数理解析研究所講究録
第 1874 巻 2014 年 198-209

Multidimensional zeta distributions and infinite divisibility

青山崇洋 中村隆
(東京理科大学理工学部)

概要

本論説では多次元ゼータ分布に関する我々の論文 [1] について解説する．手短に言えば，多次元のゼータ分布を Euler 積により定義し，それが無限分解可能あるいは特性関数にすらにならないかを判定する必要充分条件を与えたことが我々の主結果である．本解説は 2012 年度確率論シンポジウムの講究録に寄稿予定の「整数論を用いた多重級数と多次元離散型確率分布の関係について」と同時に執筆している．確率論は本文，整数論の基礎的事項についてはそちらにおいて簡単に触れているので，双方に重複する箇所も含まれるが，興味のある読者は必要に応じて 2 編併せて読んで頂きたい．

目次

1 確率論の基礎的事項

コイン投げ, サイコロを振る等ランダムな現象を数学的に捉えることが確率論である．本節では確率空間の定義から確率過程の構成までについて簡単に述べる．ただし, 端的にまとめた為に非常に雑な紹介となっている．確率論の基礎を学ぶ文献としてはデュレット [2] を挙げておく．

1.1 確率空間と確率変数

Ω を集合, $\mathcal{F}$ を Ω により生成される σ 加法族, P を $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の測度とする. このとき P が確率測度 (つまり $\mathrm{P}(\Omega)=1$) であるとき測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ を特に確率空間という. 例としてコイン投げの場合, $\Omega=\{\{$ 表 $\}, \{$ 裏 $\}\}$, $\mathcal{F}=\{\phi, \{$ 表 $\}, \{$ 裏 $\}, \Omega\}$, $\mathrm{P}(\emptyset)=0$, $\mathrm{P}(\{$ 表 $\})=\mathrm{P}(\{$ 裏 $\})=1/2$, $\mathrm{P}(\Omega)=\mathrm{P}(\{$ 表 $\}\cup\{$ 裏 $\})=\mathrm{P}(\{$ 表 $\})+\mathrm{P}(\{$ 裏 $\})=1$ と置くことにより確率空間を構成できる.

$\mathbb{R}^d$ を d 次元 Euclid 空間, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ をその Borel 集合体とする. 一般の確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ をより数学的に取り扱い易くする為に Ω から $\mathbb{R}^d$ の中への $\mathcal{F}$ 可測な関数 X を考える. 即ち各 $\omega\in\Omega$ に対し $X(\omega)\in\mathbb{R}^d$ が定まり, 全ての $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し $X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$ となることである. このとき $(\mathbb{R}^d,\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 P_X を $\mathrm{P}_X(B)=\mathrm{P}(X^{-1}(B))$, $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ によって定めるとき確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ が $(\mathbb{R}^d,\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d),\mathrm{P}_X)$ と同一視できる. これら X を確率変数, P_X を確率分布という. 逆に $\mathbb{R}^d$ 上の確率分布 P_X を先に与えて, それに対応する確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ を考えるときには X は P_X に従うという. 例として $\mathbb{R}$ 上の確率分布 P_X を $\mathrm{P}_X(\{a\})=\mathrm{P}_X(\{b\})=1/2$, $(a,b\in\mathbb{R})$ とし, 先のコイン投げの確率空間において $X(\{$ 表 $\})=a$, $X(\{$ 裏 $\})=b$ とすると, X が a となった場合には表, b となった場合には裏が出ることが確率 1/2 ずつで起こることを示している. つまり $X(\omega)$ は一般の集合 Ω の点 ω を $\mathbb{R}^d$ の点 (変数) とみなすことにより通常の解析学の議論に持ち込み易くするものである. また P_X の性質を知ることが対応する確率現象の性質を知ることそのものとなっている.

1.2 複数の確率現象の同時な試行

これまで 1 つのコイン投げ, サイコロ振る等の試行をどう捉えるかについて述べてきた. ここから同時に複数の施行を行うことについて考える. 先の例で用いたコインを 2 つ用意し, 同時に投げるとする. このときコイン 1 とコイン 2 の確率をそれぞれ P_1, P_2 とし, 出る目は互いに影響を及ぼさないとする. コイン 1,2 共に表が出る確率 $\mathrm{P}'(\{\{$ 表 $\},\{$ 表 $\}\})=\mathrm{P}_1(\{$ 表 $\})\times\mathrm{P}_2(\{$ 表 $\})=1/2\times1/2=1/4$ と与えられることは自然に考えらるが, 2 つの同時な試行による確率がこのように与えられることを独立であるといい, 結果に対して互いに影響を及ぼさないことを示している. またここでは $\mathrm{P}_1=\mathrm{P}_2=\mathrm{P}$ として議論しているが, このようなことを P_1, P_2 は同分布であるという. 独立性については確率変数の言葉を用いて正確に述べると次のようになる. n 個の $\mathbb{R}^d$ 値確率変数から成る族 $\{X_1,\ldots,X_n\}$ が独立であるとは, 任意の $B_1,\ldots,B_n\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し, $\mathrm{P}'(X_1\in B_1,\ldots,X_n\in B_n)=\mathrm{P}_1(X_1\in B_1)\cdots\mathrm{P}_n(X_n\in B_n)$ が成り立つことである. また無限個の族に対しては, その任意の有限部分族が独立となることである.

次に確率変数の和について述べる. 確率論においては独立かつ同分布な確率変数の和を考えることが多々ある. $\{X_k\}_{k=1}^n$ を独立同分布確率変数列とし, $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$ とする. このとき分布という意味では $\sum_{k=1}^n X_k\neq nX_1$ であることに注意する必要がある. 例えば先

のコイン投げにおいて $a=1, b=0$ とすると $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ の値はコインを n 個同時に投げて表の出た個数を表しているので単に 1 つ投げて出た値の n 倍とは意味が全く異なるからである. S_n はまたランダムな値を取る確率変数であるが, ここで S_n がどのような確率分布に従うかが問題となる. それを与えるものが確率分布の畳み込みである.

まず 2 個のコイン投げにおいてそれらの結果が従う分布について考えてみる. 2 個共に表が出る確率は $\mathrm{P}'(\{\{表\},\{表\}\}) = \mathrm{P}_1(\{表\})\times\mathrm{P}_2(\{表\}) = 1/2\times1/2 = 1/4$ と与えられることから, 共に裏が出る確率が $\mathrm{P}'(\{\{裏\},\{裏\}\}) = 1/4$ となることも同様である. ここで表と裏が一方ずつ出る確率については $\mathrm{P}'(\{\{表\},\{裏\}一個ずつ\}) = \mathrm{P}'(\{\{表\},\{裏\}\})+\mathrm{P}'(\{\{裏\},\{表\}\}) = \mathrm{P}_1(\{表\})\times\mathrm{P}_2(\{裏\})+\mathrm{P}_1(\{裏\})\times\mathrm{P}_2(\{表\}) = 1/2\times1/2+1/2\times1/2 = 1/2$ となることにも特に疑問はないかと思われる. これを先程の表が出た個数を表す確率変数 S_2 にあてはめてみると $\mathrm{P}(S_2=2)=\mathrm{P}(S_2=0)=1/4$, $\mathrm{P}(S_2=1)=1/2$ と同等である. また $\mathbb{R}$ 上の確率分布の言葉でいうと $\mathrm{P}_{S_2}(\{2\})=\mathrm{P}_{S_2}(\{0\})=1/4$, $\mathrm{P}_{S_2}(\{1\})=1/2$ である. P_{S_2} を P_{X_1}, P_{X_2} を用いて書き表す為に次を用意する. $\mathbb{R}^d$ 上の確率分布 μ_1,μ_2 に対し, $\mathbb{R}^d$ 上の確率分布 μ が μ_1 と μ_2 の畳み込みであるとは $\mu(B)=\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} 1_B(x_1+x_2)\mu_1(dx_1)\mu_2(dx_2)$, $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ と書けることである. ここで $1_B(x)$ は $B\in\mathbb{R}^d$ 上の定義関数とし, また μ を $\mu=\mu_1*\mu_2$ と書き表すこととする. $\mu_1=\mathrm{P}_{X_1}$, $\mu_2=\mathrm{P}_{X_2}$ とすると

$$\begin{aligned}\mu(\{2\}) &= \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} 1_{\{2\}}(x_1+x_2)\mathrm{P}_{X_1}(dx_1)\mathrm{P}_{X_2}(dx_2) = \int_{\mathbb{R}} 1_{\{2\}}(1+x_2)\mathrm{P}_{X_1}(\{1\})\mathrm{P}_{X_2}(dx_2)\\ &= \left(1_{\{2\}}(1+1)\mathrm{P}_{X_1}(\{1\})\mathrm{P}_{X_2}(\{1\})\right) = \mathrm{P}_{X_1}(\{1\})\mathrm{P}_{X_2}(\{1\}) = 1/4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(\{0\}) &= \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} 1_{\{0\}}(x_1+x_2)\mathrm{P}_{X_1}(dx_1)\mathrm{P}_{X_2}(dx_2) = \int_{\mathbb{R}} 1_{\{0\}}(0+x_2)\mathrm{P}_{X_1}(\{0\})\mathrm{P}_{X_2}(dx_2)\\ &= \left(1_{\{0\}}(0+0)\mathrm{P}_{X_1}(\{0\})\mathrm{P}_{X_2}(\{0\})\right) = \mathrm{P}_{X_1}(\{0\})\mathrm{P}_{X_2}(\{0\}) = 1/4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(\{1\}) &= \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} 1_{\{1\}}(x_1+x_2)\mathrm{P}_{X_1}(dx_1)\mathrm{P}_{X_2}(dx_2)\\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_{\{1\}}(0+x_2)\mathrm{P}_{X_1}(\{0\})\mathrm{P}_{X_2}(dx_2) + \int_{\mathbb{R}} 1_{\{1\}}(1+x_2)\mathrm{P}_{X_1}(\{1\})\mathrm{P}_{X_2}(dx_2)\\ &= \left(1_{\{1\}}(1+0)\mathrm{P}_{X_1}(\{1\})\mathrm{P}_{X_2}(\{0\}) + 1_{\{1\}}(0+1)\mathrm{P}_{X_1}(\{0\})\mathrm{P}_{X_2}(\{1\})\right)\\ &= \mathrm{P}_{X_1}(\{1\})\mathrm{P}_{X_2}(\{0\}) + \mathrm{P}_{X_1}(\{0\})\mathrm{P}_{X_2}(\{1\}) = 1/2\end{aligned}$$

より $\mu=\mathrm{P}_{S_2}$ であることがわかる. つまり μ_1,μ_2 を独立な 2 つの確率変数 X_1, X_2 が従う確率分布とするとき, それらの畳み込み $\mu=\mu_1*\mu_2$ は X_1+X_2 の従う確率分布である.

1.3 離散時間における確率過程と極限定理

先節では n 個の確率現象の同時な試行について考えてきたが, これを確率論においては同じ確率現象を n 回繰り返したものと捉えることが多々ある. つまり同じコインに番号を

つけて n 個同時に投げることと, 1つのコインを n 回投げることにより得られる結果は同じであるということである. このとき独立な確率変数列 $\{X_k\}$ を各時刻 k での試行の結果と捉えることにより, その和 S_n を時間に対しその値がランダムに増減する点列とみなせる. このような確率過程をランダムウォークという. 以後簡単の為, 時刻0での値つまり初期値を確率1で $0(S_0=0)$ とする. あるランダムウォーク $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ が与えられたとき, $\{X_k\}$ が独立であるとすると各時刻での増分が他の時刻の影響を受けないことを意味する. これを独立増分性という. また $\{X_k\}$ が同分布であるとき重なり合わない同じ時間間隔に対してその増分を表す分布が同分布である. これを定常増分性という. つまりコイン投げにおいて時刻3から時刻5に2回振ったときの増分 S_5-S_3 を表す分布は最初に2回振った増分 $S_2(=S_{5-3})$ と等しい. このような独立定常増分性を持つ確率過程が確率過程論において最も基本となる確率過程である.

通常 S_n は n を大きくしていくと, その取り得る値は発散していくと考えられる. しかしそれを適当に正規化すると, その挙動を具体的に捉えられることがある. 例えば $\{X_k\}$ が独立同分布であるとき $n^{-1}S_n$ の極限は X_k の期待値 (平均) に近づく. 具体的には先のコイン投げにおいて $n^{-1}S_n$ は X_k の期待値 $1/2(=0\times1/2+1\times1/2)$ に近づくことは想像できると思われる. これを大数の法則といい, 確率論における極限定理の代表的な1つである. 他の代表例としては, 大数の法則における平均からの誤差が正規分布によって評価できることを主張する中心極限定理がある.

1.4 無限分解可能分布と連続時間における確率過程の構成

ランダムウォーク S_T は離散的な時間 $T\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して考えられたものであるが, 次に連続的な時間 $t\geq0$ に対する確率過程はどのように構成すればよいかを考える. まず時刻1での挙動 $S_1=X_1$ が与えられたときこの X_1 に対しその n 等分割の時刻に対応する確率現象が存在するかが鍵となる. つまり $n\in\mathbb{N}$ に対し, 分布の意味で $X_1=X_{1/n,1}+\cdots+X_{1/n,n}$ となる独立同分布確率変数列 $\{X_{1/n,k}\}$ が存在するのかということである. もしこのような $\{X_{1/n,k}\}$ が存在した場合, 例えば $S_1=X_1$ に対し時刻2/3での挙動を表す分布は独立同分布確率変数 $X_{1/3,1},X_{1/3,2}$ を用いて $S_{2/3}=X_{1/3,1}+X_{1/3,2}$ と書けばよいということになる. 一般にある確率変数 X に対し, このような確率変数 $X_{1/n}$ が存在するとは限らない. そこで次の無限分解可能分布と呼ばれる確率分布のクラスを用意する. $\mathbb{R}^d$ 上の分布 μ が無限分解可能であるとは, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し, ある分布 μ_n が存在して $\mu=\mu_n^{n*}$ と書けることである. ここで μ^{n*} は分布 μ の n 回の畳み込みとする. 確率変数の言葉でいうと X が無限分解可能な確率変数であるとは, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し, ある確率変数 $X_{1/n}$ が存在し, それに従う独立同分布確率変数列 $\{X_{1/n,k}\}$ を用いて分布の意味で $X=X_{1/n,1}+\cdots+X_{1/n,n}$ と書けることである. 無限分解可能分布はその定義と一般的性質により任意の $t>0$ に対し $\mu=\mu_t^{t*}$ となる分布 μ_t と t 次の畳み込みに相当する μ^{*t} の存在が示せる. 従って, ある無限分解可能分布 μ を時刻 $1(S_1=X_1)$ の分布として与えると連続な時間 $t\geq0$ に対応する独立定常増分確率過程 S_t が構成できる. 逆にある独立定常増分確率過程 S_t が与えられた

ときには, その時刻 1(各時刻) での分布 μ は無限分解可能である. 言い換えると無限分解可能でない分布からは独立定常増分確率過程は構成できないことを示している. つまり無限分解可能分布とは独立定常増分確率過程と 1 対 1 に対応する確率分布のクラスであり, このことから確率論において非常に重要な役割を果たすことがわかる. 無限分解可能分布の例としては正規分布, ポアソン分布等があり, そうでない例としては一様分布, 二項分布等がある. 独立定常増分確率過程の例としてはブラウン運動, ポアソン点過程等があり, それらを総じて一般に Lévy 過程という. 確率論において無限分解可能分布の研究はこの Lévy 過程の性質を知ることに繋がる研究課題となっている.

2 $\mathbb{R}$ 上のゼータ分布とその Lévy–Khintchine の標準形

まず特性関数と Lévy–Khintchine の標準形に関する事柄を簡単にまとめる. 記号や用語は主に佐藤 [11] に基づく. その後我々の研究以前のゼータ分布の研究について紹介する. Riemann ゼータ関数については松本 [7], ゼータ分布については論文 [1] の参考文献などを参照して頂きたい.

2.1 特性関数と Lévy–Khintchine の標準形

$\mathbb{R}^d$ 上の分布 μ に対し, $\widehat{\mu}(z) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle}\mu(dx)$, $z \in \mathbb{R}^d$ によって定義される関数 $\widehat{\mu}(z)$ を μ の特性関数という. 特性関数 $\widehat{\mu}(z)$ は, $\widehat{\mu}(0) = 1$, $|\widehat{\mu}(z)| \le 1$, $\widehat{\mu}(-z) = \overline{\widehat{\mu}(z)}$, ただし $\bar{t}$ は複素数 t の複素共役, を充たし, $\mathbb{R}^d$ 上の一様連続関数となり, 正定符号性, 即ち任意の自然数 n に対して, $\sum_{k,l=1}^{n} \widehat{\mu}(z_k - z_l)\xi_k\overline{\xi_l} \ge 0$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^d$, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$, を持つことが知られている. 逆に $\mathbb{R}^d$ 上の関数がこれらの条件を充たせば, その関数は特性関数になることが知られている (確率論における Bochner の定理).

$d = 1$, 平均 $c > 0$ のポアソン分布は $\mu(\{k\}) := e^{-c}c^k/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\mu(B) := 0$, B は非負の整数を含まないとき, である. このとき $\widehat{\mu}(z) = \exp(c(e^{\mathrm{i}z} - 1))$, $z \in \mathbb{R}$ が成り立つ. $d = 1$, 平均 $\gamma \in \mathbb{R}$, 分散 $a > 0$ の Gauss 分布は $\mu(B) := (2\pi a)^{-1/2} \int_B e^{-(x-\gamma)^2/(2a)}$. このとき $\widehat{\mu}(z) = \exp(-az^2/2 + \mathrm{i}\gamma z)$, $z \in \mathbb{R}$. この拡張として, $\gamma \in \mathbb{R}^d$ と非負の定符号対称行列 A に対し, $\widehat{\mu}(z) = \exp(-\langle z, Az\rangle/2 + \mathrm{i}\langle\gamma, z\rangle)$, $z \in \mathbb{R}^d$ となる μ を $\mathbb{R}^d$ 上の Gauss 分布と呼ぶ. 一点 $\gamma \in \mathbb{R}^d$ に集中している分布を γ における δ 分布と呼び, δ_γ で表す. その特性関数は $e^{\mathrm{i}\langle\gamma,z\rangle}$ である. $\mathbb{R}^d$ 上の分布 μ が複合ポアソン分布であるとは, ある $c > 0$ と $\sigma(\{0\}) = 0$ を充たす $\mathbb{R}^d$ 上の分布 σ によって, μ の特性関数が $\widehat{\mu}(z) = \exp(c(\widehat{\sigma}(z) - 1))$, $z \in \mathbb{R}^d$ と表されることである. $d = 1$ で σ が 1 における δ 分布のときが, ポアソン分布である.

分布 μ が無限分解可能であるとは, 特性関数でいえば, たたみこみは掛け算に対応するから, $\widehat{\mu}(z)$ の n 乗根として特性関数になっているものが選べるということである. μ が無限分解可能ならば, その特性関数 $\widehat{\mu}(z)$ は零点を持たないことが知られている. $\mathbb{R}^d$ 上の分

布 μ が無限分解可能ならば,

$$\widehat{\mu}(z) = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + \mathrm{i}\langle\gamma, z\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle} - 1 - \frac{\mathrm{i}\langle z,x\rangle}{1+|x|^2}\right)\nu(dx)\right], \quad z \in \mathbb{R}^d, \quad (2.1)$$

と表される．ここで $\gamma \in \mathbb{R}^d$, A は非負の定符号対称行列，ν は $\mathbb{R}^d$ 上の測度で $\nu(\{0\}) = 0$, $\int_{\mathbb{R}^d}\min\{|x|^2, 1\}\nu(dx) < \infty$ であり，Lévy 測度と呼ばれ，ジャンプ型 Lévy 過程の構造を表すものである．(2.1) を Lévy–Khintchine の標準形と呼ぶ．(A, ν, γ) は分布 μ から一意に定まる．逆に上記の条件を充たす (A, ν, γ) が与えられたとき，(2.1) の右辺は $\mathbb{R}^d$ 上のある無限分解可能分布の特性関数である．さらに $\int_{|x|<1}|x|\nu(dx) < \infty$ を充たしていれば，(2.1) は

$$\widehat{\mu}(z) = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + \mathrm{i}\langle\gamma_0, z\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{\mathrm{i}\langle z,x\rangle} - 1\right)\nu(dx)\right], \quad z \in \mathbb{R}^d, \qquad (2.2)$$

ただし $\gamma_0 = \gamma - \int_{\mathbb{R}^d} x\,(1+|x|^2)^{-1}\,\nu(dx)$ と書ける．$\mathbb{R}^d$ 上の Gauss 分布は Lévy–Khintchine の標準形において $\nu = 0$ の場合である．複合ポアソン分布は Lévy 測度が $\nu = c\sigma$ の場合であり，その特性関数の表現は (2.2) おいて $A = 0$, $\gamma_0 = 0$ としたものである．無限分解可能分布は複合ポアソン分布の極限であることが知られている．

2.2 $\mathbb{R}$ 上のゼータ分布

Riemann ゼータ関数は以下の級数又は Euler 積で定義される．

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_p\left(1 - p^{-s}\right)^{-1}, \qquad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1. \qquad (2.3)$$

ただし $\prod_p$ は素数全体にわたる積とする．Euler 積表示から Riemann ゼータ関数は $1 < \sigma := \Re(s)$ で零点を持たない．Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は全 s 平面の有理型関数に解析接続されるが，本論説では絶対収束領域 $1 < \sigma$ のみを扱う (§3.5 も参照).

絶対収束領域 $\sigma > 1$ において, Riemann ゼータ関数を用いた以下の $\mathbb{R}$ 上の分布が古くから知られている．

定義 2.1. $n \in \mathbb{N}$, $\sigma > 1$ に対して, 確率変数 X_σ が以下の分布に従うとき *Riemann* ゼータ確率変数, その分布を *Riemann* ゼータ分布という．

$$\mathrm{P}_{X_\sigma}\left(\{-\log n\}\right) = \frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)}.$$

また, その特性関数 $f_\sigma(t)$, $t \in \mathbb{R}$ は以下の様にゼータ関数を正規化した形で与えられる．

$$f_\sigma(t) = \mathrm{E}e^{\mathrm{i}tX_\sigma} = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx}\mathrm{P}_{X_\sigma}(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mathrm{i}t\log n}\frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)} = \frac{\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)}{\zeta(\sigma)}.$$

Riemann ゼータ分布は最も古い文献として Khinchine [5] に記されているが, Gnedenko and Kolmogorov [3] に以下の命題がある．

命題 2.2. $\mathbb{R}$ 上の *Riemann* ゼータ分布は複合ポアソン分布 *(*無限分解可能*)* であり，その特性関数 f_σ は次のように書ける．

$$f_\sigma(t) = \exp\left\{\int_0^\infty \left(e^{-\mathrm{i}tx} - 1\right) N_\sigma(dx)\right\}.$$

ここで N_σ は $\mathbb{R}$ 上の有限測度で次のように書ける．

$$N_\sigma(dx) = \sum_p \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{r} p^{-r\sigma} \delta_{r\log p}(dx). \tag{2.4}$$

Lin and Hu [6] は Riemann ゼータ関数の代わりに Dirichlet 級数 $D(s) := \sum_{n=1}^\infty c(n)n^{-s}$ (ただし $c(n)$ は非負で恒等的に 0 ではない) を考えた．さらに $c(n)$ が完全乗法的，即ち任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $c(mn) = c(m)c(n)$ であるとき，$g_\sigma(t) := D(\sigma + \mathrm{i}t)/D(\sigma)$ は無限分解可能な特性関数になることを示し，その Lévy 測度も具体的に求めている．

ここで Lévy 測度 (2.4) の証明について述べる．これには Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の Euler 積表示を用いる．$\log(1-x)$, $|x| < 1$ の Taylor 展開により，

$$\begin{aligned}\log f_\sigma(t) &= \log\frac{\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)}{\zeta(\sigma)} = \sum_p \log\frac{1-p^{-\sigma}}{1-p^{-\sigma-\mathrm{i}t}} = \sum_p\sum_{r=1}^\infty \frac{1}{r}p^{-r\sigma}\left(p^{-r\mathrm{i}t}-1\right) \\ &= \sum_p\sum_{r=1}^\infty \frac{1}{r}p^{-r\sigma}\left(e^{-r\mathrm{i}t\log p}-1\right) = \int_{-\infty}^\infty \left(e^{-\mathrm{i}tx}-1\right)\sum_p\sum_{r=1}^\infty \frac{1}{r}p^{-r\sigma}\delta_{r\log p}(dx).\end{aligned}$$

Dirichlet 級数 $D(s)$ において $c(n)$ が完全乗法的であるときは，$D(s) = \prod_p (1 - c(p)p^{-s})^{-1}$ が成り立つ．即ち Euler 積を持つことより，$g_\sigma(t)$ の Lévy 測度は (2.4) において $1/r$ を $c(p)^r/r$ に変えたものであることは直ちにわかる．これらが我々の研究以前の無限分解可能なゼータ分布に関する結果である．

3 多次元ゼータ分布

我々の目的は，Gnedenko and Kolmogorov [3]，Lin and Hu [6] において 1 次元でのみ取り扱われてきたゼータ分布を多次元に拡張し，無限個の点に重みを持つ多次元離散型かつ確率過程論に応用可能な分布のクラスを導入することにある．即ち Dedekind ゼータ関数のような多重の Euler 積を多次元化 (多変数化) し，まずそれらを正規化した関数が導入し得る $\mathbb{R}^d$ 上の確率分布のクラスについて考え，更に無限分解可能性について議論することである．

我々の一連の結果において最も注視して頂きたい点は，特性関数となることが非自明な多変数関数に対してその充分条件を与えたことにある．これは後述のように，一般に今日確率分布として取り扱われる関数は，それらが特性関数となることがほぼ自明な場合しか存在せず，そうでない関数に対する議論は殆どされてこなかった為である．我々はその証

明にゼータ関数の値分布論を用いている．証明の鍵となるのは Kronecker の近似定理と Baker の定理であり，いずれも整数論で重大な位置を占める定理である．つまり，これまでほぼ触れられることのなかった多次元離散型の分布について，確率論において余り馴染みのない関数と理論を用いることにより初めてその性質についてまともに言及しつつあると考えている．

3.1 多次元多重 Euler 積

定義 3.1. $d, m \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$, $-1 \leq \alpha_{lp} \leq 1$, $\vec{a}_l \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq l \leq m$ に対し，*多次元多重 Euler 積* $Z_E(\vec{s})$ を次の無限積で定義する．

$$Z_E(\vec{s}) = \prod_p \prod_{l=1}^m \left(1 - \alpha_{lp} p^{-\langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle}\right)^{-1}, \qquad \min_{1 \leq l \leq m} \Re\langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle > 1. \tag{3.1}$$

この無限積が $\min_{1 \leq l \leq m} \Re\langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle > 1$ において絶対収束することは，不等式 $\sum_p p^{-\sigma} < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} < \infty$, $\sigma > 1$ と $1 + \sum_p p^{-\sigma} \leq \prod_p (1 + p^{-\sigma}) \leq \exp(\sum_p p^{-\sigma})$ からわかる．上記のような Euler 積で 1 次元のものは数論において，Dedekind ゼータ関数の類似もしくは一般化として広く扱われいる．例えば，河田 [4], Steuding [13] などを参照して頂きたい．

この Euler 積は $\min_{1 \leq l \leq m} \Re\langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle > 1$ において絶対収束しているので，零点を持たない．よって上記の多次元多重 Euler 積は無限分解可能な特性関数を生成するための必要条件を充たしている．一般にある多変数関数 f が与えられた際，それが特性関数と成るか否かについて判定することは困難である．その方法としては測度の半正値性を確認する為の Bochner の定理等いくつか存在するが，実際には対応する測度が確率分布となることがほぼ自明な関数しか取り扱われていない．特に多次元の離散分布に対応する関数については，ただ単に分布を定義する，もしくはその非無限分解可能性までを示した結果はいくつか存在するが，それ以外の有用な情報は殆ど得られていない．そこで我々は，今日多大な発展を見せる多重ゼータ関数を用いて，無限個の点に重みを持ちかつ無限分解可能性をも備える多次元離散型確率分布を導入することに着目した．本研究は多重無限級数と高次元積分論の関係を深く知ることで，これまで初等的にしか数式で描くことができなかった高次元の現象を取り扱える関数と理論の幅を広げることを目的としている．

3.2 多重ゼータ分布

以下，$\vec{s} := \vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t}$, $\vec{\sigma}, \vec{t} \in \mathbb{R}^d$ に対し，$f_{\vec{\sigma}}(\vec{t})$ を次のように定義する．

$$f_{\vec{\sigma}}\left(\vec{t}\right) := \frac{Z_E\left(\vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t}\right)}{Z_E(\vec{\sigma})}.$$

定理 3.2 ([1]). (3.1) において $\vec{a}_1 = \cdots = \vec{a}_m := \vec{a}$, $\alpha_{lp} = 0, \pm 1$ を充たすとする．このとき $f_{\vec{\sigma}}$ が特性関数となる必要充分条件は，任意の素数 p に対し，$\sum_{l=1}^m \alpha_{lp} \geq 0$.
さらにこのとき $f_{\vec{\sigma}}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の複合ポアソン分布の特性関数となり，その *Lévy* 測度 $N_{\vec{\sigma}}^{(\vec{a})}$ は有限かつ次のように書ける．

$$N_{\vec{\sigma}}^{(\vec{a})}(dx) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{r} \alpha_{lp}^r p^{-r\langle \vec{a}, \vec{\sigma} \rangle} \delta_{\log p^r \vec{a}}(dx).$$

この定理の証明において，後半部分，即ち任意の素数 p に対し $\sum_{l=1}^m \alpha_{lp} \geq 0$ であるとき，$f_{\vec{\sigma}}$ の Lévy 測度を求めることは，§2.2 で述べたように難しくはない．$\sum_{l=1}^m \alpha_l(q) < 0$ なる素数 q が存在するとき，$f_{\vec{\sigma}}$ が特性関数にならないことは，$|f_{\vec{\sigma}}(\vec{t_0})| > 1$ なる $\vec{t_0} \in \mathbb{R}^d$ が存在することにより示す．この証明の詳細は省略するが，核となる概念，定理とアイデアについて少し述べておく (概念と定理については [7, §6] など参照).

実数 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるとは，$\sum_{k=1}^n c_k \theta_k = 0$, $c_k \in \mathbb{Q}$ なるのは $c_1 = \cdots = c_n = 0$ に限られるということである．$p_1, \ldots, p_n$ を相異なる素数とすると，$\log p_1, \ldots, \log p_n$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である．実際，$\sum_{k=1}^n c_k \log p_k = 0$ なる $c_k \in \mathbb{Q}$ があったとする．分母を払うことにより c_k は整数として良い．すると $p_1^{c_1} \cdots p_n^{c_n} = 1$ であるから，素因数分解の一意性により $c_1 = \cdots = c_n = 0$ でなければならない．この証明からわかるように，例えば $\log 2$ と $\log 8$ は $\mathbb{Q}$ 上一次従属である．Kronecker の近似定理は，$\phi_1, \ldots, \phi_n$ を任意の実数，$\theta_1, \ldots, \theta_n$ を $\mathbb{Q}$ 上一次独立な実数とするとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$|t\theta_k - h_k - \phi_k| < \varepsilon$, $1 \leq k \leq n$ を充たす実数 t と整数 $h_1, \ldots, h_n$ が存在することを主張するものである．

定理 3.2 の証明では，無限積である $Z_E(\vec{s})$ を適当なところで打ち切った有限積 $Z_E^*(\vec{s})$ をまず考える．$\sum_{l=1}^m \alpha_l(q) < 0$ なる素数 q が存在するときは Kronecker の近似定理と $\{\log p_k\}$ の $\mathbb{Q}$ 上一次独立により $|Z_E^*(\vec{\sigma})| < |Z_E^*(\vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t_0})|$ なる $\vec{t_0}$ の存在がわかる．$Z_E(\vec{s})$ は絶対収束しているから $|Z_E(\vec{\sigma})| < |Z_E(\vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t_0})|$ も成り立つ，というのが証明の方針である．

3.3 高階ゼータ分布

以下，$\vec{a} \in \mathbb{R}^d$ に対し，$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^d$ が (LR) を充たすとは，$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^d$ が線形従属であるが，$\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的数 ψ_l $(1 \leq l \leq m)$ が存在し，$\vec{a}_l = \psi_l \vec{a}$ と書けることとする．また，$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^d$ が線形独立であるとき，(LI) と書くことにする．§3.2 の結果は本質的には 1 次元であったが，次の定理は多次元である．

定理 3.3 ([1]). (3.1) において $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ が (*LI*) または (*LR*) を充たすとする．このとき $f_{\vec{\sigma}}$ が特性関数となる必要充分条件は，任意の $1 \leq l \leq m$, 素数 p に対し，$\alpha_{lp} \geq 0$.
さらにこのとき $f_{\vec{\sigma}}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の複合ポアソン分布の特性関数となり，その *Lévy* 測度 $N_{\vec{\sigma}}$ は有限かつ次のように書ける．

$$N_{\vec{\sigma}}(dx) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{r} \alpha_{lp}^r p^{-r\langle \vec{a}_l, \vec{\sigma} \rangle} \delta_{\log p^r \vec{a}_l}(dx).$$

定理 3.2 の証明において重要であったのは，$\log p_1, \dots, \log p_n$ の $\mathbb{Q}$ 上一次独立性，即ち素因数分解一意性であった．定理 3.3 の証明の鍵となるのは次の事実 [8, Proposition 2.2] である．p_n を n 番目の素数とし，$1 = d_1, d_2, \dots, d_m$ を $\mathbb{Q}$ 上一次独立な実代数的数とする．このとき $\{\log p_n^{d_l}\}_{n\in\mathbb{N}}^{1\le l\le m}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である．この命題は，次の超越数論でよく知られた Baker の定理 (塩川 [10, §4] 参照) により証明される．$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を 0 でも 1 でもない代数的数，$\beta_1, \dots, \beta_n$ を $1, \beta_1, \dots, \beta_n$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的数とすると，$\alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ は超越数である．$\{\log p_n^{d_l}\}_{n\in\mathbb{N}}^{1\le l\le m}$ の $\mathbb{Q}$ 上一次独立性から Kronecker の近似定理が適用可能なので，有限積 $Z_E^*(\vec{s})$ に対して $|Z_E^*(\vec{\sigma})| < |Z_E^*(\vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t_0})|$ なる $\vec{t_0}$ の存在がわかる．従って定理 3.2 と同様に証明できる．

3.4 主結果

主定理を述べるために以下の多次元多重 Euler 積を用意する．

定義 3.4 (η 重 φ 階 Euler 積, $Z_E^{\eta,\varphi}(\vec{s})$, [1])**.** $d, \varphi, \eta \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$ とする．ここで $-1 \le \alpha_{lk}(p) \le 1$, $\vec{a}_l \in \mathbb{R}^d$, $1 \le l \le \varphi$, $1 \le k \le \eta$ に対し，η 重 φ 階 *Euler* 積 $Z_E^{\eta,\varphi}(\vec{s})$ を以下の無限積で定義する．

$$Z_E^{\eta,\varphi}(\vec{s}) := \prod_p \prod_{l=1}^{\varphi} \prod_{k=1}^{\eta} \left(1 - \alpha_{lk}(p) p^{-\langle \vec{a}_l, \vec{s}\rangle}\right)^{-1}, \qquad \min_{1\le l\le\varphi} \Re\langle \vec{a}_l, \vec{s}\rangle > 1. \tag{3.2}$$

このとき, 定理 3.2 と 3.3 を統合した形として次を得る．

主定理 1 ([1])**.** (3.2) において $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\varphi$ が *(LI)* または *(LR)*, $\alpha_{lk}(p) = 0, \pm 1$ を充たすとする．このとき $f_{\vec{\sigma}}$ が特性関数となる必要充分条件は, 任意の $1 \le l \le \varphi$, 素数 p に対し, $\sum_{k=1}^{\eta} \alpha_{lk}(p) \ge 0$. さらにこのとき $f_{\vec{\sigma}}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の複合ポアソン分布の特性関数となり, その *Lévy* 測度 $N_{\vec{\sigma}}^{\eta,\varphi}$ は有限かつ次のように書ける．

$$N_{\vec{\sigma}}^{\eta,\varphi}(dx) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\varphi} \sum_{k=1}^{\eta} \frac{1}{r} \alpha_{lk}(p)^r p^{-r\langle \vec{a}_l, \vec{\sigma}\rangle} \delta_{\log p^r \vec{a}_l}(dx).$$

この定理は，$\varphi = 1, \eta = m$ とすれば定理 3.2，$\varphi = m, \eta = 1$ とすれば定理 3.3，にそれぞれ一致する．つまり多次元多重のゼータ分布を書き表している．証明は定理 3.2 と 3.3 の証明を融合すればよい．即ち証明の鍵となるのは，Baker の定理，Kronecker の近似定理，ゼータ関数の絶対収束域における値分布論的手法である．

3.5 補足

以下のような疑問を持った読者もいるのかもしれない．

1. ゼータ分布は絶対収束領域でしか定義できないのか?

2. α_{lk} は複素数にはできないのか?

3. 数論，物理，経済などへの応用はないのか?

Riemann ゼータ分布ですら絶対収束領域を超えることはできない．それは以下のように示される．$1/\zeta(1)=0$，$\zeta(1+\mathrm{i}t)\neq 0$ (素数定理の証明の鍵) であるから，$\zeta(1+\mathrm{i}t)/\zeta(1)=0$，$t\neq 0$ である．よって $\zeta(1+\mathrm{i}t)/\zeta(1)$ は一様連続関数でないから特性関数でない (§2.1 参照)．任意に固定された $1/2<\sigma<1$ に対し $\{\zeta(\sigma+\mathrm{i}t): t\in\mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}$ で稠密になることが知られている ([7, 定理 6.1] 参照)．従って任意に $1/2<\sigma<1$ を固定すると，$|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|>|\zeta(\sigma)|$ なる t が存在する．$|\zeta(1/2+\mathrm{i}t)|>|\zeta(1/2)|$ を充たす t が存在することは，Mathematica などの計算ソフトを使えばすぐにわかる．よって $1/2\leq\sigma<1$ において $|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)/\zeta(\sigma)|>1$ となる $t\in\mathbb{R}$ が存在するので，特性関数でない．

α_{lk} を複素数にした場合は [9] で扱われる予定である．$1-x^3=(1-x)(1-\omega x)(1-\omega^2 x)$，$\omega^3=1$, $\omega\neq 1$ などを利用すれば，$\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m\in\mathbb{R}^d$ が $\mathbb{Q}$ 上一次従属である場合の取り扱いが楽になる．しかしこの場合は (無限分解可能分布ではない) 擬無限分解可能分布というものが出てくる (佐藤 [12, §2.4] 参照)．主定理 1 ではこの擬無限分解可能分布が出てこないように，即ち無限分解可能分布と確率分布でないものの直和になるようにするために $\alpha_{lk}=0,\pm 1$ に敢えて制限したと言ってよい．数論的には一般的である α_{lk} が複素数を考えると，擬無限分解可能分布が自然に出て来るのは興味深く，それを詳しく調べるのは今後の課題の一つである．

数論への簡単な応用は [9] にある．手短に言えば，ゼータ関数をゼータ関数で近似するという問題 (例えば [8], [13, §8] 参照) があり，絶対収束域においてゼータ関数が分布を生成できれば，良い評価が成り立ち，さらに無限分解可能分布を生成できれば，$\log\zeta$ についても良い評価が得られるといものである．

ゼータ分布の自然現象への応用については未だに満足する結果は 1 次元の場合も含めて得られていない．しかし論文 [1] により，多次元の確率過程論の議論ができる道具を用意したので，今後の飛躍的な進展が期待される．

参考文献

[1] A. Takahiro and T. Nakamura, 'Multidimensional polynomial Euler products and infinitely divisible distributions on $\mathbb{R}^d$', *arXiv:1204.4041*.

[2] R. デュレット, 確率過程の基礎, 今野紀雄他訳, シュプリンガー・フェアラーク東京 2005.

[3] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables (Translated from the Russian by Kai Lai Chung)* (Addison-Wesley, 1968).

[4] 河田敬義, 数論 古典数論から類体論へ, 岩波書店 1992.

[5] A. Ya. Khinchine, *Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables (in Russian)*, (Moscow and Leningrad, 1938).

[6] G. D. Lin and C.- Y. Hu, 'The Riemann zeta distribution', *Bernoulli.* **7** (2001) 817–828.

[7] 松本耕二, リーマンのゼータ関数 (開かれた数学), 朝倉書店 2005.

[8] T. Nakamura, 'The joint universality and the generalized strong recurrence for Dirichlet L-functions', *Acta Arith.* **138** (2009), no. 4, 357–362.

[9] T. Nakamura, 'Zeta distributions generated by multidimensional polynomial Euler products with complex coefficients', *preprint.*

[10] 塩川宇賢, 無理数と超越数, 森北出版, 1999.

[11] 佐藤健一, 加法過程 (紀伊國屋数学叢書 33), 紀伊國屋書店 1990.

[12] 佐藤健一, レヴィ過程による確率積分と無限分解可能分布, 数学 **63**(2), 161–181, 2011.

[13] J. Steuding, *Value Distributions of L-functions*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1877, Springer-Verlag, 2007.