数理解析研究所講究録
第 1876 巻 2014 年 136-142

デファイナブル障害理論

川上智博
和歌山大学教育学部

長崎生光
京都府立医科大学

Dedicated to the memory of Professor Minoru Nakaoka

1 序文

ここでは、実閉体 R の通常の構造 $(R,+,\cdot,<)$ の順序極小拡張構造 $\mathcal{N} = (R,+,\cdot,<,...)$ において、デファイナブル障害理論について考察する。順序極小構造は、実数体 $\mathbb{R}$ の順序極小拡張構造 $\mathcal{M} = (\mathbb{R},+,\cdot,<,\dots)$ に限っても、[7] により、非可算無限個存在することが知られている。

デファイナブル集合・デファイナブル写像に関して、[2], [3] などに性質がまとめられている。また、[8] では、実数体 $\mathbb{R}$ の場合において、順序極小構造より一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて $\mathcal{N} = (R,+,\cdot,<,...)$ で考えるものとする。

The authors are partially supported by Kakenhi(23540101).
2010 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 03C64.
Key Words and Phrases. 順序極小構造, 実閉体, デファイナブル障害理論.

2 準備

Rを実閉体とする。

構造$\mathcal{N} = (R, (f_i), (L_j), (c_k))$とは、以下のデータで定義されるものである。

1. 集合Rを$\mathcal{N}$のunderlying setまたはuniverseという。
2. 関数の集合$\{f_i | i \in I\}$、ただし$f_i : R^{n_i} \to R, n_i \geq 1$。
3. 関係の集合$\{L_j | j \in J\}$、ただし$L_j \subset R^{m_j}, m_j \geq 1$。
4. 特別な元の集合$\{c_k | k \in K\} \subset R$。各$c_k$を定数という。

添字集合I, J, Kは、空集合でもかまわない。

f (L)がm変数関数(m変数関係)とは、$f : R^m \to R$ $(L \subset R^m)$となることである。

項とは、以下の3つの規則にしたがって得られる有限列ことである。

1. 定数は項である。
2. 変数は項である。
3. fがm変数関数かつ$t_1, \ldots, t_m$が項ならば、$f(t_1, \ldots, t_m)$は項である。

論理式とは、変数、関数、関係、論理記号、括弧、コンマ、$\exists, \forall$からなる有限列で、以下の3つの規則にしたがって得られるものである。

1. 任意の二つの項t_1, t_2に対して、$t_1 = t_2$と$t_1 < t_2$は論理式である。
2. Lがm変数関係かつ$t_1, \ldots, t_m$が項ならば、$L(t_1, \ldots, t_m)$は論理式である。
3. ϕとψが論理式ならば、$\neg\phi$, $\phi \vee \psi$と$\phi \wedge \psi$は論理式である。ϕが論理式かつvが変数ならば、$(\exists v)\phi$と$(\forall v)\phi$は論理式である。

R^nの部分集合Xが$\mathcal{N}$においてデファイナブルとは、論理式$\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$と$b_1, \ldots, b_m \in R$が存在して、$X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in R^n | \phi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ が $\mathcal{N}$で成り立つ$\}$となることである。このとき、Xをデファイナブル集合という。

$\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \cdots)$が順序極小構造(o-minimal structure)とは、Rの任意のデファイナブル集合が点と開区間の有限和となることである。ここで、

開区間とは、$(a,b)_R=\{x\in R|a<x<b\}$, $-\infty\le a<b\le\infty$ を表すものとする。

実閉体 $(R,+,\cdot,<)$ は、順序極小構造であり、デファイナブル集合全体は、semialgebraic 集合全体に一致する。

R の位相は、開区間を開基とする位相とする。R^n の位相は、積位相とする。このとき、R^n はハウスドルフ空間となる。

実数係数 Puiseux 級数 $\mathbb{R}[X]^\wedge$、すなわち、$\sum_{i=k}^{\infty} a_i X^{\frac{i}{q}}, k\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}, a_i\in\mathbb{R}$ と表されるもの全体は、実閉体となり、非アスキメデス的である。

実数体 $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}_{alg}=\{x\in\mathbb{R}|x$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である $\}$ は、アルキメデス的である。

以下の事実が知られている。

定理 2.1. *(1)* 実閉体の標数は 0 である。

(2) 可算以上の任意の濃度 κ に対して、2^κ 個の同型でない実閉体で濃度 κ のものが存在する。

定義 2.2. $X\subset R^n$、$Y\subset R^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f:X\to Y$ がデファイナブル写像とは、f のグラフ $(\subset R^n\times R^m)$ がデファイナブル集合となることである。

実閉体 R 上で、実数体 $\mathbb{R}$ のとき同様に、$1\leqq r\leqq\infty$ に対して、C^r 級関数、C^r 級写像を定義することができる。ところが、一般の実閉体 R では、C^∞ 級関数に対してさえ、中間値の定理、最大値・最小値の定理、ロルの定理、平均値の定理が不成立となる。また、一変数 C^∞ 級関数 f に対して、$f'>0$ ならば、f が増加しているという定理も不成立となる。以下がその例である。

例 2.3. $\mathcal{N}=(\mathbb{R}_{alg},+,\cdot,<)$ とする。$a,b\in\mathbb{R}_{alg}$ に対して、$[a,b]_{\mathbb{R}_{alg}}=\{x\in\mathbb{R}_{alg}|a\leqq x\leqq b\}, (a,b)_{\mathbb{R}_{alg}}=\{x\in\mathbb{R}_{alg}|a<x<b\}$ とする。関数 f を $f:[1,10]_{\mathbb{R}_{alg}}\to\mathbb{R}_{alg}$ を $[1,\pi]\cap\mathbb{R}_{alg}$ 上で x, $[\pi,2\pi]\cap\mathbb{R}_{alg}$ 上で $x-5$, $[2\pi,10]\cap\mathbb{R}_{alg}$ 上で $-x+30$ と定義すると、C^∞ 級関数となる。この f に対して、中間値の定理、最大値・最小値の定理、ロルの定理、平均値の定理が不成立となる。$[1,2\pi]\cap\mathbb{R}_{alg}$ において、$f'>0$ であるが、f は増加関数でない。この f は $\mathcal{N}$ においてデファイナブルでない。

デファイナブル集合 $X\subset R^n$ がデファイナブリーコンパクトとは、任意のデファイナブル写像 $f:(a,b)_R\to X$ に対して、極限点 $\lim_{x\to a+0}f(x), \lim_{x\to b-0}f(x)$ が X 内に存在することである。

デファイナブル集合 $X\subset R^n$ がデファイナブル連結とは、X の二つの空でないデファイナブル開集合 Y,Z で、$X=Y\cup Z$ かつ $Y\cap Z=\emptyset$ となるものが存在しないことである。

コンパクトデファイナブル集合は、デファイナブリーコンパクト集合であるが、デファイナブリーコンパクト集合は、コンパクト集合とは限らない。連結デファイナブル集合は、デファイナブル連結集合であるが、デファイナブル連結集合は、連結集合とは限らない。たとえば、$R=\mathbb{R}_{alg}$ ならば、$[0,1]_{\mathbb{R}_{alg}}=\{x\in\mathbb{R}_{alg}|0\le x\le 1\}$ は、デファイナブリーコンパクトかつデファイナブル連結であるが、コンパクトでも連結でもない。

定理 2.4 ([6]). R^n のデファイナブル集合 X に対して、X がデファイナブリーコンパクト集合であることと有界閉集合であることは同値である。

コンパクト集合、連結集合の連続写像のよる像が、それぞれ、コンパクト集合、連結集合となることのデファイナブル版が以下である。

命題 2.5. $X\subset R^n$、$Y\subset R^m$ をデファイナブル集合、$f:X\to Y$ をデファイナブル写像とする。X がデファイナブリーコンパクト *(デファイナブル連結)* ならば、$f(X)$ はデファイナブリーコンパクト *(デファイナブル連結)* である。

デファイナブル関数に対して、例 2.3 のようなことはおこらない。

定理 2.6. *(1) (中間値の定理)* デファイナブル連結集合 X 上の任意のデファイナブル関数 $f(x)$ に対して、$a,b\in X$ かつ $f(a)\ne f(b)$ ならば、$f(X)$ は、$f(a)$ と $f(b)$ のあいだの値をすべて含む。

(2) (最大値・最小値の定理) デファイナブリーコンパクト集合 X 上の任意のデファイナブル関数 $f(x)$ は最大値・最小値をとる。

(3) (ロルの定理) $f:[a,b]_R\to R$ をデファイナブル関数とし、$(a,b)_R$ で微分可能で、$f(a)=f(b)$ とすると、$f'(c)=0$ となる c が a と b の間に存在する。

(4) (平均値の定理) $f:[a,b]_R\to R$ をデファイナブル関数とし、$(a,b)_R$ で微分可能とすると、$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ となる c が a と b の間に存在する。

(5) $f:(a,b)_R\to R$ を微分可能なデファイナブル関数とし、$(a,b)_R$ 上で $f'>0$ ならば、f は増加している。

例 2.7. *(1)* $\mathcal{N}=(\mathbb{R}_{alg},+,\cdot,<)$ とする。$f:\mathbb{R}_{alg}\to\mathbb{R}_{alg}, f(x)=2^x$ は定義されない *([9])*。

(2) $\mathcal{N}=(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ とする。$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x$ は定義されるが、デファイナブル関数でない。また、正弦関数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\sin x$ は定義されるが、デファイナブル関数でない。

3 デファイナブル障害理論

$G \subset R^n$がデファイナブル群とは、Gが群であって、群演算$G \times G \to G, G \to G$がデファイナブル写像となることである。

Gをデファイナブル群とする。デファイナブルG集合とは、デファイナブル集合XとG作用$\phi: G \times X \to X$からなる組(X, ϕ)であって、ϕがデファイナブル写像となるものである。ここでは、(X, ϕ)と書く代わりにXと書く。

$X \subset R^n, Z \subset R^m$をデファイナブル集合とし、$f: X \to Z$をデファイナブル写像とする。$f$がデファイナブル同相写像とは、デファイナブル写像$h: Z \to X$が存在して、$f \circ h = id_Z$かつ$h \circ f = id_X$となることである。

X, ZをデファイナブルG集合とする。デファイナブル写像$f: X \to Z$がデファイナブルG写像とは、fがG写像となることである。デファイナブルG写像$f: X \to Z$がデファイナブルG同相写像とは、デファイナブルG写像$h: Z \to X$が存在して、$f \circ h = id_Z$かつ$h \circ f = id_X$となることである。

X, Yをデファイナブル集合とし、$f: X \to Y$をデファイナブル写像とする。fがデファイナブル固有写像とは、Yの任意のデファイナブリーコンパクト部分集合Cに対して、$f^{-1}(C)$がXのデファイナブリーコンパクト部分集合となることである。

定理 3.1 (デファイナブル商空間の存在 ([2])). *(1)* Gをデファイナブリーコンパクトデファイナブル群、XをデファイナブルG集合とする。このとき、X/Gはデファイナブル集合として存在して、射影$\pi: X \to X/G$は、全射デファイナブリー固有デファイナブル写像である。

(2) Xをデファイナブル集合、$A \subset X$をデファイナブリーコンパクト部分集合とする。このとき、Aを一点につぶした集合X/Aはデファイナブル集合で、射影$\pi: X \to X/A$は、全射デファイナブリー固有デファイナブル写像である。

定義 3.2 ([4]). Gをデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とする。

デファイナブルG CW複体とは、有限G CW複体$(X, \{c_i | i \in I\})$で以下の三条件を満たすものである。

(a) Xの実現$|X|$がデファイナブルG集合である。

(b) 各Gセルc_iの特性写像$f_{c_i}: G/H_{c_i} \times D^n \to \overline{c_i}$はデファイナブル$G$写像であり、$f_{c_i}|G/H_{c_i} \times \mathring{D}^n : G/H_{c_i} \times \mathring{D}^n \to c_i$はデファイナブル$G$同相写像である。ただし、$\overline{c_i}$は$X$における$c_i$の閉包を表し、$D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n | x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqq 1\}$, $\mathring{D}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n | x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$とする。

(c) 各Gセルc_iに対して、$\overline{c_i} - c_i$は開Gセルの有限和である。

Xをデファイナブル集合、AをXのデファイナブル部分集合のとき、(X,A)と書く。

定義 3.3. (1) デファイナブル写像$f,h:(X,A)\to(Y,B)$が、各$x\in A$に対して、$f(x)=h(x)$とする。fとhがAをとめてデファイナブリーホモトピックとは、デファイナブル写像$H:(X\times[0,1]_R, A\times[0,1]_R)\to(Y,B)$が存在して、各$x\in X$に対して、$H(x,0)=f(x), H(x,1)=h(x)$かつ各$(x,t)\in A\times[0,1]_R$に対して、$H(x,t)=f(x)$となることである。

(2) (X,A)から(Y,B)へのデファイナブル写像のAをとめてのデファイナブリーホモトピー類全体の集合を$[(X,A),(Y,B)]$と書いて、(相対) デファイナブルホモトピー集合という。$A=\emptyset, B=\emptyset$のとき、$[X,Y]$と書く。

定義 3.4 ([1]). Yをデファイナブル集合、$y_0\in Y$、$n\geq 1$とする。

$\pi_n(Y,y_0)=[(I^n,\partial I^n),(Y,y_0)]=[(D^n,S^{n-1}),(Y,y_0)]$と定義して、デファイナブルホモトピー群という。$\pi_1(Y,y_0)$は、デファイナブル基本群である。ただし、$I=[0,1]_R$、$S^{n-1}=\{(x_1,\dots,x_n)\in R^n|x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}$とする。

デファイナブル集合Yがデファイナブリー弧状連結とは、任意の$x,y\in Y$に対して、デファイナブル写像$f:[0,1]_R\to Y$が存在して、$x=f(0), y=f(1)$となることである。デファイナブル集合が弧状連結ならば、デファイナブリー弧状連結である。デファイナブル集合がデファイナブリー弧状連結でも、弧状連結とは限らない。たとえば、$R=\mathbb{R}_{alg}$のとき、$[0,1]_{\mathbb{R}_{alg}}$はデファイナブリー弧状連結であるが、弧状連結でない。

命題 3.5. デファイナブル集合Yに対して、Yがデファイナブリー弧状連結であることとデファイナブリー連結であることは同値である。

Yがデファイナブリー連結ならば、任意の$y_0,y_1\in Y$に対して、$\pi_n(Y,y_0)\cong\pi_n(Y,y_1)$なので、$\pi_n(Y)$と書く。

定義 3.6. Yをデファイナブリー連結集合とする。Yがデファイナブリーn連結とは、$1\leqq i\leqq n$となるiに対して、$\pi_i(Y)=0$となることである。

以下を得た。

補題 3.7 ([5]). Yをデファイナブリー連結集合とする。$\pi_{n-1}(Y)=0$ならば、任意のデファイナブル写像$h:S^{n-1}\to Y$に対して、デファイナブル写像$H:D^n\to Y$が存在して、$H|S^{n-1}=f$となる。

命題 3.8 ([5]). Yをデファイナブリー$(n-1)$連結集合、X,AをデファイナブルCW複体とし、XはAに0セルからnセルまでを接着して得られているとする。$f:A\to Y$がデファイナブル写像ならば、デファイナブル写像$H:X\to Y$が存在して、$H|A=f$となる。

定理 3.9 (O-minimal 胞体近似定理 ([5])). $(X, A), (Y, B)$ をデファイナブル CW ペア、$f : (X, A) \to (Y, B)$ をデファイナブル写像とする。このとき、デファイナブル写像 $h : (X, A) \to (Y, B)$ が存在して、f と h は A をとめてデファイナブリーホモトピックで、各 $n \geqq 0$ に対して、$h(X_n) \subset Y_n$ である。ただし、X_n (Y_n) は、X (Y) の n 切片と A (B) の和集合を表すとする。

References

[1] E. Baro and M. Otero, *On o-minimal homotopy groups*, Q. J. Math. **61** (2010), 275–289.

[2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[4] T. Kawakami, *A definable strong G retract of a definable G set in a real closed field*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **61** (2011), 7–11.

[5] T. Kawakami and I. Nagasaki, *Definable obstruction theory*, in preparation.

[6] Y. Peterzil and C. Steinhorn, *Definable compactness and definable subgroups of o-minimal groups*, J. London Math. Soc. **59** (1999), 769–786.

[7] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751–777.

[8] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.

[9] R. Wencel, *Weakly o-minimal expansions of ordered fields of finite transcendence degree*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), 109–116.