数理解析研究所講究録
第 1873 巻 2014 年 48-51

On the set of primitive idempotents in a ring

鳴門教育大学・大学院学校教育研究科　平野 康之 (Yasuyuki Hirano)
Graduate School of Education
Naruto University of Education

1. はじめに

以後，環といえば，単位元を持つ結合的環を意味する。いま，R を環とします。$e \in R$ が $e^2 = e$ を満たすとき，e は**べき等元**であるという。べき等元 e に対して，$e = e_1 + e_2$ かつ $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ をみたす 0 と異なるべき等元 e_1, e_2 が存在しないとき，e は**原始べき等元**であるという。R-加群 M が 2 つの 0 と異なる部分加群の直和にならないとき，M は **直既約**であるという。

よく知られているように，べき等元 $e \in R$ に対して，
1) e は原始べき等元である;
2) 右 R-加群 eR は直既約である;
3) 左 R-加群 Re は直既約である;
は同値である。

また，べき等元 e が R のすべての元と交換可能であるとき，e は**中心的べき等元**であるという。2 つのべき等元 e, f が $ef = fe = 0$ となるとき，e と f は**直交する**という。そして，べき等元の集合 $E = \{e_i \mid i \in I\}$ の任意の異なる 2 元が直交するとき，E は**直交べき等元の集合**であるという。以後，$P(R)$ で環 R のすべての原始べき等元のなす集合を表す。また，$J(R)$ で環 R の **Jacobson 根基**を表す。

よく知られているように，環 R に対して，3 つの条件：
1) R はただ 1 つだけ極大右イデアルを持つ；
2) R はただ 1 つだけ極大左イデアルを持つ；
3) $R/J(R)$ は斜体である；
は同値であり，これをみたすとき， R は**局所環**と呼ばれる。

2. すべての原始べき等元が中心的になるための条件

Dolžan は [1] で次の結果を証明した。

定理 1. R が有限環で $P(R) \cup \{0\}$ が乗法的に閉じていれば，R は局所環の直和である。

環 R が 0, 1 以外にべき等元を持たないとき，R は**連結環**と呼ばれる。定理 1 は Grover, Khurana, Singh [3] により以下のように一般化された。

定理 2 ([2, Theorem 2.3]). 環 R に対して，$P(R) \cup \{0\}$ が乗法的に閉じており，1 が直交原始べき等元の和であることと R が連結環の直和であることは同値である。

環 R の任意の元 x に対して，$x = xyx$ を満たす $y \in R$ が存在するとき，R は **von Neumann 正則環**であるという。Grover, Khurana, Singh [3] は，さらに次を示した。

定理 3 ([2, Theorem 4.2]). R が von Neumann 正則環であり，$P(R) \cup \{0\}$ が乗法的に閉じていれば，すべての原始べき等元は中心的である。

環 R の任意の有限生成右イデアルが射影的であるとき，R は**右半遺伝環**と呼ばれる。類似的に，**左半遺伝環**も定義する。A が von Neumann 正則環であるとき，任意の有限生成右（左）イデアルは A の直和因子であるので，A は右（左）半遺伝環である。

注意. [2] で，定理 3 において "R が von Neumann 正則環である" という仮定を "R が右かつ左半遺伝環である" に置き換えると成り立たない例が挙げられている。

3. 一つの原始べき等元が中心的になるための条件

この節では，所謂，定理 2 と定理 3 の局所版を考え，1 つの原始べき等元が中心的であるための条件を考える。まず，よく使う結果を述べておく。

環 R の 2 つのべき等元 e, f に対して，2 つの条件：

1) 右 R-加群して，eR と fR は同型である；
2) 左 R-加群して，Re と Rf は同型である；

は同値であり，これをみたすとき，e, f は**同型なべき等元**であるという。

次の結果は Lam[3, Exircise 22.3A, P.333] に述べられているが，読者の便宜を図るために証明を与えておく。

命題. べき等元 $e \in R$ が中心的であるため必要十分条件は e が e と同型なすべてのべき等元と可換なことである。

証明. (必要性)　明らかである。

(十分性)　べき等元 $e \in R$ が e と同型なすべてのべき等元と可換であると仮定しよう。いま，x を環 R の任意の元とし，$f := e + ex(1-e)$ とおくと，これは明らかにべき等元である。また f は e と同型なべき等元である。実際，容易にわかるように $ef = f$, $fe = e$ であるので，$\phi : fR \to eR$ を $\phi(a) = ea$, $\psi : eR \to fR$ を $\psi(b) = fb$ で定義すると，ϕ, ψ は互いの逆写像になるので，$eR \cong fR$ である。仮定より，$ef = fe$ であるので，$f = e$ を得る。これから，$ex(1-e) = 0$, すなわち，$ex = exe$ が導かれる。次に，$g := e + (1-e)xe$ とおくと，$ge = g$, $eg = e$ となるので，上と議論により，$eR \cong gR$ となる。再び，仮定から，$eg = ge$ であるので，$e = g$ となる。これから，$(1-e)xe = 0$, すなわち，$xe = exe$ が導かれる。$ex = exe$ と $xe = exe$ から $ex = xe$ が導かれる。

いま，e を原始べき等元とし，べき等元 f が e と同型であるとする。このとき，$eR \cong fR$ であるので，fR も直既約となり，f も原始べき等元となる。従って，上の命題から次を得る。

系. 原始べき等元 $e \in R$ が中心的であるため必要十分条件は e がすべての原始べき等元と可換なことである。

環 R に対して，R におけるすべてのべき等元の集合を $E(R)$ で表す。

定理 4. e は環 R の原始べき等元で $1-e$ が直交原始べき等元の和に書けるとする。もし $eP(R) \subseteq E(R)$ かつ $P(R)e \subseteq E(R)$ が成り立てば, e は中心的べき等元である。

次の定理はある意味で上の定理の一般化である。

定理 5. e は環 R のべき等元で $I(e)$ で集合 $\{f \in E(R) \mid fR \cong eR\}$ を表す。$1-e$ は $I(R)$ に属するの直交等元の和に書けるとする。もし $eI(R) \subseteq E(R)$ かつ $I(R)e \subseteq E(R)$ であれば, e は中心的べき等元である。

一つのべき等元に着目すると，定理3は次のように一般化される。

定理6. R は von Neumann 正則環であり，e は R の原始べき等元であるとする。もし $eP(R) \subseteq E(R)$ かつ $P(R)e \subseteq E(R)$ が成り立てば, e は中心的べき等元である。

注意. [2, Theorem 4.3] で与えられた環 R を考えると，定理6において "R が von Neumann 正則環である" という仮定を "R が右かつ左半遺伝環である" に置き換えると成り立たないことがわかる。

References

[1] Dolžan, D.: Multiplicative sets of idempotents in a finite ring, J. Algebra 304 (2006), no. 1, 271–277.

[2] Grover, H. K., Khurana, D. and Singh, S.: Rings with multiplicative sets of primitive idempotents, Communications in Algebra 37 (2009), 2583–2590.

[3] Lam, T. Y.: A First Course in Noncommutative Rings, Grad. Texts in Math., Vol. 131. Berlin: Springer-Verlag,.