 函数をベースチェンジのテンソル積 L 函数として定義する (注意 1.2(1) を参照). すなわち,

$$L(s,\pi\times\rho)=L(s,\mathrm{BC}(\pi)\times\mathrm{BC}(\rho)).$$

一般線形群のテンソル積 L 函数は Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika により詳しく研究されている. Levi 部分群 $\mathbf{M}_a$, M'_a の既約表現をテンソル積

$$\Pi=\sigma\otimes\pi^\vee,\qquad \Pi'=\sigma^\vee\otimes\rho^\vee$$

により定義する. P'_a は極大放物型部分群なので, $\varphi'\in\mathscr{A}^{\Pi'}_{P'_a}(G')$ のアイゼンシュタイン級数 $E(\varphi',s)$ の解析的性質はそれらの定数項

$$M(s)\varphi'(g)=\int_{U'_a(F)\backslash U'_a(\mathbb{A})}\varphi'(wug)e^{\langle s,H_{P'_a}(wug)\rangle}du$$

を調べれば分かる. $\varphi\in\mathscr{A}^{\Pi}_{\mathbf{P}_a}(G)$ のアイゼンシュタイン級数 $E(\varphi,s)$ に関しても同様である. 誘導データが生成的なので, $E(\varphi,s)$ と $E(\varphi',s)$ は 1 と $\frac{1}{2}$ で高々一位の極を持つことが証明される. それらの留数を

$$\mathcal{E}(\varphi)=\lim_{s\to1/2}\left(s-\frac{1}{2}\right)E(\varphi,s),$$
$$\mathcal{E}(\varphi')=\lim_{s\to1}(s-1)E(\varphi',s),$$
$$M(\varphi')=\lim_{s\to1}(s-1)M(s)\varphi'$$

とおく. アイゼンシュタイン級数の極は誘導データの L 函数を使って決定できる.

補題 6.1. *(1)* $\mathcal{E}(\varphi)\neq0$ となるための必要十分条件は $L(1/2,\sigma\times\pi)\neq0$ かつ $L(s,\sigma,\mathrm{As}\otimes\delta^n_{E/F})$ が $s=1$ で極を持つことがわかる.

(2) $\mathcal{E}(\varphi')\neq0$ となるための必要十分条件は $L(s,\sigma\times\rho)$ が $s=1$ で極を持つことである.

以下では $\mathcal{E}(\varphi')\neq0$ を仮定する. 指数を見れば, $\mathcal{E}(\varphi)\otimes\mathcal{E}(\varphi')$ の周期積分は, [20] の補題 I.4.1 より絶対収束することが分かる. 不分岐素点での局所成分を調べれば, $\mathcal{E}(\varphi')$ が生成する空間と π は Bessel 周期を持たないことが証明できるので,

$$\Pi^{G'}(E(\varphi,s)\otimes\mathcal{E}(\varphi'))=0$$

が成り立つ. 従って命題 3.7 より

$$\begin{aligned}\int_{[G']}&\Lambda^T_mE(g,\varphi,s)\mathcal{E}(g,\varphi')dg\\&=\frac{e^{(s-1/2)T}}{s-1/2}\int_{K'}\int_{M'_a(F)\backslash M'_a(\mathbb{A})^1}\varphi(mk)M(\varphi')(mk)dmdk\\&\quad-\frac{e^{-(s+1/2)T}}{s+1/2}\int_{K'}\int_{M'_a(F)\backslash M'_a(\mathbb{A})^1}M(\varphi)(mk)M(\varphi')(mk)dmdk.\end{aligned}$$

さらに Cauchy の積分公式と Fubini の定理を使えば, 以下の等式を証明できる.

定理 6.2. 以上の記号と仮定の下で, 次の等式が成り立つ:

$$\int_{G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})} \mathcal{E}(g,\varphi)\mathcal{E}(g,\varphi')dg = \int_{K'}\int_{M'_a(F)\backslash M'_a(\mathbb{A})^1} \varphi(mk)M(\varphi')(mk)dmdk.$$

ここで,

$$M'_a(\mathbb{A})^1 = G_a(\mathbb{A}) \times U(V'_a)(\mathbb{A}), \qquad G_a(\mathbb{A})^1 = \{g \in G_a(\mathbb{A}) \mid |\det g| = 1\}.$$

最後に定理 1.1 の証明の概略を述べる. GL_n の放物型部分群 $\mathcal{P} = \mathcal{MU}$ が存在して, $\mathrm{BC}(\rho)$ は $\mathcal{M}$ の既約尖点的保型表現 $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_t$ からの誘導表現になる. さらに, $L(s, \sigma_i, \mathrm{As} \otimes \delta_{E/F}^{n-1})$ は $s = 1$ で極を持つ.

σ を $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ のいずれかに取る. 補題 6.1(2) より適当な φ' に対して, 留数 $\mathcal{E}(\varphi')$ は 0 でない. 定理 6.2 よりアイゼンシュタインの留数が distinguished であるための必要十分条件は, その誘導データが distinguished であることであり, 従って $\pi \otimes \rho$ が distinguished であることである. 一方, 定理 6.2 の左辺が 0 にならないためには, $\mathcal{E}(\varphi)$ が 0 にならないことが明らかに必要である. 補題 6.1(1) より適当な φ に対して, 留数 $\mathcal{E}(\varphi)$ が 0 にならないための必要十分条件は $L(1/2, \sigma \times \pi) \neq 0$ である. 以上より $\pi \otimes \rho$ が distinguished であれば, $L(1/2, \sigma_i \times \pi) \neq 0$ であることが分かったので,

$$L(1/2, \pi \times \rho) = \prod_{i=1}^{t} L(1/2, \sigma_i \times \pi) \neq 0.$$

References

[1] J. Arthur, A trace formula for reductive groups II: Applications of a truncation operator, Compos. Math. **40** (1980) 87–121.

[2] J. Arthur, The trace formula in invariant form, Ann. Math. **114** (1981) 1–74.

[3] J. Cogdell, I. Piatetski-Shapiro and F. Shahidi, Functoriality for the quasisplit classical groups, Clay Math. Proceedings **13** (2011) 117–139.

[4] Y. Flicker, On distinguished representations, J. Reine Angew. Math. **418** (1991) 139–172.

[5] W. T. Gan, B. H. Gross and D. Prasad, Symplectic local root numbers, central critical L-values, and restriction problems in the representation theory of classical groups, Astérisque, to appear.

[6] D. Ginzburg, D. Jiang and S. Rallis, On the nonvanishing of the central value of the Rankin-Selberg L-functions, J. Am. Math. Soc. **17** (2004), no. 3, 679–722.

[7] D. Ginzburg, D. Jiang and S. Rallis, On the nonvanishing of the central value of the Rankin-Selberg L-functions II, Automorphic Representations, L-functions and Applications: Progress and Prospects, 157–191, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., 11, de Gruyter, Berlin, 2005.

[8] D. Ginzburg, D. Jiang and S. Rallis, Models for certain residual Representations, Automorphic forms and L-functions I: Global aspects, A volume in honor of S. Gelbart. Israel, Math. Conf. Proc. Contemp. Math., 488, 125–146.

[9] B. H. Gross and D. Prasad, On the decomposition of a representation of SO_n when restricted to SO_{n-1}, Canad. J. Math. **44** (1992), no. 5, 974–1002.

[10] D. Ginzburg, S. Rallis and D. Soudry, The descent map from automorphic representations of $\mathrm{GL}(n)$ to classical groups, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2011. x+339 pp.

[11] A. Ichino and T. Ikeda, On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture, Geom. Funct. Anal. **19** (2010), no. 5, 1378–1425.

[12] A. Ichino and S. Yamana, Periods of automorphic forms: The case of $(\mathrm{GL}_{n+1} \times \mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n)$, preprint.

[13] A. Ichino and S. Yamana, Periods of automorphic forms: The case of $(\mathrm{U}_{n+1} \times \mathrm{U}_n, \mathrm{U}_n)$, preprint.

[14] H. Jacquet, Kloosterman identities over a quadratic extension. II, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005) 609–669.

[15] H. Jacquet, E. Lapid and J. Rogawski, Periods of automorphic forms, J. Am. Math. Soc. **12** (1999) 173–240.

[16] H. Jacquet and S. Rallis, Symplectic periods, J. Reine Angew. Math. **423** (1992) 175–197.

[17] D. Jiang, B. Sun and C.-B. Zhu, Uniqueness of Bessel model; the archimedean case, Geom. Funct. Anal. **20** (2010) 690–709.

[18] H. Kim and M. Krishnamurthy, Stable base change lift from unitary groups to GL_N, IMRP **1** (2005) 1–52.

[19] E. Lapid and J. Rogawski, Periods of Eisenstein series: the Galois case, Duke Math. J. **120** (1) (2003) 153–226.

[20] C. Moeglin and J.-L. Waldspurger, Le spectre résiduel de $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22** (1989) 605–674.

[21] C. Moeglin and J.-L. Waldspurger, Spectral Decomposition and Eisenstein Series, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. **113**, Cambridge University Press, 1995.

[22] O. Offen, On symplectic periods of discrete spectrum of GL_{2n}, Israel J. Math. **154** (2006) 253–298.

[23] O. Offen, Residual spectrum of GL_{2n} distinguished by the symplectic group, Duke Math. J. **134** (2) (2006) 313–357.

[24] J. Shalika, The multiplicity one theorem for GL_n, Ann. Math. **100** (1974) 171–193.

[25] S. Yamana, Symplectic periods of the continuous spectrum of $\mathrm{GL}(2n)$, Ann. Inst. Fourier (to appear)

[26] W. Zhang, Fourier transform and the global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups, preprint.

[27] W. Zhang, Automorphic period and the central value of Rankin-Selberg L-function, preprint.

Graduate School of Mathematics, Kyushu University, Hakozaki, Higashi-ku,
Fukuoka, 812-8581, Japan
e-mail:yamana@math.kyushu-u.ac.jp