数理解析研究所講究録
第 1876 巻 2014 年 39-41

二重複体と可解多様体の幾何学

東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻　糟谷 久矢
Hisashi Kasuya
Department of Mathematics Tokyo Institute of Technology

1 背景

1.1

$(C^{*,*},\partial,\bar{\partial})$ を $\mathbb{C}$-係数上の有界な二重複体とする。二重複体 $(C^{*,*},\partial,\bar{\partial})$ には、各コホモロジー $H_{\partial}^{*,*}(C)$, $H_{\bar{\partial}}^{*,*}(C)$ およびトータルコホモロジー $H^{*}(\mathrm{Tot}C)$ の他にも次のような不変量が定義できる

- (スペクトル列の退化数) 二重複体 $(C^{*,*},\partial,\bar{\partial})$ に対して、スペクトル系列 $E_{*}^{*,*}$ で $E_{1}^{*,*}\cong H_{\bar{\partial}}^{*,*}(C)$ かつ $H^{*}(\mathrm{Tot}C)$ に収束するものが存在する。この時、
$$r(C)=\min\{r\in \mathbb{N}|\forall s\geq r,\ d_{s}=0\}$$
と定義する。ここで、d_{s} はスペクトル系列の E_{s}-タームの微分とする。

- (Bott-Chern コホモロジー)
$$H_{BC}^{*,*}(C)=\frac{\ker\partial\cap\ker\bar{\partial}}{\mathrm{im}\,\partial\bar{\partial}}$$
と定義する。

1.2

(M,J) をコンパクト複素多様体とし、その上の二重複体 $A^{*,*}(M),\partial,\bar{\partial})$ を考える。上記の定義に関して、$H_{BC}^{*,*}(M)=H_{BC}^{*,*}(A(M))$、$r(M)=r(A(M))$ と書く。(M,J) がケーラー構造を持つと仮定すると次が成り立つ。

- $r(M)=1$
- 定義より得られる自然な写像 $H_{BC}^{*,*}(M)\rightarrow H^{*}(M,\mathbb{C})$ は同型射である。($\partial\bar{\partial}$-レンマ [3])

注意: 自然な写像 $H_{BC}^{*,*}(M)\rightarrow H^{*}(M,\mathbb{C})$ が同型射ならば $r(M)=1$ であるが逆は成り立たない。

1.3

G を単連結可解リー群とする。G はココンパクトな離散部分群 Γ を持つとする。コンパクト等質空間 G/Γ を可解多様体と呼ぶ。G が冪零の時 G/Γ を冪零多様体と呼ぶ。次のことが知られている。

- G を単連結複素冪零リー群で Γ に適合する (rational) 左不変複素構造を持つものと仮定する。この時、左不変微分形式のなす二重複体 $\bigwedge^{*,*}\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ の埋め込みはコホモロジーの同型

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(G/\Gamma)\cong H^{*,*}_{\bar\partial}(\mathfrak{g}),$$

$$H^{*,*}_{BC}(G/\Gamma)\cong H^{*,*}_{BC}(\mathfrak{g})$$

- G を単連結複素冪零リー群と仮定すると、$r(G/\Gamma)\leq 2$。 ([2])
- 任意の整数 n に対して、左不変な複素構造を持つ冪零多様体 G/Γ で $n\leq r(G/\Gamma)$ を満たすものが存在する。([8])
- 複素構造を持つ冪零多様体 G/Γ で自然な写像 $H^{*,*}_{BC}(M)\to H^*(M,\mathbb{C})$ が同型射であるものはトーラスに限る。([4])

1.4

G を単連結可解リー群とする。G はココンパクトな離散部分群 Γ を持つとする。次のいずれかの条件を満たすと仮定する。

1. $G=\mathbb{C}^n\ltimes_\phi N$、 N は単連結冪零リー群で左不変複素構造 J をもち、作用 $\phi:\mathbb{C}^n\to \mathrm{Aut}(N)$ は半単純かつ J と可換。また、$\Gamma=\Gamma'\ltimes\Gamma''$, Γ' と Γ'' はそれぞれ、$\mathbb{C}^n$ と N のココンパクトな離散部分群。
2. G は複素リー群。

この時、$A^{*,*}(G/\Gamma)$ の部分 2 重複体 $B^{*,*}$ で、同型

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(G/\Gamma)\cong H^{*,*}_{\bar\partial}(B)$$

を導くものを著者は [5], [6] にて構成した。

2 結果

2.1 スペクトル系列 ([7])

- 可解多様体 G/Γ は 1.4 における仮定 1. を満たすとする。この時、$r(N/\Gamma'')=1$ ならば不等式

$$r(G/\Gamma)\leq 2$$

  が成り立ち、$r(N/\Gamma'')>1$ ならば不等式

$$r(G/\Gamma)\leq r(N/\Gamma'')$$

  が成り立つ。

- 可解多様体 G/Γ は 1.4 における仮定 2. を満たすとする。このとき、不等式

$$r(G/\Gamma) \leq 2$$

が成り立つ。

2.2 Bott-Chern コホモロジー ([1])

- 可解多様体 G/Γ は 1.4 における仮定 1. または 2. を満たすとする。[5], [6] にて構成した部分 2 重複体 $B^{*,*}$ に対して、$C^{*,*} = B^{*,*} + \overline{B^{*,*}}$ と置く。この時、埋め込み $C^{*,*} \subset A^{*,*}(G/\Gamma)$ は同型

$$H^{*,*}_{BC}(C) \cong H^{*,*}_{BC}(G/\Gamma)$$

を与える。

- ケーラーではない複素可解多様体 G/Γ で自然な写像 $H^{*,*}_{BC}(M) \to H^{*}(M, \mathbb{C})$ が同型射となるものが存在する。

参考文献

[1] D. Angella, H. Kasuya, Bott-Chern cohomology of solvmanifolds, arxiv 1212.5708.

[2] L. A. Cordero, M. Fernández, A. Gray, The Frölicher spectral sequence for compact nilmanifolds. Illinois J. Math. **35** (1991), no. 1, 56–67.

[3] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, and D. Sullivan, Real homotopy theory of Kähler manifolds. Invent. Math. **29** (1975), no. 3, 245–274.

[4] K. Hasegawa, Minimal models of nilmanifolds. Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 1, 65–71.

[5] H. Kasuya, Techniques of computations of Dolbeault cohomology of solvmanifolds. Math. Z. **273**, (2013), 437–447.

[6] H. Kasuya, de Rham and Dolbeault Cohomology of solvmanifolds with local systems. arXiv:1207.3988

[7] H. Kasuya, The Frölicher spectral sequence of certain solvmanifolds, to appear in J. Geom. Anal..

[8] S. Rollenske, The Frölicher spectral sequence can be arbitrarily non-degenerate. Math. Ann. **341** (2008), no. 3, 623–628.