数理解析研究所講究録
第 1876 巻 2014 年 28-32

多様体の直積分解の一意性*

大阪市立大学・理学研究科数学教室† 畑中 美帆
Miho Hatanaka
Department of Mathematics, Faculty of Science
Osaka City University

§1. 多様体の直積分解の一意性問題

多様体を分解したい時、直積や連結和、束分解等、様々な分解の仕方があるが、今回は直積分解をとりその一意性について考える。そこで、何に関しての直積分解の一意性なのか、その尺度が重要になる。尺度は微分同相、同相、代数多様体としての同型、同変微分同相等いろいろあるが、ここでは主に尺度として微分同相を考える。

微分同相に関する直積分解の一意性問題とは、以下のように書ける。

問題 1
任意の整数 $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$ に対して X_i, Y_j を不分解な微分可能多様体とする。この時、$X_1 \times \cdots \times X_k$ と $Y_1 \times \cdots \times Y_l$ が微分同相であれば、$k = l$ であり、対称群 S_k のある元 σ が存在し、X_i が $Y_{\sigma(i)}$ と微分同相になるか。ここで、不分解というのは、2つの多様体の直積に微分同相ではないもののことである。

この問題と関連のある問題として、cancellation 問題がある。

問題 2 (cancellation)
X, Y, Z を微分可能多様体とする。$X \times Z$ と $Y \times Z$ が微分同相であれば、X と Y は微分同相か。

出典：「変換群のトポロジーとその周辺」数理解析研究所講究録
〒606-8502 京都市左京区北白川追分町

もし問題 1 が肯定的であれば問題 2 も肯定的である。しかし、Charlap により、あるコンパクトで平坦な多様体 X と Y で $X \times S^1$ と $Y \times S^1$ が微分同相でかつ X と Y が微分同相でないものが存在することが示された [1]。このことから問題 1 と 2 は肯定的でないことがわかる。そこで、問題 1 はどんな多様体の範疇で肯定的であるのかという問題が自然に出てくる。その多様体の範疇を調べ、問題 1 と 2 の部分的肯定的結果について紹介する。

次の定理と系は問題 1 と 2 の部分的肯定的結果の一つである [2]。

定理 **1** (S.Choi, M.Masuda, and S.Oum)
実 Bott 多様体の族で、微分同相に関する直積分解は一意的。

系 **1** (cancellation)
実 Bott 多様体の族で、微分同相に関する cancellation は成立する。

ここで、実 Bott 多様体について紹介する。次の列を高さ n の実 Bott タワーという。

$$B_n \xrightarrow{\pi_n} B_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} B_1 \xrightarrow{\pi_1} B_0 = \{point\}$$

ここで、$\pi_i; B_i \to B_{i-1}$ は B_{i-1} 上の 2 つの実直線束のホイットニー和の射影化、つまり $\mathbb{R}P^1$ 束である。このことから、上の実 Bott タワーは $\mathbb{R}P^1$ 束の列と考えることができる。この時 B_i のことを i 段目の実 Bott 多様体という。例えば B_1 は $\mathbb{R}P^1$ であり、B_2 は $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ または $\mathbb{R}P^2 \sharp \mathbb{R}P^2$ となる。また、すべての i に対して π_i が自明な束である時、B_n はコンパクトトーラス、特に平坦な多様体となる。実 Bott タワーの定義から各 i に対して B_i はコンパクトトーラスをねじったようなものであり、平坦な多様体であることが知られている。Charlap により cancellation の反例が平坦な多様体で見つかっているが、上の定理は実 Bott 多様体という、平坦な多様体の中でもより特別な多様体の範疇で cancellation が成り立つことを示している。

§2. トーリック多様体の直積分解の一意性

今回の主定理は、上の定理をトーリック多様体の範疇で考えたものである。そこで、トーリック多様体について紹介する。

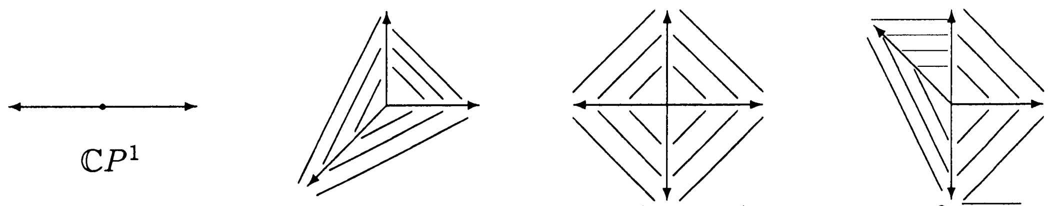
トーリック多様体とは、複素 n 次元のコンパクトで滑らかな代数多様体で効果的な複素トーラスの代数的作用を持ち、この作用に関して稠密な開軌道を 1 つ持つもののことである。簡単にいうと、複素トーラスをコンパクト化したものである。ただし、普通はコンパクトで滑らかという条件はつけないが、今回はこれらの条件を仮定しておく。

例えばトーリック多様体として、$\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^2$, $\underline{\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1}$, $\underline{\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}}$がある。ここで、$\overline{\mathbb{C}P^2}$ は $\mathbb{C}P^2$ の逆向きを表す。波線を引いている２つは、$\mathbb{C}P^1$ 上の $\mathbb{C}P^1$ 束で、Hirzebruch surfaces と呼ばれている。

ここで、トーリック幾何において非常に重要な定理を紹介する。

定理 2 (トーリック幾何の基本定理)
トーリック多様体の族と扇の族は 1 対 1 に対応する。

扇というのは、ある条件を満たす $\mathbb{R}^n$ 上の錐の集まりである。例えば、上にあげたトーリック多様体の例はそれぞれ以下の扇に対応する。



$\mathbb{C}P^1$ $\mathbb{C}P^2$ $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$

トーリック多様体は代数多様体であるので、微分同相に関する直積分解の一意性問題だけでなく、代数多様体の同型に関する直積分解の一意性問題も考えられる。これに関しては微分同相に関する問題よりも考えやすい。それは、２つのトーリック多様体が代数多様体として同型になるための必要十分条件が扇の言葉で完全に表せるからである。

補題 1
２つのトーリック多様体が代数多様体として同型であるための必要十分条件は、それぞれのトーリック多様体に対応する扇が同型であることである。

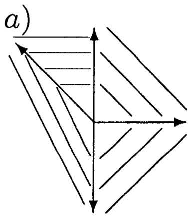
２つの扇が同型であるとは、ある $\mathbb{Z}^n$ から $\mathbb{Z}^n$ への同型写像で２つの扇が写りあうことである。一方で２つのトーリック多様体が微分同相になる必要十分条件は完全には知られていないが、Hirzebruch surfaces に限っては知られている。これについては後に説明する。

主定理 1 ([3])
トーリック多様体の代数多様体の同型に関する直積分解は一意的。つまり、任意の整数

$1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$ に対して X_i, Y_j を代数多様体として不分解なトーリック多様体とする。この時、$X_1 \times \cdots \times X_k$ と $Y_1 \times \cdots \times Y_l$ が代数多様体として同型であれば、$k = l$ であり、対称群 S_k のある元 σ が存在し、X_i が $Y_{\sigma(i)}$ と代数多様体として同型になる。ここで、代数多様体として不分解とは、２つの代数多様体の直積に同型ではないもののことである。

系 **2** (cancellation)
トーリック多様体の族で、代数多様体の同型に関する cancellation は成立する。

次に、微分同相に関するトーリック多様体の直積分解の一意性問題について考える。ここで、代数多様体として同型と微分同相との違いを Hirzebruch surface を使って説明する。一般に Hirzebruch surface に対応する扇は以下のような形をしている。この扇に対応する Hirzebruch surface を F_a で表す。



$a \in \mathbb{Z}$

この時、F_a と F_b が代数多様体として同型であるための必要十分条件は a と b の絶対値が等しいことである。一方で、F_a と F_b が微分同相になるための必要十分条件は a と b の偶奇が等しいことである。このことから、F_2 と F_{-2} は代数多様体として同型であるが、F_2 は F_{-2} だけでなく、F_0 や F_4 とも微分同相である。さらに F_0 は $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ であるので、F_2 は代数多様体の同型に関しては不分解であるが、微分同相に関しては分解可能となる。従って、代数多様体として同型に関する直積分解の一意性問題と、微分同相に関する直積分解の一意性問題とは全く異なる問題であることがわかる。以下はトーリック多様体の微分同相に関する直積分解の一意性に関する定理である。

主定理 **2** ([3])
複素２次元以下のトーリック多様体の族で、微分同相に関する直積分解は一意的。

この主定理の証明は、コホモロジー環のある不変量やポワンカレ多項式を用いる。

系 **3**
複素２次元以下のトーリック多様体の族で、微分同相に関する cancellation が成立する。

ここで、複素２次元以下のトーリック多様体は、微分同相に関して $\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^2 \sharp q\overline{\mathbb{C}P^2} (q \geq 0)$ だけある。

§3. 主定理の拡張について

最後に、主定理２で対象にしている多様体をもう少し増やした場合を考える。具体的には対象にする多様体を、$\mathbb{C}P^1$ とコンパクトトーラス作用を持つ単連結でコンパクトな４次元多様体と、偶数次元の球面にする。つまり、$p\mathbb{C}P^2 \sharp q\overline{\mathbb{C}P^2} \sharp r(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1) (p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), S^{2n}$ である。

主定理 **3** ([3])
上の多様体の族で、微分同相に関する直積分解は一意的。

これの証明は主定理２と同様にできる。

系 **4**
上の多様体の族で、微分同相に関する cancellation は成立する。

参考文献

[1] L. S. Charlap, *Compact flat riemannian manifolds I*, Ann. of Math. (2), 81, No.1 (1965), 15-30.

[2] S. Choi, M. Masuda and D. Y. Suh, *Rigidity problems in toric topology, a survey*, Proc. Steklov Inst. Math., 275(2011), 177-190.

[3] M. Hatanaka, *Uniqueness of the direct decomposition of toric manifolds*, arXiv:1304.0891