

# 臨界線上におけるリーマンゼータ関数の オイラー積の挙動について

九州大学大学院数理学研究院 赤塚 広隆 (Hirotaka Akatsuka)\*

Faculty of Mathematics, Kyushu University

## 1 導入

リーマンゼータ関数  $\zeta(s)$  は、オイラー積表示

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

を持つ。オイラー積が  $\operatorname{Re}(s) > 1$  で絶対収束することから、 $\operatorname{Re}(s) > 1$  で  $\zeta(s) \neq 0$  となることが分かる。このように、オイラー積の収束と  $\zeta(s)$  の零点は密接な関係を持っていると思われる。そこで、本稿では次の問題を考えてみたい。

**問題.**  $1/2 \leq \operatorname{Re}(s_0) \leq 1$  なる  $s_0 \in \mathbb{C}$  を取り固定する。このとき、部分オイラー積

$$\prod_{p \leq x} (1 - p^{-s_0})^{-1}$$

は  $x \rightarrow \infty$  のときどのような挙動を示すか。

まず、 $\operatorname{Re}(s_0) = 1$  の場合、次の結果は良く知られている。

**事実.** (1) (Mertens, [Me, p.53])

$$\prod_{p \leq x} (1 - p^{-1})^{-1} \sim e^\gamma \log x \quad (x \rightarrow \infty).$$

ただし、 $\gamma := \lim_{N \rightarrow \infty} (\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N)$  はオイラ一定数である。

(2)  $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  に対し、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{p \leq x} (1 - p^{-1-it_0})^{-1} = \zeta(1 + it_0).$$

---

\*日本学術振興会特別研究員 PD

上記事実の証明は [Ti, §3.15] にある. また, 素数定理

$$|\{p \leq x : \text{素数}\}| = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right) \quad (1.1)$$

を用いることで, 部分オイラー積の対数を取ったものについて次のことは比較的容易に分かる.

**事実.**  $1/2 < \operatorname{Re}(s_0) < 1$  なる  $s_0 \in \mathbb{C}$  を一つ固定する. このとき,

$$-\sum_{p \leq x} \log(1 - p^{-s_0}) = \frac{x^{1-s_0}}{(1-s_0)\log x} + O\left(\frac{x^{1-\operatorname{Re}(s_0)}}{(\log x)^2}\right). \quad (1.2)$$

ただし,  $\log(1 - p^{-s_0})$  は  $\operatorname{Im} \log(1 - p^{-s_0}) \in (-\pi/2, \pi/2)$  となるように枝を選ぶものとする.

式 (1.2) 右辺の主要項  $x^{1-s_0}/((1-s_0)\log x)$  は素数定理 (1.1) の主要項  $x/\log x$  に対応している. また, よく知られているように, 素数定理の主要項は  $\zeta(s)$  の一位の極  $s=1$  に対応している. よって, 式 (1.2) の主要項は一位の極  $s=1$  が原因で現れるものと考えられる. よって, 冒頭の問題について上述の事実よりも深い結果を得ようとすると, 極  $s=1$  の寄与を適切に取り除くことが重要である. 本稿では, 極の寄与をどのように取り除けばいいか, および冒頭の問題と素数分布,  $\zeta(s)$  の零点分布との関係について,  $\operatorname{Re}(s_0) = 1/2$  の場合を中心に考えていく.

本稿は準備中の論文 [Ak] の一部の要約である. 証明の細部や本稿で述べられなかった結果についてはそちらをご覧ください.

**謝辞.** 本稿は, 京都大学数理解析研究所における研究集会「解析的整数論とその周辺」(2012年10月)での講演に基づくものです. 研究集会の主催者である知念宏司氏には, 講演の機会をいただいたことに深く感謝申し上げます.

## 2 $L$ 関数の臨界線上における部分オイラー積

前節では, 冒頭の問題を考える際には  $\zeta(s)$  の一位の極  $s=1$  の寄与を適切に除外する必要があることを述べた. 一方, (極を持たない) 整関数となるゼータ関数も多く存在する. そのようなゼータ関数の場合, 部分オイラー積の挙動はどのようになっているだろうか. これについては, B-SD 予想を動機とする先行研究があるので, 本節ではそれを説明する. 記述を易しくため, 楕円曲線の  $L$  関数ではなく, ディリクレ  $L$  関数の場合で説明することにする. 以下に述べるのは, ある  $L$  関数のクラスに対する K. Conrad[Co] の結果を, ディリクレ  $L$  関数の場合に特殊化したものである.

$q$  を 2 以上の整数,  $\chi$  を  $\text{mod } q$  の原始的ディリクレ指標とする. このとき,  $\chi$  に付随するディリクレ  $L$  関数のオイラー積表示は

$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} \quad (2.1)$$

となる. オイラー積は  $\text{Re}(s) > 1$  で絶対収束し,  $L(s, \chi)$  は整関数として解析接続を持つ.  $L(s, \chi)$  の部分オイラー積について, K. Conrad は次の結果を得た.

**定理 A.** ([Co, Theorem 6.3])  $q, \chi$  を上記のように取り固定する. このとき, 次の (1)–(3) は同値である:

(1)  $\psi(x, \chi) := \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n)$  とおくと,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $\psi(x, \chi) = o(x^{1/2} \log x)$  が成り立つ. ただし,  $\Lambda(n)$  は von Mangoldt 関数である.

(2) ある  $t_0 \in \mathbb{R}$  に対して,

$$(\log x)^m \prod_{p \leq x} (1 - \chi(p)p^{-\frac{1}{2} - it_0})^{-1} \quad (2.2)$$

が  $x \rightarrow \infty$  で 0 以外の値に収束する. ここで,  $m$  は  $L(s, \chi)$  の  $s = \frac{1}{2} + it_0$  における零点の位数である.

(3) 任意の  $t_0 \in \mathbb{R}$  に対して, 式 (2.2) は  $x \rightarrow \infty$  で 0 以外の値に収束する.

定理 A の条件 (1) についてコメントする. まず, 条件 (1) は  $\chi$  を固定したときの評価であり,  $\chi$  に関して一様に成り立つことまでは主張していないことに注意する. また, 無条件には  $\psi(x, \chi) = o(x)$  が成り立つこと, および  $L(s, \chi)$  に対するリーマン予想と  $\psi(x, \chi) = O(x^{1/2}(\log x)^2)$  は同値であることが知られている. さらに,  $L(s, \chi)$  のリーマン予想を仮定しても,  $\psi(x, \chi) = O(x^{1/2}(\log x)^2)$  よりも強い評価は現在のところ知られていない. よって, 定理 A の条件 (1)–(3) は  $L(s, \chi)$  に対するリーマン予想よりも強い主張であると言える.

もし式 (2.2) が 0 以外の収束値を持つ場合, 収束値はどのような値になるのだろうか. それに答えるのが Conrad の次の結果である:

**定理 B.** ([Co, Theorem 5.11]) 定理 A の条件 (1)–(3) が成立すると仮定する. このとき, 式 (2.2) は  $x \rightarrow \infty$  で次の値に収束する:

$$e^{-m\gamma} \frac{L^{(m)}(\frac{1}{2} + it_0, \chi)}{m!} \times \begin{cases} \sqrt{2} & \chi^2 \text{ が単位指標かつ } t_0 = 0 \text{ のとき,} \\ 1 & \text{その他.} \end{cases}$$

ここで,  $L^{(m)}(s, \chi)$  は  $L(s, \chi)$  の  $m$  階導関数である.

定理 A の条件が成立する場合, 任意の  $t_0 \in \mathbb{R}$  に対し,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{p \leq x} (1 - \chi(p) p^{-\frac{1}{2} - it_0})^{-1} \\ &= L\left(\frac{1}{2} + it_0, \chi\right) \times \begin{cases} \sqrt{2} & \chi^2 \text{ が単位指標かつ } t_0 = 0 \text{ のとき,} \\ 1 & \text{その他} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

が成り立つ. 実際,  $L(\frac{1}{2} + it_0, \chi) \neq 0$  ならば定理 B より直ちに従う.  $L(\frac{1}{2} + it_0, \chi) = 0$  の場合,  $m \geq 1$  だから定理 A より式 (2.3) の左辺は 0 になることに注意すると分かる. よって, 定理 A の条件を信じることにすると, オイラー積表示 (2.1) は臨界線上まで有効な表示である, と見ることができる. なお,  $\sqrt{2}$  が出てくる理由については, 証明に言及しないと説明できない.  $\zeta(s)$  の場合にも同様の現象が起こるので, §4 で説明することにしたい.

本節の最初にも述べたように, 部分オイラー積の収束の研究の原点は B-SD 予想にある. 楕円曲線の  $L$  関数の中心点  $s = 1$  における部分オイラー積の挙動については, [Go, Co, KM]などを参照いただきたい.

### 3 主結果

§2 で紹介した K. Conrad の結果をリーマンゼータ関数の場合で定式化するには, §1 で説明したように極  $s = 1$  の寄与を適切に取り除く必要がある. それを実行したのが本稿の主要な結果である. 得られた結果を述べるため, 記号を導入する.  $1/2 \leq \operatorname{Re}(s_0) < 1$  に対し,

$$E(s_0; x) := (\log x)^m \prod_{p \leq x} (1 - p^{-s_0})^{-1} \left/ \exp \left[ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{1+\varepsilon}^x \frac{du}{u^{s_0} \log u} - \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \right. \quad (3.1)$$

とおく. ただし,  $m := m(s_0)$  は  $\zeta(s)$  の  $s = s_0$  における零点の位数である. このとき, 定理 A に対応する結果は次のように述べることができる.

**定理 1.** 次の (a)–(c) は同値である.

- (a)  $\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$  とおくと,  $\psi(x) = x + o(x^{1/2} \log x)$  が成り立つ.
- (b)  $t_0 \in \mathbb{R}$  が存在し,  $E(\frac{1}{2} + it_0; x)$  が  $x \rightarrow \infty$  で 0 以外の値に収束する.
- (c) 任意の  $t_0 \in \mathbb{R}$  に対し,  $E(\frac{1}{2} + it_0; x)$  が  $x \rightarrow \infty$  で 0 以外の値に収束する.

(誤差項なしの) 素数定理は  $\psi(x) \sim x$  ( $x \rightarrow \infty$ ) と同値であり, これは正しいことが知られている. また, リーマン予想は  $\psi(x) = x + O(x^{1/2}(\log x)^2)$  と同値であり, リー

マン予想を仮定したときの現時点での最良評価は、この  $\psi(x) = x + O(x^{1/2}(\log x)^2)$  である。よって、定理1の条件 (a)-(c) はリーマン予想よりも強い条件である。一方、 $\psi(x)$  に対する究極の予想として、Montgomery[Mo, p.16] は

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{1/2}(\log \log \log x)^2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi}, \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{1/2}(\log \log \log x)^2} \stackrel{?}{=} -\frac{1}{2\pi} \quad (3.2)$$

と予想した。これら両方が正しいければ定理1の条件 (a) が成立し、定理1の条件は正しいであろうと期待される。また、Cramér[Cr, Chapter III] はリーマン予想の成立を仮定したとき、

$$\int_2^X (\psi(x) - x)^2 \frac{dx}{x} \ll X \quad (3.3)$$

を証明している。定理1の条件 (a) の統計的妥当性を見るため、条件 (a) にそぐわない  $x$  の集合として  $\mathcal{E}_{X,\varepsilon} := \{x \in [X, 2X] : |\psi(x) - x| \geq \varepsilon X^{1/2} \log X\}$  とおく。すると、容易に

$$\int_X^{2X} (\psi(x) - x)^2 \frac{dx}{x} \geq \frac{\varepsilon^2 (\log X)^2}{2} \text{meas}(\mathcal{E}_{X,\varepsilon})$$

が成り立つことが分かる。ここで、 $\text{meas}$  は  $\mathbb{R}$  上のルベーグ測度である。これと式 (3.3) から、リーマン予想の仮定の下、

$$\frac{1}{X} \text{meas}(\mathcal{E}_{X,\varepsilon}) \ll \frac{1}{\varepsilon^2 (\log X)^2} \quad (3.4)$$

が成り立つ。 $\frac{1}{X} \text{meas}$  は  $[X, 2X]$  上の確率測度であることに注意すると、 $\delta \in (0, 1]$  を固定したとき、 $\varepsilon \geq (\log X)^{-1+\delta}$  ならば  $\mathcal{E}_{X,\varepsilon}$  の測度は小さい、と見ることができる。

また、式 (3.1) の  $\exp[\dots]$  がディリクレ  $L$  関数の場合の結果には現れなかった項であり、これが極  $s = 1$  の寄与 (の一部) を表していると見ることができる。

次の結果は、定理 B に対応する結果である。

**定理 2.** 定理1の条件 (a)-(c) が成立すると仮定する。任意の  $t_0 \in \mathbb{R}$  に対し  $s_0 = \frac{1}{2} + it_0$  とおく。そのとき、次が成り立つ。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E(s_0; x) = e^{(1-m)\gamma(s_0 - 1)} \frac{\zeta^{(m)}(s_0)}{m!} \times \begin{cases} \sqrt{2} & t_0 = 0 \text{ のとき,} \\ 1 & \text{その他.} \end{cases} \quad (3.5)$$

ただし、 $\zeta^{(m)}(s)$  は  $\zeta(s)$  の  $m$  階導関数である。

定理 B と比較すると、新たに  $e^\gamma(s_0 - 1)$  が現れている。これは、式 (3.1) の分母の出現により出てくるもので、 $e^\gamma(s_0 - 1)$  も極  $s = 1$  の寄与と見ることができる。具体的に言うと、ガンマ関数の公式から従う次の等式から新たな項が現れる:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{du}{u^z \log u} - \log \frac{1}{\varepsilon} \right) = -\gamma - \log(z - 1) \quad (\text{Re}(z) > 1). \quad (3.6)$$

ただし、右辺の対数の枝は  $\text{Im} \log(z-1) \in (-\pi/2, \pi/2)$  と取るものとする。定理 1, 2 の新たな項は式 (3.6) で形式的に  $z = s_0$  としたものとほぼ一致する。実際、証明においては式 (3.6) を用いて極  $s = 1$  の寄与を制御することになる。

式 (3.5) の収束の速さについては、次の結果を得た。

**定理 3.**  $t_0 \in \mathbb{R}$  とし、 $s_0 = \frac{1}{2} + it_0$  とおく。式 (3.5) の右辺を  $C(s_0)$  とおく。Montgomery の予想 (3.2) が共に正しければ、次が成り立つ：

$$E(s_0; x) = C(s_0) \left( 1 + O \left( \frac{(\log \log \log x)^2}{\log x} \right) \right).$$

ただし、 $O$ -定数は  $t_0$  にのみ依存する。

$\log \log \log x$  は極めて遅く  $+\infty$  に発散する。よって、計算機で式 (3.5) の妥当性を見ようとする、 $E(s_0; x)$  はだいたい  $1/\log x$  の速さで  $C(s_0)$  に収束するものと期待することができる。

表 1:  $E(1/2; x)$  と  $C(1/2)$ .

$x$	$10^5$	$10^6$	$10^7$	$10^8$	$10^9$	$C(1/2)$
$E(1/2; x)$	1.9028	1.8068	1.8008	1.8283	1.8478	1.8391

実際に  $s_0 = 1/2$  の場合について  $E(1/2; x)$ ,  $C(1/2)$  を計算してみると、表 1 のようになる。 $x \in \{10^6, 10^7, 10^8, 10^9\}$  については、 $E(1/2; x)$  が期待される収束値  $C(1/2)$  と最初の 2 桁が一致し、定理 2 がある程度は妥当である、と見ることができる。ただし、数値計算から収束の妥当性をより慎重に判断するには、表 1 よりも多くのデータが必要である。実際、リーマン予想の帰結 (3.4) を用いると、 $E(1/2; x)$  と  $C(1/2)$  が離れているような  $x$  の集合の測度が小さい値で上から押さえられることを (リーマン予想の成立下で) 示すことができる。よって、収束を数値的に見るにはもっと多くのデータが必要である。より多くの  $x$  に対する  $E(1/2; x)$  の数値計算例については [Ak] をご覧いただきたい。

最後に、 $1/2 < \text{Re}(s_0) < 1$  の場合について、定理 1, 定理 2 に対応する結果を述べる。

**定理 4.**  $\sigma_0 \in (1/2, 1)$  とする。このとき、次の (a)–(d) は同値である。

- (a)  $\psi(x) = x + O(x^{\sigma_0})$ .
- (b)  $t_0 \in \mathbb{R}$  が存在して、 $E(\sigma_0 + it_0; x)$  が  $x \rightarrow \infty$  で 0 以外の値に収束する。
- (c) 任意の  $t_0 \in \mathbb{R}$  に対して、 $E(\sigma_0 + it_0; x)$  が  $x \rightarrow \infty$  で 0 以外の値に収束する。

(d)  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$  なる任意の  $s \in \mathbb{C}$  に対して  $\zeta(s) \neq 0$  が成り立つ。  
 以上の (a)–(d) が成り立つならば、任意の  $t_0 \in \mathbb{R}$  に対し、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E(s_0; x) = e^{(1-m)\gamma} (s_0 - 1) \frac{\zeta^{(m)}(s_0)}{m!}$$

が成り立つ。ただし、 $s_0 := \sigma_0 + it_0$  とおいた。

定理 1, 定理 2 とほぼ同じような結果であるが、定理 1 の条件 (a)–(c) はリーマン予想「 $\operatorname{Re}(s) > 1/2 \implies \zeta(s) \neq 0$ 」よりも強い条件であったのに対し、定理 4 では非零領域に関する条件 (d) と同値になる点が大きく異なっている。また、定理 1 の条件 (a) は、定理 4 の条件 (a) で形式的に  $\sigma_0 = 1/2$  としたものとは違いがある。これらの違いは、次の二つの事実から生じるものである。

**事実.** (Grosswald, [Gr])  $\theta := \sup\{\operatorname{Re}(\rho) : \zeta(\rho) = 0\}$  とおく。  $1/2 < \theta < 1$  ならば  $\psi(x) = x + O(x^\theta)$  が成り立つ。

**事実.** (Littlewood, [Li, HL])  $x \rightarrow \infty$  のとき、 $\psi(x) = x + \Omega_\pm(x^{1/2} \log \log \log x)$  が成り立つ。

上の二つの事実から、ある  $\sigma_0 > 1/2$  に対し「 $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0 \implies \zeta(s) \neq 0$ 」が真ならば  $\psi(x) = x + O(x^{\sigma_0})$  が成り立つが、決して  $\psi(x) = x + O(x^{1/2})$  は成立しないことが分かる。このことが定理 1 と定理 4 に微妙な違いを生み出している。

## 4 証明の方針

定理 1, 定理 2 の証明の方針のみ説明する。詳細は [Ak] をご覧いただきたい。

最初に定理 1 の証明の概略を説明する。まず、条件 (b), (c) を考察する。 $t_0 \in \mathbb{R}$  とし、 $s_0 = \frac{1}{2} + it_0$  とする。 $E(s_0; x)$  に現れる積は扱いにくいので、対数を取り級数表示に書き換える：

$$-\sum_{p \leq x} \log(1 - p^{-s_0}) = \sum_{p \leq x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks_0}}. \quad (4.1)$$

ここで、左辺の対数枝は  $\operatorname{Im} \log(1 - p^{-s_0}) \in (-\pi/2, \pi/2)$  となるように取った。素数定理を用いて和の順序を変更し、次を得る：

**補題 1.**  $t_0, s_0$  を上のように定める。このとき、次が成り立つ。

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^{s_0} \log n} = \sum_{p \leq x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks_0}} + \begin{cases} -\frac{1}{2} \log 2 + O((\log x)^{-1}) & t_0 = 0 \text{ のとき,} \\ O((\log x)^{-1}) & t_0 \neq 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

ただし、 $O$ -定数は  $t_0$  にのみ依存する。

注意. この補題の  $t_0$  に関する場合分けが定理 2 の場合分けと直結しているので, 場合分けが必要な理由を補題の証明のスケッチも兼ねて説明したい. 左辺は,

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^{s_0} \log n} = \sum_{\substack{p, k \\ p^k \leq x}} \frac{1}{kp^{ks_0}} = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p^{s_0}} + \sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{1}{2p^{2s_0}} + \cdots \quad (4.2)$$

と書けることに注意する. ここで, 2 つ目の等式は  $k = 1, 2, \dots$  を書き並べただけである. よって,

$$\sum_{p \leq x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks_0}} - \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^{s_0} \log n} = \frac{1}{2} \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{p^{2s_0}} + \cdots \quad (4.3)$$

となる. 各  $t_0 \in \mathbb{R}$  に対し  $c(t_0) \in \mathbb{R}$  が存在して

$$\sum_{p \leq y} \frac{1}{p^{2s_0}} = \sum_{p \leq y} \frac{1}{p^{1+2it_0}} = \begin{cases} \log \log y + c(0) + O((\log y)^{-1}) & t_0 = 0 \text{ のとき,} \\ c(t_0) + O((\log y)^{-1}) & t_0 \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となることに注意すると, 式 (4.3) の右辺第一項は,

$$\frac{1}{2} \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \frac{1}{p^{2s_0}} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \log 2 + O((\log x)^{-1}) & t_0 = 0 \text{ のとき,} \\ O((\log x)^{-1}) & t_0 \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる. つまり, 補題の場合分け, および定理 2 の  $\sqrt{2}$  に関する場合分けは, 式 (4.1) と (4.2) の  $k = 2$  の部分から生じている. 定理 B もほぼ同様の理由で  $\sqrt{2}$  に関する場合分けが起きている.

補題 1 より, 定理 1 の条件 (b), (c) は

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^{s_0} \log n} + m \log \log x - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{1+\varepsilon}^x \frac{du}{u^{s_0} \log u} - \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (4.4)$$

が  $x \rightarrow \infty$  で収束すること, と書き換えることができる.<sup>1</sup> 後は,

$$A(x) := \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^{s_0} \log n}$$

と書いたとき,

$$\psi(x) = \int_{\uparrow 2}^x u^{s_0} \log u dA(u), \quad A(x) = \int_{\uparrow 2}^x \frac{d\psi(u)}{u^{s_0} \log u} \quad (4.5)$$

<sup>1</sup>実際には, 上で説明した対数枝の取り方で  $E(s_0; x)$  の対数を取ったときに収束を保つか, という議論が必要である.



等に注意すれば, 定理1を証明することができる. 実際, (c) $\implies$ (b)は自明, (b) $\implies$ (a)も(4.5)の第一式を部分積分することで容易に示すことができる. 一方, (a) $\implies$ (c)は,  $\psi(x)$ の明示公式や $\zeta(s)$ が位数1の有理型関数であることなど,  $\zeta(s)$ の零点に立ち入った議論が必要になる.

次に定理2の証明の概略を説明する. 簡単のため,  $t_0 = 0$ , 即ち  $s_0 = 1/2$  の場合のみ説明する. 式(4.4)で  $s_0 = 1/2$ ,  $m = 0$  としたものが  $x \rightarrow \infty$  のときに収束することを仮定する. そのとき, その収束値が  $\log(-\zeta(1/2)/2) + \gamma$  となることを示せばよい. これを示すため,

$$F(s; x) := \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^s \log n} - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{1+\varepsilon}^x \frac{du}{u^s \log u} - \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (4.6)$$

とおく.  $F(1/2; x)$  が式(4.4)で  $s_0 = 1/2$  としたものに一致することに注意する.  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(s; x)$  に対し次の二つの考察を行う.

まず,  $\operatorname{Re}(s) > 1$  に対し,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(s; x) = \log \zeta(s) + \gamma + \log(s-1) \quad (4.7)$$

である. これは,  $\operatorname{Re}(s) > 1$  でのディリクレ級数表示  $\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n)/(n^s \log n)$  と式(3.6)よりただちに従う. また, 定理1の条件(a)-(c)の下ではリーマン予想が成り立つので, 式(4.7)により  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(s; x)$  は  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1/2\}$  と  $s = 1/2$  の近傍の合併領域まで解析接続されることに注意する. 一方,  $F(1/2; x)$  の  $x \rightarrow \infty$  での収束を仮定すると, 任意の固定された  $H > 0$  に対し  $x \rightarrow \infty$  のとき  $F(s; x)$  が closed sector  $s \in S_H := \{\sigma + it : |t| \leq H(\sigma - \frac{1}{2})\}$  上一様収束することが証明できる. これにより, 式(4.6)で  $x \rightarrow \infty$  としたものは closed sector  $S_H$  上連続, open sector  $S_H^\circ = \{\sigma + it : |t| < H(\sigma - \frac{1}{2})\}$  で正則な関数である. 以上の二つの考察を踏まえ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \downarrow 1/2$  の極限を取ることで,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \log n} - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{1+\varepsilon}^x \frac{du}{\sqrt{u} \log u} - \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \right] = \log \left( -\frac{1}{2} \zeta(1/2) \right) + \gamma$$

を得る. これに補題1を適用し  $\exp$  を取ることで, 定理2で  $s_0 = 1/2$  としたものを得る.

最後に,  $F(s; x)$  の一様収束性についてコメントする. 直接適用することはできないが, 考え方の基礎となるのは, 初等解析におけるアーベルの定理<sup>2</sup> のディリクレ級数版と言える次の事実である (この事実の証明等は [MV, §1.2] などをご覧いただきたい).

<sup>2</sup>アーベルの名がつく定理はたくさんあるので定理の主張を書いておくと, 「べき級数は収束円の境界上の点で収束するかは分からないが, 収束するとすればその点で連続である」というものである.

**事実.**  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を複素数列とし,  $D(s; x) := \sum_{n \leq x} a_n n^{-s}$  とおく. ある  $s_0 := \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{C}$  に対し,  $D(s_0; x)$  が  $x \rightarrow \infty$  で収束すると仮定する.  $H > 0$  を任意に取り固定する. 以上の設定の下,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $D(s; x)$  は  $s \in \mathcal{S}_H := \{\sigma + it : |t - t_0| \leq H(\sigma - \sigma_0)\}$  上一様収束する.

この事実の証明で鍵となるのは,  $D(s; x)$  のスティルチェス積分表示

$$D(s; x) = \int_{\uparrow 1}^x u^{s_0 - s} dD(s_0; u)$$

である. そこで, 式(4.6)をスティルチェス積分表示し, 上の事実の証明に習うことで,  $x \rightarrow \infty$  のときの式(4.6)の一様収束性を得た.

## 参考文献

- [Ak] H. Akatsuka, The Euler product of the Riemann zeta-function in the critical strip, in preparation.
- [Co] K. Conrad, Partial Euler products on the critical line, *Canad. J. Math.* **57** (2005) 267–297.
- [Cr] H. Cramér, Some theorems concerning prime numbers, *Arkiv för Mat. Astr. Fys.* **15** no.5 (1921) 33 pages. [Collected works, Vol. 1, 138–170.]
- [Go] D. Goldfeld, Sur les produits partiels eulériens attachés aux courbes elliptiques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **294** (1982) 471–474.
- [Gr] E. Grosswald, Sur l'ordre de grandeur des différences  $\psi(x) - x$  et  $\pi(x) - lix$ , *C. R. Acad. Sci. Paris* **260** (1965) 3813–3815.
- [HL] G. H. Hardy and L. E. Littlewood, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes, *Acta Math.* **41** (1918) 119–196.
- [KM] W. Kuo and R. Murty, On a conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, *Canad. J. Math.* **57** (2005) 328–337.
- [Li] J. E. Littlewood, Sur la distribution des nombres premiers, *C. R. Acad. Sci. Paris* **158** (1914) 1869–1872. [Collected Papers, Vol. II, 829–832.]

- [Me] F. Mertens, Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, *J. Reine Angew. Math.* **78** (1874) 46–72.
- [Mo] H. L. Montgomery, The zeta function and prime numbers, *Proceedings of the Queen's Number Theory Conference 1979* (1980) 1–31.
- [MV] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative number theory I*, Cambridge studies in advanced mathematics **97**, Cambridge University Press (2007) xviii+552 pages.
- [Ti] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function* (2nd ed.), revised by D.R. Heath-Brown, Oxford Univ. Press (1986) x+412 pages.