数理解析研究所講究録
第 1876 巻 2014 年 42-47

有限巡回被覆のコホモロジーについて

(この解説文を中岡稔先生に捧げます)

大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate school of Sience, Osaka University
京都大学大学院理学研究科　岸本大祐 (Daisuke Kishimoto)
Department of Mathematics, Kyoto University

1 序

本稿の目的は [2] でスミスコホモロジーの応用として紹介した次の定理について, [3] のスペクトル系列による証明を紹介することである.

定理 1([2], [3]). p を奇素数とし, X を位数 p の巡回群 C_p が自由に作用するハウスドルフ空間とする. $H^n(X;\boldsymbol{Z}/p)=0$ で, 同変写像 $f\colon X\to EC_p$ から定まる写像 (分類写像) $\bar{f}\colon X/C_p\to BC_p$ が $(\bar{f}^*)^n\neq 0\colon H^n(BC_p;\boldsymbol{Z}/p)\to H^n(X/C_p;\boldsymbol{Z}/p)$ を満たすとき, $(\bar{f}^*)^{n+1}\colon H^{n+1}(BC_p;\boldsymbol{Z}/p)\to H^{n+1}(X/C_p;\boldsymbol{Z}/p)$ は自明な準同型ではない.

BC_p の $\boldsymbol{Z}/p$ 係数のコホモロジーは

$$H^*(BC_p;\boldsymbol{Z}/p)=\Lambda(u)\otimes\boldsymbol{Z}/p[v],\quad \beta u=v,\quad |u|=1$$

である (β は Bockstein 作用素). 奇数次元の球面 S^{2n-1} に C_p が自由に作用するとき、分類写像 $\bar{f}\colon S^{2n-1}\to BC_p$ に対して, $(\bar{f}^*)^1\colon H^1(BC_p;\boldsymbol{Z}/p)\to H^1(S^{2n-1}/C_p;\boldsymbol{Z}/p)$ は自明な準同型ではない. 定理 1 を繰り返し利用すれば, $(\bar{f}^*)^{2n-1}\colon H^{2n-1}(BC_p;\boldsymbol{Z}/p)\to H^{2n-1}(S^{2n-1}/C_p;\boldsymbol{Z}/p)$ が自明な準同型ではないことがわかる. 一方, $k>2n-1$ では, $H^k(S^{2n-1}/C_p;\boldsymbol{Z}/p)=0$ なので, $(\bar{f}^*)^k\colon H^k(BC_p;\boldsymbol{Z}/p)\to H^k(S^{2n-1}/C_p;\boldsymbol{Z}/p)$ は自明な準同型である. このことを用いると、「S^{2m-1}, S^{2n-1} に C_p が自由に作用するとき、C_p 写像 $f\colon S^{2m-1}\to S^{2n-1}$ が存在すれば, $m\leqq n$」 という C_p 作用に関する Borsuk-Ulam の定理は容易に証明できる.

このように, 分類写像 $X/G\to BG$ から誘導されるコホモロジーの準同型の形を調べることは Borsuk-Ulam 型定理につながる. 定理 1 も分類写像から誘導される準同型に関する定理であり, 本稿は Borsuk-Ulam 型定理の研究のスペクトル系列を用いた手法の紹介ともいえる.

2 Massey Product

この節では, Massay product について定義と後で使う性質を紹介しよう. X を位相空間とし, Z を X の部分空間とする. $u_1,u_2,\ldots,u_k$ を $u_i\in H^{p_i}(X,Z;R)$ (R は環) をみたすものとし, 整数 $p(i,j)$ $(i\leqq j)$ を

$$p(i,j)=\sum_{r=i}^{j}(p_r-1)=p_i+p_{i+1}+\cdots+p_j-j+i+1$$

により定める. $a_1,a_2,\ldots,a_k\in C^*(X,Z;R)$ を

$$[a_i] = u_i \ (1 \leqq i \leqq k)$$

をみたすものとし, $\bar{a}_i = (-1)^{p_i} a_i$ と定義する.

$A = (a_{ij})_{1 \leqq i \leqq j \leqq k, (i,j) \neq (1,k)}$ を $C^*(X, Z; R)$ の元の族で,

$$a_{ii} = a_i, \quad a_{ij} \in C^{p(i,j)+1}, \quad \delta a_{ij} = \sum_{r=i}^{j-1} \bar{a}_{ir} a_{r+1j}$$

を満たすものとする. このような A を *defining system* という. $a_1, \ldots, a_k$ に対して, defining system A が存在するとき, Massay product $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ は定義可能であるといい, defining system A に対して,

$$c(A) = \sum_{r=1}^{k-1} \bar{a}_{1r} a_{r+1k} \, (\in C^{p(1,k)+2}(X, Z; R))$$

と定義して, Massay product $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle_k$ を

$$\langle a_1, \ldots, a_k \rangle_k = \{[c(A)] \in H^{p(1,k)+2}(X, Z; R) \mid A : \text{defining system}\}$$

により定義する. このとき, 次のことが知られている.

命題 2.1([5],[7]). $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle_k$ は $a_1, \ldots, a_k$ のコホモロジー類で決まる.

したがって, $u_1, u_2, \ldots, u_k \in H^*(X, Z; R)$ に対して, $[a_i] = u_i$ を満たす $a_1, \ldots, a_k \in C^*(X, Z; R)$ を取り, $u_1, \ldots, u_k$ の Massay product を

$$\langle u_1, \ldots, u_k \rangle_k = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle_k$$

により定義する.

例. $\langle u_1, u_2 \rangle_2 = u_1 u_2$ (カップ積)

$u_1, u_2, u_3 \in H^1(X; R)$ のとき, $[a_{ii}] = u_i$ となる $a_{ii} \in C^1(X; R)(i = 1, 2, 3)$ を取り, $\delta a_{12} = -a_{11} a_{22}$, $\delta a_{23} = -a_{22} a_{33}$ を満たすような a_{12}, a_{23} が defining system $(a_{ij})_{1 \leqq i \leqq j \leqq 3}$ である.

$$\langle u_1, u_2, u_3 \rangle_3 = \{[-a_{11} a_{23} - a_{12} a_{33}] \mid (a_{ij})_{1 \leqq i \leqq j \leqq 3} \text{は defining system}\}.$$

$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle_{n-1}$ の defining system $\{x_{ij}\}_{1 \leqq i \leqq j \leqq n-1}$ が $\langle x_{k+1}, \ldots, x_n \rangle_{n-k}$ の defining system に拡張できるとき, 新たに $\{x'_{ij}\}_{1 \leqq i \leqq j \leqq k+1}$ を

$$x'_{ij} = \pm x_{ij} \, (j \leqq k), \quad x'_{i,k+1} = \sum_{l=k+1}^{n-1} \pm x_{il} x_{ln} \, (2 \leqq i \leqq k+1)$$

により定義する. これは $\langle x_1, \ldots, x_k, \langle x_{k+1}, \ldots, x_n \rangle_{n-k} \rangle_{k+1}$ の defining system である. defining system $\{x_{ij}\}_{1 \leqq i \leqq j \leqq n-1}$ で定まるコホモロジーの元を x と書くと, x は, ある $y \in \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle_{n-1}$ に対して $x = \pm y x_n$ となる (cf. [6]).

3　有限巡回被覆のコホモロジー

以下, コホモロジーの係数は断りのない限りすべて $\boldsymbol{Z}/p$ とする. 序にも述べたとおり,

$$H^*(BC_p) = \Lambda(u) \otimes \boldsymbol{Z}/p[v], \quad \beta u = v, \quad u \in H^1(BC_p)$$

である. ここで, β は Bockstein 作用素を表す.

$E \to B$ を正規巡回 p 重被覆とし, $S_*(E)$ を E の singular chain complex とすると, $S_*(E)$ には C_p が自由に作用する. これより, $S_*(E)$ を $\boldsymbol{Z}[C_p]$-module と見て

$$\begin{aligned} H^*(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[C_p]}(S_*(E), \boldsymbol{Z}/p[C_p])) &\cong H^*(E), \\ H^*(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[C_p]}(S_*(E), \boldsymbol{Z}/p)) &\cong H^*(B) \end{aligned} \tag{1}$$

が成り立つ. g を C_p の生成元とし, $\tau = 1 - g$ とおく. $\boldsymbol{Z}/p[C_p] = \boldsymbol{Z}/p[\tau]/(\tau^p)$ であり, filtration

$$0 \subset \tau^{p-1}\boldsymbol{Z}/p[C_p] \subset \tau^{p-2}\boldsymbol{Z}/p[C_p] \subset \cdots \subset \tau\boldsymbol{Z}/p[C_p] \subset \boldsymbol{Z}/p[C_p]$$

を考え,

$$F^nC^* = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[C_p]}(S_*(E), \tau^n\boldsymbol{Z}/p[C_p])$$

とおくことにより, cochain complex $C^* = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[C_p]}(S_*(E), \boldsymbol{Z}/p[C_p])$ の filtration

$$C^* = F^0C^* \supset F^1C^* \supset \cdots \supset F^{p-1}C^* \supset 0$$

を得る. この filtration に対するスペクトル系列を考えると,

$$E_1^{s,t} = H^t(F^sC^*/F^{s+1}C^*) = \begin{cases} H^t(B) & 0 \leqq \tau \leqq p-1 \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

である. また, $d_r\colon E_r^{s,t} \to E_r^{s-r,t+1}$, $H^t(E) \cong \bigoplus_{s \geqq 0} E_\infty^{s,t}$ である. 次に cochain complex

$$\bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[C_p]}(S_*(E), \tau^i\boldsymbol{Z}/p[C_p]/\tau^{i+1}\boldsymbol{Z}/p[C_p]) \cong \bigoplus_{i=0}^{p-1} \tau^i \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[C_p]}(S_*(B), \boldsymbol{Z}/p)$$

における coboundary $\bar\delta$ を考えよう. まず, 普遍被覆 $EC_p \to BC_p$ において, $1 \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(BC_p, \boldsymbol{Z}/p)$ に対して,

$$\bar\delta(1) = \tau u_1 + \cdots + \tau^{p-1}u_{p-1}, \quad u_i \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(S_1(BC_p), \boldsymbol{Z}/p)$$

とおくことができる.

分類写像 $\rho\colon B \to BC_p$ の lift を $\tilde\rho\colon E \to EC_p$, $\pi\colon E \to B$ を射影とし, $E \xrightarrow{\tilde\rho \times \pi} EC_p \times B$ を考える. このとき, cochain complex $\bigoplus_{i=0}^{p-1} \tau^i \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[C_p]}(S_*(B), \boldsymbol{Z}/p)$ 上に誘導される coboundary 写像 $\bar\delta$ は, $x \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(S_*(B), \boldsymbol{Z}/p)$ に対して

$$\bar\delta x = \delta x + \tau\rho^*(u_1)x + \cdots + \tau^{p-1}\rho^*(u_{p-1})x,$$

をみたす. 上で, $[u_1] = 0$ ならば, $1 \in E^{1,0}$ はスペクトル系列において permanent cycle となり, $1 \in E^{0,0}$ も permanent cycle なので $H^t(E) \cong \bigoplus_{s \geqq 0} E_\infty^{s,t}$ で, E が可縮であることに矛盾する. したがって, $[u_1] \neq 0$ で $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(BC_p, \boldsymbol{Z}/p)$ は $[u_1] = u \in H^1(BC_p)$ (u は生成元) を満たすものとしてよい.

さて, $\bar{\delta}^2(1)=0$ であり,

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}^2(1) &= \tau\bar{\delta}u_1+\cdots+\tau^{p-1}\bar{\delta}u_{p-1}\\
&= \tau(\delta u_1+\tau u_1u_1+\cdots+\tau^{p-1}u_{p-1}u_1)+\dots\\
&\qquad +\tau^{p-1}(\delta u_{p-1}+\tau u_1u_{p-1}+\cdots+\tau^{p-1}u_{p-1}u_{p-1})\\
&= \tau(\delta u_1)+\tau^2(u_1u_1+\delta u_2)+\tau^3(u_2u_1+u_1u_2+\delta u_3)+\dots\\
&\qquad +\tau^{p-1}(u_{p-2}u_1+u_{p-3}u_2+\cdots+u_1u_{p-2}+\delta u_{p-1})
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\delta u_i=-\sum_{j<i}u_ju_{i-j}\qquad (i=2,3,\dots,p-1) \tag{2}
$$

が成り立つ. 等式 (1), (2) と $[u_1]=u$ より, definingu system として $x_{ij}=\rho^*(u_{j-i+1})$ $(j\leqq r)$, $x_{i,r+1}$ として defining system の条件を満たすような cochain をとると,

$$
d_rx\in\pm\langle\bar{u},\dots,\bar{u},x\rangle_{r+1}
$$

がわかる (ここで, $\bar{u}=\rho^*u$).

$EC_p\to BC_p$ については次のことが成り立つ.

命題 3.1([5]).

$$
\langle u,\dots,u\rangle_k=\begin{cases}\{0\} & k<p\\ \{v\} & k=p\,.\end{cases}
$$

$\rho^*(u_i)$ で定義される $\langle\bar{u},\dots,\bar{u}\rangle_{r+r'}$ $(r+r'\leqq p)$ の defining system を考える. この defining sytem は上で $d_{r'}$ について考察したように, $\langle\bar{u},\dots,\bar{u},x\rangle_{r'+1}$ の defining system に拡張できる. 命題 3.1 と Massay Product について 2 節の最後で紹介したことから, $x'=d_{r'}x$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
d_rx' &= \pm\langle\bar{u},\dots,\bar{u},x'\rangle_{r+1}=\pm\langle\bar{u},\dots,\bar{u},\langle\bar{u},\dots,\bar{u},x\rangle_{r'+1}\rangle_{r+1}\\
&= \pm\langle\bar{u},\dots,\bar{u}\rangle_{r+r'}x
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
d_rx'=\begin{cases}0 & r+r'<p\\ \pm\bar{v}x & r+r'=p\,.\end{cases}
$$

4 定理 1 の証明

定理 1 を示すには, 分類写像 $\bar{f}\colon X/C_p\to BC_p$ が $(\bar{f}^*)^n\neq 0\colon H^n(BC_p;\boldsymbol{Z}/p)\to H^n(X/C_p;\boldsymbol{Z}/p)$ かつ $(\bar{f}^*)^{n+1}=0\colon H^{n+1}(BC_p;\boldsymbol{Z}/p)\to H^{n+1}(X/C_p;\boldsymbol{Z}/p)$ をみたすとき, $H^n(X;\boldsymbol{Z}/p)\neq 0$ であることを示せばよい.

以下では, 3節の記号に従い, $X, X/C_p$ の代わりに E, B を用い, 分類写像を $\bar{f}$ の代わりに $\rho\colon B \to BC_p$ と書くことにする.

n が奇数のとき $n = 2m+1$ と表すと, 3節で考えた普遍被覆 $EC_p \to BC_p$ についてのスペクトル系列で

$$d_r^{p-1,2m+1} uv^m = \begin{cases} 0 & r < p-1 \\ av^{m+1} & r = p-1 \end{cases}$$

が成り立つ ($a \neq 0$). このとき, $\rho^* = 0\colon H^{n+1}(BC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H^{n+1}(X/C_p; \boldsymbol{Z}/p)$ の仮定に注意すると, スペクトル系列の自然性より

$$d_r^{p-1,2m+1} \bar{u}\bar{v}^m = \rho^*(d_r^{p-1,2m+1} uv^m) = \begin{cases} 0 & r < p-1, \\ \rho^*(av^{m+1}) = 0 & r = p-1\,. \end{cases}$$

したがって, $\bar{u}\bar{v}^m \in E_1^{p-1,2m+1}$ が permanent cycle になるので $H^{2m+1}(E; \boldsymbol{Z}/p) \neq 0$.

次に n が偶数のとき, $n = 2m$ と書く. $\bar{v}^m \in E_1^{s,2m}$ が $0 \leqq s \leqq p-1$ をみたすすべての s に対して $E_k^{s,2m}$ で生き残っているような k の最大値を考え, それを r で表す ($\bar{v}^m = \rho^*(v^m) \neq 0$ より $r \geqq 1$).

$d_r^{s,2m}\bar{v}^m \neq 0$ となる s が存在するとき, $d_r^{r,2m}\bar{v}^m \neq 0$ である. $r = 1$ であれば, $d_1^{1,2m}\bar{v}^m = \bar{u}\bar{v}^m = \rho^*(uv^m)$ で ρ^* の仮定に反するので, $r \geqq 2$ となる.

さて, $\bar{v}^m \in E_1^{r-1,2m}$ が $r \leqq r'$ を満たすような $E_{r'}$-項まで生き残り, $d_{r'}^{r+r'-1,2m-1}x = \bar{v}^m$ を満たすような x が存在すると仮定すると, 3節で見たように

$$d_r^{r,2m}\bar{v}^m \in \pm\langle \bar{u}, \ldots, \bar{u}, \bar{v}^m \rangle_{r+1}, \quad \bar{v}^m \in \pm\langle \bar{u}, \ldots, \bar{u}, x \rangle_{r'+1}$$

である. したがって, 3節の最後で見たように,

$$d_r^{r,2m}\bar{v}^m = \begin{cases} 0 & r + r' < p \\ \pm\bar{v}x & r + r' = p\,. \end{cases}$$

$d_r^{r,2m}\bar{v}^m \neq 0$ なので $r + r' = p$ である. このとき, E_r において, $\bar{u}x = d_1^{r,2m-1}x = 0$. $\beta(\bar{u}x) = 0$ なので, $0 = \beta(\bar{u}x) = (\beta\bar{u})x - \bar{u}(\beta x) = \bar{v}x - \bar{u}\beta x$. したがって, $\bar{v}x = d_1(\beta x)$ で, これは E_r-項で自明であり, $d_r^{r,2m}\bar{v}^m \neq 0$ に矛盾する. したがって, $\bar{v}^m \in E_1^{r-1,2m}$ は permanent cycle であり, $H^{2m}(E; \boldsymbol{Z}/p) \neq 0$ となる.

次に, ある s に対して $d_r^{s,2m}x = \bar{v}^m$ となる s と x が存在する場合を考える. このとき, $\bar{v}^m \in \pm\langle \bar{u}, \ldots, \bar{u}, x \rangle_{r+1}$ であり, $\bar{v}^m \in E_1^{p-r,2m}$ に対して, ある $r'(r' \geqq r)$ で $d_{r'}^{p-r,2m}\bar{v}^m \neq 0$ と仮定する. 上と同様に

$$d_{r'}^{p-r,2m}\bar{v}^m = \begin{cases} 0 & r + r' < p \\ \pm\bar{v}x & r + r' = p \end{cases}$$

を用いて $d_{r'}^{p-r,2m}\bar{v}^m = 0$ が証明できて, $d_{r'}^{p-r,2m}\bar{v}^m \neq 0$ に矛盾する. したがって, $\bar{v}^m \in E_1^{p-r,2m}$ は生き残り $H^{2m}(E; \boldsymbol{Z}/p) \neq 0$ が成り立つ.

以上で定理 1 の証明ができた.

References

[1] E. Fadell and S. Husseini, An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems, Ergodic Theory Dynamical Systems, **8**(1988), 73–85.

[2] Y. Hara, スミスコホモロジーとその応用, 京大数理解析研究所講究録 1816 変換群の幾何の展開 (2012), 103・112

[3] Y. Hara and D. Kishimoto, Note on the cohomology of finite cyclic coverings, Toplogy and its Applications, **160**(2013), 1061–1065

[4] J. Jaworowski, Maps of Stiefel manifolds and a Borsuk-Ulam theorem, Proc. Edinb. Math. Soc. **32**(1989), 271–279.

[5] D. Kraines, Massey higher products, Trans. Amer. Math. Soc. **124**(1966) 431–49.

[6] J.P. May, Matric Massey products, J. Algebra**12**(1969) 533–68.

[7] J. McCleary, A User's Guide to Spectral Sequences (Second edition), Cambridge University Press (2001)