数理解析研究所講究録
第 1876 巻 2014 年 16-21

グレブナー基底と整数計画問題

大阪市立大学・理学研究科 数物系専攻　鍬田　英也
Hideya Kuwata
Graduate School of science, Mathematics and Physics
Osaka City University

§1 グレブナー基底の応用例

グレブナー基底とは、大まかに言うと、体 K 上の n 変数多項式環のイデアルの基底で、何らかの良い性質を持つものを言う。ここではグレブナー基底を定義する過程は割愛させて頂き、具体的にグレブナー基底をどのように使うのか例を挙げて紹介したい。

例. 1 (消去理論) 次の連立方程式をグレブナー基底を用いて解く。

$$\begin{cases} x^2+y+z-1=0 \\ x+y^2+z-1=0 \\ x+y+z^2-1=0 \end{cases}$$

まず左辺をそれぞれ以下のように置く。

$$\begin{cases} f_1=x^2+y+z-1 \\ f_2=x+y^2+z-1 \\ f_3=x+y+z^2-1 \end{cases}$$

ここでイデアル $I=\{f_1,f_2,f_3\}\subset\mathbb{Q}[x,y,z]$ に関する辞書式順序 (単項式間の大小関係を『$a>a'$ または $a=a'$ かつ $b>b'$ または $a=a'$ かつ $b=b'$ かつ $c>c'$ のとき $x^ay^bz^c>x^{a'}y^{b'}z^{c'}$』と決めたもの。例えば $xyz^3<xy^2z$) におけるグレブナー基底を求めると、

$$\begin{cases} g_1=x+y+z^2-1 \\ g_2=yz^2+\frac{z^4-z^2}{2} \\ g_3=y^2-y-z^2+z \\ g_4=z^6-4z^4+4z^3-z^2 \end{cases}$$

となる。第4式に注目して頂きたい。変数が z のみとなっている。先に述べた通り、グレブナー基底はイデアルの基底なので、元の $\{f_1, f_2, f_3\}$ の零点と $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ の零点は等しい。よってあとは g_4 から z を求め、第2式 (または第3式) に代入すれば今度は y のみの式となる。最後に第1式に求めた y, z を代入すれば、無事 x が求まる。これは中学校で学んだ連立方程式を解くための消去法が一般化されたものである。

注1
いくつか補足すると、グレブナー基底とは各単項式順序によって決まり、必ず存在するが、一意ではない。被約グレブナー基底は各単項式順序に関して一意である。詳しくは [3],[4] を参照。また単項式順序の取り方が重要で、例1では、辞書式順序 (消去順序) を用いているところがポイントである。

例2 (余りの一意性)
$g_1 = x^2 - z$ と $g_2 = xy - 1$ を用いて $f = x^3 - x^2y - x^2 - 1$ を割った余りを考える。
多変数の割り算のやり方について、この例に則して説明する。まず単項式順序を1つ固定する。ここでは例1で用いた辞書式順序を再び採用する。そして次に各多項式で辞書式順序について最大のものに注目し、それについて割り算を行なう。実際には、まず f の中で辞書式順序で最大なのは x^3 である。そして、g_1 に関して最大なのは x^2、g_2 に関して最大なのは xy である。よってまずは g_1 で f を割る。すると

$$f = xf_1 - x^2y - x^2 + xz - 1$$

となる。同様に残りの部分 $-x^2y - x^2 + xz - 1$ で辞書式順序に関して最大なのは x^2y である。ここで注意したいのは先ほどは g_1 でしか f を割る事が出来なかったが、今回は g_1, g_2 のどちらでも割ることが可能であるという点である。この割り算の操作を2つの場合に分けて行った結果が以下である。

$$f = (x - y - 1)g_1 + \mathbf{xz - yz - z - 1}$$
$$f = (x - 1)g_1 - xg_2 + \mathbf{xz - x - z - 1}$$

太字で書かれているのが、計算したあとの各々の余りである。計算過程が異なるので、結果として余りが異なる。ここで、さらに次の $g_3 = x - yz$ も使って、割り算を続けると計算結果は

$$f = (x - y - 1)g_1 + zg_3 + \mathbf{y^2z - yz - 1}$$
$$f = (x - 1)g_1 - xg_2 + (z - 1)g_3 + \mathbf{y^2z - yz - 1}$$

となり、余りが一致した。実は $\{g_1, g_2.g_3\}$ は $I = \{g_1, g_2\} \subset \mathbb{Q}[x, y]$ の辞書式順序に関するグレブナー基底で、グレブナー基底で多項式を割った余りは一意に決まることが知られている。

＊注２＊

注 1 で述べたが、グレブナー基底は 1 つ単項式順序を決めれば、それに対して決まるものである。(一意性に関しては注 1 を見よ。) よって単項式順序を変えれば、グレブナー基底も変わるので、結果として余りも変わる。この余りの一意性が、イデアル所属問題や整数計画問題を解く際のキーポイントとなる。詳しくは [3],[4] を参照。

§2 整数計画問題への利用

例 3 運送会社が A 社、B 社から次のような依頼を受けた。

	A 社	B 社
重さ (kg)	400	500
大きさ (m^3)	2	3
荷物 1 個当たりに付き運送会社に支払う代金 ($)	11	15

運送会社のトラックは $3700kg, 20m^3$ まで荷物を積むことができる。A 社と B 社の荷物を何個ずつ運べば運送会社の利益が最大となるか。数式で書き直すと、

$a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が次を満たすとする。

$$4a + 5b \leq 37$$
$$2a + 3b \leq 20$$

このとき 11a+15b の最大値を求めよ。このように値を整数に制限したものを**整数計画問題**という。この問題が a,b が実数の場合には高校生でも簡単に解ける問題であるが、整数に制限されていることが問題を難しくしている。それでは早速グレブナー基底を用いて整数計画問題を解いていくことにする。

まずは与えられた問題を以下のように標準化する。

[標準型]

$a,b,c,d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が次を満たすとする。

$$\begin{aligned} 4a+5b+c \quad &= 37 \\ 2a+3b \quad +d &= 20 \end{aligned}$$

このとき $-11a-15b$ の最小値を求めよ。

次にこの係数行列 A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して、イデアル I_A を

$$x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d - x_1^{a'} x_2^{b'} x_3^{c'} x_4^{d'} \qquad s.t. \qquad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$$

で生成されるイデアルとする。I_Aは $\mathbb{Q}[x_1, x_2x_3x_4]$ のイデアルで、I_A を行列 A の**トーリックイデアル**という。

次に重み w ベクトルを線形関数 $-11a-15b$ と上の係数行列 (列の和をとっている) から次のように定める。

$$w = (-11,-15,0,0) + 2(6,8,1,1) \in \mathbb{R}^4_{\geq 0}$$

重みベクトル w から定まる単項式順序 $\succ_w$ に関する I_A のグレブナー基底を求めると、

$$\begin{aligned} g_1 &= \mathbf{x_3^4 x_4^2} - x_1 \\ g_2 &= \mathbf{x_2 x_3^3 x_4} - x_1^2 \\ g_3 &= \mathbf{x_1 x_3 x_4} - \mathbf{x_2} x_3 \\ g_4 &= \mathbf{x_1^4 x_4} - x_2^3 x_3 \\ g_5 &= \mathbf{x_2^2 x_3^2} - x_1^3 \end{aligned}$$

標準型に現れた方程式系の自明解 $(a,b,c,d) = (0,0,37,20)$ を指数に持つ単項式 $x_1^0 x_2^0 x_3^{37} x_4^{20}$ を例 2 の割り算のルールに従って割り算すると余りが $x_1^4 x_2^4 x_3$ である。ここに現れる指数ベクトル $(4,4,1,0)$ が標準型の最小値を与えるものであり、また元の整数計画問題の最大値をを与えるものになっている。

これを **Conti-Traverso アルゴリズム**という。

＊注3＊

単項式順序 $\succ_w$ について $u = x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d$ と $v = x_1^{a'} x_2^{b'} x_3^{c'} x_4^{d'}$ について

$u \succ_w v$ とは $(a,b,c,d)\cdot w > (a',b',c',d')\cdot w$ または $(a,b,c,d)\cdot w = (a',b',c',d')\cdot w$ かつ別の単項式順序 $\succ$ に対して $u \succ v$ のときである。($\cdot$ は通常の内積を表す。)

Conti-Traverso アルゴリズムについて詳しく知りたい方は [2] と [3] を参照。

それでは私が実際に考えた問題に関して紹介する。これは [1] の中で考えられている問題で以下のようなものである。

0 でないベクトル $u, v \in (\mathbf{Z}/2)^k (k \geq 2)$ が次を満たすとする。

$$\sum_{(u,v)=0} a_v \leq b \qquad (a_v, b \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

このとき、$\sum_{v \neq 0} a_v$ の最大値を求めよ。

例えば $k = 2$ の場合は、u, v は $e_1 = [1,0]$ または $e_2 = [0,1], e_1 + e_2$をとり得る。よって不等式は

$$\begin{aligned} a_{e_2} &\leq b \qquad && (u = e_1) \\ a_{e_1} &\leq b && (u = e_2) \\ a_{e_1+e_2} &\leq b && (u = e_1 + e_2) \end{aligned}$$

となる。ちなみに、これは $Conti - Traverso$ アルゴリズムを使うまでもなく最大値は $3b$ であることが分かる。

一般に $(\mathbf{Z}/2)^k$ の元の数 (よって現れる不等式の数) は $2^k - 1$、不等式に現れる変数の数は $2^{k-1} - 1$ であり b が $2^{k-1} - 1$ の倍数のときは最大値は自明である

以下、計算結果を表にまとめた。ただし、$l \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$

表1　k=3

b の値	余りの単項式の指数ベクトル	最大値
3l	[l,l,l,l,l,l,l,0,0,0,0,0,0,0]	7l
3l+1	[l+1,l+1,l+1,l-1,l-1,l-1,l+1,0,0,0,0,0,0,4]	7l+1
3l+2	[l+1,l+1,l+1,l,l,l,l+1,0,0,0,0,0,0,2]	7l+4

表2　k=4

b の値	余りの単項式の指数ベクトル	最大値
7l	[l,l,l,l,l,l,l,l,l,l,l,l,l,l,l,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]	15l
7l+1	[l+1,l+1,l+1,l+1,l-1,l-1,l-1,l-1,l-1,l-1,l+1,l+1,l+1,l+1,l-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,8]	15l+1
7l+2	[2,2,2,3,0,0,0,0,0,0,2,2,2,2,0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,1,0,1,1,1,9](l=1)	15l+2
	[l+2,l+2,l+2,l+2,l-2,l-2,l-2,l-2,l-2,l-2,l+2,l+2,l+2,l+2,l-2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,16](l≥2)	15l+2
7l+3	[l+1,l+1,l+1,l+1,l,l,l,l-1,l-1,l-1,l+1,l+1,l+1,l+1,l,l,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,8]	15l+5
7l+4	[l+1,l+1,l+1,l+1,l,l,l,l,l,l,l+1,l+1,l+1,l+1,l,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,4]	15l+8
7l+5	[l+2,l+2,l+2,l+2,l,l,l,l,l,l,l+1,l+1,l+1,l+1,l,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,4]	15l+9
7l+6	[l+1,l+1,l+1,l+1,l+1,l+1,l+1,l,l,l+1,l+1,l+1,l+1,l+1,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,2]	15l+12

$k=5$ で計算機がメモリーオーバーとなってしまうため、このままで解は求められない。よってトーリックイデアルの生成系やそのグレブナー基底について、理論的な方向からの改良を模索したい。また最近はトーリックイデアルとトーリック多様体との関係について興味があり、特にトーリックイデアルを定める行列 A とトーリック多様体との関係を調べたい。([5],[6])。

参考文献

[1] Y. Fukukawa, M. Masuda, *Buchstaber invariants of skeleta of simplex*, Osaka J. Math,48(2):549-582, 2011, arXiv:0908.3448

[2] P.Conti,C.Traverso, Buchberger algorithm and integer programming, Proceedings AAECC- 9 (New Orleans), Springer Verlag, LNCS 539(1991) 130-139.

[3] D.A.Cox,J.Little,D.O'Shea, Using Algebraic Geometry. Springer, Berlin,Germany.1998.

[4] D.A.Cox,J.Little,D.O'Shea, Ideals Varieties and Algorithms. Springer, Berlin, Germany.1997

[5] D. Cox, J. Little and H. Schenck, Toric varieties, American Mathematical Society, 2011.

[6] B. Sturmfels, Grobner Bases and Convex Polytopes, American Mathematical Society, University Lecture Series, Vol. 8, Providence, RI, 1995.