数理解析研究所講究録
第 1872 巻 2014 年 1-7

マシュー群に関連した擬テータ関数に現れる合同式
Congruences on the Fourier coefficients of the Mathieu mock theta function

山形大学・地域教育文化学部　三枝崎　剛
Tsuyoshi Miezaki
Faculty of Education, Art and Science
Yamagata University

1　はじめに

本稿の目的は，近年発見された Mathieu Moonshine 現象 [7]，Umbral Moonshine 現象 [2] に現れるモックテータ関数のフーリエ係数の合同式を紹介することである．その合同式の Cheng–Duncan–Harvey による予想 [2] への応用も紹介したい．

本稿の結果は，部分的に Matthias Waldherr 氏（University of Cologne），Thomas Creutzig 氏（Technische Universität Darmstadt），Gerald Höhn 氏（Kansas State University）との共同研究である．

2　Moonshine 現象

$E_4(\tau)$ を Eisenstein 級数，$\eta(\tau)$ を Dedekind η-関数とする：

$$E_4(\tau)=1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n,$$

$$\eta(\tau)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),$$

ここで，$\sigma_3(n)=\sum_{m|n}m^3$．そのとき，$j$-関数は次のように定義される：

$$\begin{aligned}j(\tau)=\frac{E_4(\tau)^3}{\eta(\tau)^{24}}&=\frac{1}{q}+744+196884q+\cdots\\&=\sum_{n=-1}^{\infty}c(n)q^n.\end{aligned}$$

McKay は，$c(1)=196884$ が Monster 単純群の非自明な既約表現の最小次元 196883 とほとんど等しい事に気付き，いわゆる Moonshine 現象を発見した．これらは，Conway と Norton により，Moonshine conjecture として纏められ，現在では Borcherds によって証

明されている [5, 1]. この様に j-関数の Fourier 係数 $c(n)$ は種々の興味深い性質をもつが，特に次の合同式を満たす事が知られている [14]：$a \geq 1$ に対し，

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{2^a} & \Rightarrow c(n) \equiv 0 \pmod{2^{3a+8}} \\ n \equiv 0 \pmod{3^a} & \Rightarrow c(n) \equiv 0 \pmod{3^{2a+3}} \\ n \equiv 0 \pmod{5^a} & \Rightarrow c(n) \equiv 0 \pmod{5^{a+1}} \\ n \equiv 0 \pmod{7^a} & \Rightarrow c(n) \equiv 0 \pmod{7^a} \\ n \equiv 0 \pmod{11^a} & \Rightarrow c(n) \equiv 0 \pmod{11^a}. \end{cases}$$

3 Mathieu Moonshine 現象

さて最近，Mathieu moonshine 現象が発見された [7]. $\vartheta_1(z;\tau)$ と $\mu(z;\tau)$ を次に定める関数とする：

$$\vartheta_1(z;\tau) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\tau(n+\frac{1}{2})^2+2\pi i(n+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})},$$

$$\mu(z;\tau) = \frac{ie^{\pi iz}}{\vartheta_1(z;\tau)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}e^{2\pi inz}}{1-q^ne^{2\pi iz}}.$$

それらを用いて $\Sigma(\tau)$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\Sigma(\tau) &:= 8\sum_{z\in\{1/2,\tau/2,(1+\tau)/2\}}\mu(z;\tau) \\ &= q^{-\frac{1}{8}}\left(2-\sum_{n=1}^{\infty}A(n)q^n\right) \quad \text{(say)} \\ &= -q^{-\frac{1}{8}}(-2+90q+462q^2+1540q^3+4554q^4+11592q^5+27830q^6+\cdots).\end{aligned}$$

Mathieu moonshine 現象とは最初の 5 個のフーリエ係数を 2 で割ったもの：

$$\{45, 231, 770, 2277, 5796\},$$

が 24 次の Mathieu 群 M_{24} の既約表現の次元に等しく，更に他の係数も M_{24} の既約表現の次元の正の整数係数線形結合で書けている，というものであった. このミステリアスな現象の理由は，ごく最近になって，[9] によって解明された.

さて，このフーリエ係数の合同式を調べようということが目的である. 筆者は，j-関数の様な合同式を持たないか調べる中で，j-関数の類似とも思える，次の合同式を発見した：

$$\begin{cases} n \equiv 1,2 \pmod{3} & \Rightarrow A(n) \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1,3 \pmod{5} & \Rightarrow A(n) \equiv 0 \pmod{5} \\ n \equiv 2,3,5 \pmod{7} & \Rightarrow A(n) \equiv 0 \pmod{7} \\ n \equiv 2,3,4,6,9 \pmod{11} & \Rightarrow A(n) \equiv 0 \pmod{11} \\ n \equiv 4,5,6,7,9,11,12,15,16,19,21 \pmod{23} & \Rightarrow A(n) \equiv 0 \pmod{23}. \end{cases} \tag{1}$$

モジュラー形式のフーリエ係数の合同式を示すには，スツルムの定理という強力な道具がある. スツルムの定理は，最初の有限項のみ合同式を確認すれば，全てのフーリエ係数で

正しいことがわかることを主張する．しかし，$\Sigma(\tau)$ はもはやモジュラー形式でなく，モックテータ関数である．つまりスツルムの定理を用いることが出来ない．筆者は，Matthias Waldherr 氏との共同研究において，スツルムの定理をモックテータ関数へ拡張し，これらの合同式を示した：

定理 3.1 ([10],[12])**.** (1) の合同式は正しい．

面白いことに，法として現れる素数は，$\sharp M_{24}$ を割る奇素数として特徴づけられる．偶素数 2 に関する合同式については後程述べる．

4 Mathieu Moonshine 現象の McKay–Thompson 級数

さて，トレースが $\Sigma(\tau)$ となる M_{24}-加群 $K=\oplus_{n=-1}^{\infty}K_n$ に対し，M_{24} の共役類 ℓX の元 g の McKay–Thompson 級数を定義しよう [6, 8]：

$$\Sigma_{\ell X}(\tau)=\sum_{n=-1}^{\infty}\mathrm{tr}(g|K_n)\,q^{n/8}=\sum_{n=-1}^{\infty}A_{\ell X}(n)\,q^{n/8}\ \text{(say)}.$$

このとき [11] において，$A_{\ell X}(n)$ も (1) と同じ型の合同式を持つことが示された．2 つの type に分けているが，大雑把にいって "Type I" がモックテータ関数，"Type II" がモジュラー関数である：

定理 4.1. $g\in M_{24}$ に対し $A_g(n)$ は次の合同式を持つ：

- **Type I:**

1A

$$n\equiv\begin{cases}1 \pmod 3\\ 1,3 \pmod 5\\ 2,3,5 \pmod 7\\ 2,3,4,6,9 \pmod{11}\\ \left\{\begin{array}{l}4,5,6,7,9,\\ 11,12,15,16,19,21\end{array}\right. \pmod{23}\end{cases}\Rightarrow A_{1A}(n)\equiv 0\begin{cases}\pmod{3^2}\\ \pmod 5\\ \pmod 7\\ \pmod{11}\\ \pmod{23}.\end{cases}$$

2A

$$n\equiv\begin{cases}1 \pmod 3\\ 2,3,5 \pmod 7\end{cases}\Rightarrow A_{2A}(n)\equiv 0\begin{cases}\pmod 3\\ \pmod 7\end{cases}$$

3A

$$n\equiv\begin{cases}1,2 \pmod 3\\ 1,3 \pmod 5\end{cases}\Rightarrow A_{3A}(n)\equiv 0\begin{cases}\pmod 3\\ \pmod 5\end{cases}$$

5A

$$n \equiv \begin{cases} 1 \pmod 3 \\ 1,3 \pmod 5 \end{cases} \Rightarrow A_{5A}(n) \equiv 0 \begin{cases} \pmod 3 \\ \pmod 5 \end{cases}$$

7A

$$n \equiv \begin{cases} 2 \pmod 3 \\ 2,3,5 \pmod 7 \end{cases} \Rightarrow A_{7A}(n) \equiv 0 \begin{cases} \pmod 3 \\ \pmod 7 \end{cases}$$

6A

$$n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow A_{6A}(n) \equiv 0 \pmod 3$$

11A

$$n \equiv 2,3,4,6,9 \pmod{11} \Rightarrow A_{11A}(n) \equiv 0 \pmod{11}$$

14A

$$n \equiv 2,3,5 \pmod 7 \Rightarrow A_{14A}(n) \equiv 0 \pmod 7$$

15A

$$n \equiv \begin{cases} 1 \pmod 3 \\ 1,3 \pmod 5 \end{cases} \Rightarrow A_{15A}(n) \equiv 0 \begin{cases} \pmod 3 \\ \pmod 5 \end{cases}$$

23A

$$n \equiv \begin{cases} 4,5,6,7,9, \\ 11,12,15,16,19,21 \end{cases} \pmod{23} \Rightarrow A_{23A}(n) \equiv 0 \pmod{23}$$

- **Type II:**

2B

$$n \equiv \begin{cases} 2 \pmod 3 \\ 1,3 \pmod 5 \end{cases} \Rightarrow A_{2B}(n) \equiv 0 \begin{cases} \pmod 3 \\ \pmod 5 \end{cases}$$

4A

$$n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow A_{4A}(n) \equiv 0 \pmod 3$$

4C

$$n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow A_{4C}(n) \equiv 0 \pmod 3$$

3B

$$n \equiv \begin{cases} 1,2 \pmod 3 \\ 2,3,5 \pmod 7 \end{cases} \Rightarrow A_{3B}(n) \equiv 0 \begin{cases} \pmod 3 \\ \pmod 7 \end{cases}$$

6B

$$n \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow A_{6B}(n) \equiv 0 \pmod 3$$

12B

$$n \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow A_{12B}(n) \equiv 0 \pmod 3$$

10A

$$n \equiv 1,3 \pmod 5 \Rightarrow A_{10A}(n) \equiv 0 \pmod 5$$

12A

$$n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow A_{12A}(n) \equiv 0 \pmod 3$$

21A

$$n \equiv \begin{cases} 2 \pmod 3 \\ 2,3,5 \pmod 7 \end{cases} \Rightarrow A_{21A}(n) \equiv 0 \begin{cases} \pmod 3 \\ \pmod 7 \end{cases}$$

$A(n)(= A_{1A}(n))$ と同じく，法として現れる素数は，$\sharp C_{M_{24}}(\ell X)$ を割る奇素数として特徴づけられる [11]. 更に他の奇素数に関しては，(1) のような合同式は持たないと予想される．この予想を解決することは，モックテータ関数と M_{24} との関係を更に明らかにするという意味において，大切な問題であると考える．

5 フーリエ係数の偶奇性

では最後に，Fourier 係数の偶奇を調べたい．以下では，記号は [3] に従う．実は [10, 11, 12] において，偶奇は詳しく調べなかった．というのは，全ての ℓX に対し $2 \mid \sharp C_{M_{24}}(\ell X)$ であり，すると上に挙げた特徴づけを信じるならば，全ての ℓX に対し，$A_{\ell X}(n)$ の偶奇は規則的なはずである．確かに計算してみると，ほぼ全ての $A_{\ell X}(n)$ は偶数だが，しかし奇数も一部の ℓX に対し存在し，なかなか良い特徴づけが見つからなかったからである．ところが，[2] において提出された一つの予想と思わぬ関係が見つかり，それにより Fourier 係数の偶奇の特徴づけも成功したので報告する．その予想とは，次のようなものである：

予想 5.1 ([2], Conj. 5.11). $n = \ell m^2 \equiv 7 \pmod 8$ とする．K_n は次の複素共役な既約表現のペアを含む：

- For $\ell = 7$, one of the pairs (χ_3, χ_4), (χ_{12}, χ_{13}) or (χ_{15}, χ_{16});
- for $\ell = 15$, the pair (χ_5, χ_6);
- for $\ell = 23$, the pair (χ_{10}, χ_{11}).

この予想に現れる数 "7, 15, 23" が，偶奇の特徴づけに必要だったのである．$A_{\ell X}(n)$ に関する偶奇性は，次のように述べられる：

定理 5.1 ([4]). M_{24} の共役類 ℓX に対し，$A_{\ell X}(n)$ が奇数である必要十分条件は，$\ell X \in \{7A, 7B, 14A, 14B, 15A, 15B, 23A, 23B\}$ かつ奇数 m を用いて，$n = \ell m^2$ と書ける，もしくは，$\ell X \in \{21A, 21B\}$ かつ 3 で割れない奇数 m を用いて，$n = \ell m^2$ と書けることである．

定理 5.1 を用いて，予想 5.1 を含むような次の系が得られた：

系 5.1 ([4]). $n = \ell m^2 \equiv 7 \pmod 8$ とする．$n = \ell m^2 \equiv 7 \pmod 8$ とする．K_n は次の複素共役な既約表現のペアを重複度奇数で含む：

- For $\ell = 7$, the total number of pairs (χ_3, χ_4) and (χ_{12}, χ_{13});
- for $\ell = 7$ and m divisible by 3, the pair (χ_{15}, χ_{16});
- for $\ell = 15$, the pair (χ_5, χ_6);
- for $\ell = 23$, the pair (χ_{10}, χ_{11}).

6 Remarks

- [2] により，Umbral Moonshine 現象が見つかった．この現象に現れるモックテータ関数に対しても数多くの興味ある合同式を発見している．特に，ラマヌジャンの発見した多数のモックテータ関数が登場し，それらのフーリエ係数の合同式に現れる法が，対応する群の位数と関係することも確認している．古典的なラマヌジャンのモックテータ関数が，由緒正しい有限群達と関係することが明らかになったのである．これについて，論文を作成中である．

- 証明について触れなかったが，簡単に述べておく．既に述べたように，保型形式のフーリエ係数の合同式を示す際，スツルムの定理 [13] を用いることは定石である．しかし，我々の考えている McKay–Thompson 級数は一般に保型形式でなくモックテータ関数なので，スツルムの定理が使えない．我々は，スツルムの定理をモックテータ関数に一般化することに成功した．それを用いてこれら数多くの合同式の証明に成功した．

  また，モックテータ関数となる McKay–Thompson 級数を，モジュラー形式や良く知られた形式の和として表示できる場合が，少なからずある．このような場合は，通常はスツルムの定理を使えばよい．

  詳しくは論文を参照して頂きたい [10, 12, 2].

参考文献

[1] R.E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109** (1992), no. 2, 405–444.

[2] M. C. N. Cheng, J. F. R. Duncan and J. A. Harvey, Umbral Moonshine, preprint (2012), arXiv:1204.2779.

[3] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of finite groups, Oxford University Press, 1985.

[4] T. Creutzig, G. Höhn and T. Miezaki, The McKay-Thompson series of Mathieu Moonshine modulo two, submitted (2012), arXiv:1211.3703.

[5] J. H. Conway and S. P. Norton, Monstrous Moonshine, *Bull. Lond. Math. Soc.* **11** (1979), 308–339.

[6] T. Eguchi and K. Hikami, Note on twisted elliptic genus of $K3$ surface, *Phys. Lett. B* **694** (2011), no. 4-5, 446–455, arXiv:1008.4924.

[7] T. Eguchi, H. Ooguri and Y. Tachikawa, Notes on the $K3$ surface and the Mathieu group M_{24}, *Exp. Math.* **20** (2011), no. 1, 91–96, arXiv:1004.0956.

[8] M. R. Gaberdiel, S. Hohenegger and R. Volpato, Mathieu Moonshine in the elliptic genus of $K3$, *J. High Energy Phys.* (2010), no. 10, **062**, 24 pp, arXiv:1008.3778.

[9] T. Gannon, Much ado about Mathieu, preprint (2012), arXiv:1211.5531.

[10] T. Miezaki, On the Mathieu mock theta function, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **88** (2012), no. 2, 28–30.

[11] T. Miezaki, Congruences on the Fourier coefficients for mock theta functions, which relate finite groups, preprint.

[12] T. Miezaki, M. Waldherr, Congruence of the Fourier coefficients of the Mathieu mock theta function, submitted.

[13] K. Ono, *The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 102, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2004.

[14] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Translated from the French. Graduate Texts in Mathematics, No. 7. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.