数理解析研究所講究録
第 1877 巻 2014 年 9-19

クランの表現から得られるクランとその基本相対不変式

九州大学大学院・数理学府　中島 秀斗[*1] (Hideto NAKASHIMA)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

概要

単位元を持つクラン V とその双対クラン $(V,\triangledown)$ の自己共役な表現 (φ,E) が与えられたとき，直和空間 $V_E:=E\oplus V$ にクラン構造が定義できる．さらに V_E に単位元を添加することによりクラン V_E^0 を構成する．このクラン V_E^0 の右乗法作用素を調べることにより，V_E^0 の基本相対不変式が計算できる．本稿ではクラン V_E^0 の基本相対不変式を，クラン V の基本相対不変式と自己共役表現 φ に付随する対称双線型形式を用いて具体的に求めた．

序文.

Vinberg はユークリッド空間内の等質凸領域とクランと呼ばれる非結合的な代数が，同型を除き 1 対 1 に対応することを示した．特に正則な等質開凸錐は単位元を持つクランと対応している．V を単位元 e_0 を持つクランとし，V の内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ は認容線型形式 $s_0\in V^*$ により与えられているとする．クランの左乗法作用素 L_x $(x\in V)$ からなる集合を $\mathfrak{h}:=\{L_x;\ x\in V\}$ とすれば，$\mathfrak{h}$ は分裂可解なリー環になる．$\mathfrak{h}$ に対応する連結かつ単連結なリー群を $H=\exp\mathfrak{h}$ で表し，V の中の e_0 を通る H-軌道を Ω と表す．すると Ω は正則な開凸錐となり，H は Ω に単純推移的に作用する．内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関するクラン V の双対クランを $(V,\triangledown)$ で表す．実ユークリッド空間 E 上の双対クランの自己共役表現 $\varphi\colon E\to\mathcal{L}(E)$ を，各 $x\in V$ に対して $\varphi(x)$ が自己共役であり，さらに

$$\varphi(x\triangledown y)=\overline{\varphi}(x)\varphi(y)+\varphi(y)\underline{\varphi}(x)\quad(x,y\in V)$$

が成り立つこととする．ただし $\underline{\varphi}(x)$ は $\varphi(x)$ の“下三角部分”であり，$\overline{\varphi}(x)=\underline{\varphi}(x)^*$ である．また，常に $\varphi(e_0)=\mathrm{id}_E$ を仮定する．自己共役表現 φ に付随する対称双線型写像 $Q\colon E\times E\to V$ を用いて，直和空間 $V_E:=E\oplus V$ に積 $\triangle$ を

$$(\xi+x)\triangle(\eta+y)=\underline{\varphi}(x)\eta+(Q(\xi,\eta)+x\triangle y)\quad(\xi,\eta\in E,\ x,y\in V)$$

により定義すると，これはクランになる (定理 2.3)．このクランに対応する等質凸領域は実ジーゲル領域 $D(\Omega,Q)$ であり，$D(\Omega,Q)$ が埋め込まれている等質錐 (cf. [12, Chapter I

[*1] 日本学術振興会特別研究員 DC (課題番号 25・4998)

§5]) を Ω^0 と表す．このとき Ω^0 に対応するクランは，$(V_E, \triangle)$ に単位元 e を添加したクラン $V_E^0 := \mathbb{R}e \oplus V_E$ となる．$u := e - e_0$ と書けば $V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus V_E$ と表せ，この分解に関しての クラン積は，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\xi, \eta \in E$, $x, y \in V$ とすれば，以下のようになる：

$$(\lambda u + \xi + x) \triangle (\mu u + \eta + y) = (\lambda\mu)u + (\mu\xi + \tfrac{1}{2}\lambda\eta + \underline{\varphi}(x)\eta) + (Q(\xi, \eta) + x \triangle y).$$

等質錐の基本相対不変式は対応するクランの右乗法作用素の行列式の既約因子に全て現れる (cf. [7])．命題 2.4 により，等質錐 Ω^0 の基本相対不変式 $P_j(\lambda u + \xi + x)$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$ は多項式 λ と $\Delta_j(\lambda x - Q[\xi]/2)$ の既約因子で尽くされることがわかり，さらに補題 2.5 によりある非負整数 α_j が存在して

$$\Delta_j(\lambda x - Q[\xi]/2) = \lambda^{\alpha_j} P_j(\lambda u + \xi + x)$$

と因数分解できる．したがって $\Delta_j(\lambda x - Q[\xi]/2)$ の既約因子は λ と $P_j(\lambda u + \xi + x)$ のみであり，α_j を決定すれば基本相対不変式 $P_j(\lambda u + \xi + x)$ を確定できることがわかる．この α_j たちを記述するため，3 節において等質錐の指数行列 σ_V と $\underline{\varepsilon}$-表現を定義する．またクランのクラス $\mathcal{V}_r$ を 1 次元のクランから $\underline{\varepsilon}$-表現を用いて帰納的に構成されるものとする．ここで $V \in \mathcal{V}_r$ であり，対応する等質錐の指数行列が σ_V であるとする．このとき φ が $\underline{\varepsilon}$-表現とすると，$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ は以下のように表される (定理 3.2)：

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \sigma_V \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon_1 \\ \vdots \\ 1 - \varepsilon_r \end{pmatrix}.$$

1　クランと等質開凸錐

有限次元実ベクトル空間 V にクランと呼ばれる非結合的な代数構造を定義する．V に双線型な積 $\triangle$ が定義されていて次の 3 条件を満たすとき，代数 $(V, \triangle)$ をクランと呼ぶ：

(C1)　左対称代数である．すなわち任意の $x, y \in V$ に対して $[L_x, L_y] = L_{x \triangle y - y \triangle x}$,

(C2)　ある $s \in V^0$ が存在して $s(x \triangle y)$ が V の内積を定める (認容線型形式),

(C3)　L_x の固有値は全て実数である．

ただし，L_x は左乗法作用素 $L_x y := x \triangle y$ である．この定義において単位元の存在は仮定しておらず，一般的にクランは非可換かつ非結合的な代数である．クランの右乗法作用素を $R_x y := y \triangle x$ により定義する．

以下 V を単位元 e_0 を持つクランとし，V の内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は認容線型形式 s_0 により定義されているとする．クラン V の左乗法作用素のなす空間を $\mathfrak{h} := \{L_x;\ x \in V\}$ とおく．(C1) と (C3) より，$\mathfrak{h}$ は分裂可解リー環になる．$\mathfrak{h}$ に対応する連結かつ単連結なリー群を $H := \exp \mathfrak{h}$ とかき，単位元 e_0 を通る H-軌道を Ω で表す．Vinberg [12] により，Ω は V の中の正則な

等質開凸錐になる．特に H は Ω に単純推移的に作用している．等質錐 Ω の階数が r のとき，互いに直交する r 個の原始冪等元 $c_1,\dots,c_r$ が存在し，それに付随してクラン V は次のように直和分解される：

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&V=\bigoplus_{j\le k}V_{kj},\qquad V_{jj}=\mathbb{R}c_j\quad(j=1,\dots,r),\\
&V_{kj}=\left\{x\in V;\ L_{c_i}x=\tfrac{1}{2}(\delta_{ij}+\delta_{ik})x,\ R_{c_i}x=\delta_{ij}x\right\}\quad(1\le j<k\le r).
\end{aligned}
$$

この分解をクラン V の正規分解と呼ぶ．正規分解に則して，次のような乗法則が成立する：

$$
\begin{gathered}
V_{ji}\,\triangle\,V_{lk}=\{0\}\quad(\text{if } i\neq k,l),\quad V_{kj}\,\triangle\,V_{ji}\subset V_{ki},\\
V_{ji}\,\triangle\,V_{ki}\subset V_{jk}\text{ or }V_{jk}\quad(\text{according to } j\ge k\text{ or } j\le k).
\end{gathered}
$$

Ω 上の関数 f が H に関して相対不変であるとは，H のある 1 次元表現 χ が存在して，任意の $h\in H$, $x\in\Omega$ に対して $f(hx)=\chi(h)f(x)$ が成り立つことをいう．このとき，以下の定理が成り立つ.

定理 1.1 (Ishi [4])**.** V 上の H-相対不変な既約多項式 $\Delta_1(x),\dots,\Delta_r(x)$ が存在して，V 上の任意の H-相対不変な多項式 $p(x)$ は

$$
(2)\qquad p(x)=(\mathrm{const})\Delta_1(x)^{n_1}\cdots\Delta_r(x)^{n_r}\quad(n_1,\dots,n_r\in\mathbb{Z}_{\ge0})
$$

と表せる．さらに等質錐 Ω は既約多項式 $\Delta_1(x),\dots,\Delta_r(x)$ により次のように記述される：

$$
\Omega=\{x\in V;\ \Delta_1(x)>0,\dots,\Delta_r(x)>0\}.
$$

この意味で $\Delta_1(x),\dots,\Delta_r(x)$ を等質錐 Ω の基本相対不変式と呼ぶ．基本相対不変式の順番は $c_1,\dots,c_r$ に依存してとるものとする (cf. [4])．定理 1.1 において $p(x)=\mathrm{Det}\,R_x$ とすれば，これは H-相対不変になるので式 (2) のように表記できるが，実はより強い次の定理が成り立つことが知られている.

定理 1.2 (Ishi–Nomura [7])**.** 多項式 $\mathrm{Det}\,R_x$ の既約因子は丁度 $\Delta_1(x),\dots,\Delta_r(x)$ である.

V に新しい積 $\triangledown$ を内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を用いて次のように定義する：

$$
\big\langle x\,\triangledown\,y\,|\,z\big\rangle=\langle y\,|\,x\,\triangle\,z\rangle\quad(x,y,z\in V).
$$

このように定義すると $(V,\triangledown)$ はクランになることがわかる．このクランを $(V,\triangle)$ の双対クランと呼び，対応する等質錐は Ω の双対錐 Ω^* になる．クラン V の認容線型形式 s_0 および単位元 e_0 は双対クラン $(V,\triangledown)$ においてもそれぞれ認容線型形式・単位元となる．クラン積 $\triangle$ と双対クラン積 $\triangledown$ の間には次のような関係式が成り立つ.

命題 1.3. 任意の $x,y\in V$ に対して，$x\,\triangle\,y+x\,\triangledown\,y=y\,\triangle\,x+y\,\triangledown\,x$.

クラン積 $\triangle$ に関して互いに直交する原始冪等元 $c_1, \ldots, c_r$ は，双対クラン積 $\triangledown$ に関しても互いに直交する原始冪等元となり，V の正規分解 (1) は $(V, \triangledown)$ の正規分解にもなっている．双対クラン積に関する乗法則は次のようになる．

$$\begin{aligned} V_{ji} \triangledown V_{lk} = \{0\} \quad (\text{if } j \neq i, l), \quad V_{ki} \triangledown V_{jk} \subset V_{ji}, \\ V_{ij} \triangledown V_{ik} \subset V_{kj} \text{ or } V_{jk} \quad (\text{according to } j \geq k \text{ or } j \leq k). \end{aligned} \tag{3}$$

1.1 例. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とおき，$d = \dim \mathbb{K}$ とする．実ベクトル空間 $V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{K})$ に積 $\triangle$ を以下で定義するとクランになる：

$$x \triangle y := \underline{x} y + y (\underline{x})^* \quad (x, y \in V).$$

ただし，$\underline{x}$ は行列 $x = (x_{ij})$ の下三角部分

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & \frac{1}{2} x_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & \frac{1}{2} x_{rr} \end{pmatrix}$$

である．クラン $(V, \triangle)$ に対応する等質錐は対称錐 $\Omega = \{x \in V;\ x \text{ は正定値}\}$ であり，その基本相対不変式は左上からの小行列式 $\Delta_k(x) = \det^{(k)}(x)$ $(k = 1, \ldots, r)$ となる．クランの右乗法作用素 R_x の行列式を計算すると，

$$\mathrm{Det}\, R_x = \Delta_1(x)^d \cdots \Delta_{r-1}(x)^d \Delta_r(x) \tag{4}$$

となり，確かに基本相対不変式 $\Delta_k(x)$ が全て現れている．また双対クラン積 $\triangledown$ は

$$x \triangledown y := (\underline{x})^* y + y \underline{x} \quad (x, y \in V)$$

である．

2 クランの表現とその表現から得られるクラン

引き続き V を単位元 e_0 を持つクランとする．E を内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$ を持つ実ユークリッド空間とし，E 上の線型写像のなすベクトル空間を $\mathcal{L}(E)$ で表す．線型写像 $\varphi \colon V \to \mathcal{L}(E)$ に対して“下三角部分”$\underline{\varphi}$ と“上三角部分”$\overline{\varphi}$ を，正規分解 $x = \sum_j x_j c_j + \sum_{j<k} x_{kj}$ を用いて次のように定義する：

$$\underline{\varphi}(x) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} x_j \varphi(c_j) + \sum_{j<k} \varphi(c_k) \varphi(x_{kj}) \varphi(c_j), \qquad \overline{\varphi}(x) := \underline{\varphi}(x)^*.$$

(φ, E) が双対クラン $(V, \triangledown)$ の自己共役表現であるとは，次の 2 条件をみたすこととする：

(1) 任意の $x \in V$ に対して，$\varphi(x)^* = \varphi(x)$,

(2) $\varphi(x \triangledown y) = \overline{\varphi}(x)\varphi(y) + \varphi(y)\underline{\varphi}(x) \quad (x, y \in V)$.

また $\varphi(e_0) = \mathrm{id}_E$ も仮定する．したがって特に $\underline{\varphi}(x) + \overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$ が成り立つ．

命題 2.1. $\varphi(c_j)$ は互いに直交する射影であり，$\underline{\varphi}(x)$ は下三角型の線形変換になる．また，

$$[\underline{\varphi}(x), \underline{\varphi}(y)] = \underline{\varphi}(x \triangle y - y \triangle x)$$

が成り立つ．

クラン V の自己共役表現 (φ, E) に付随して，対称双線型形式 $Q\colon E \times E \to V$ を

$$\langle \varphi(x)\xi \,|\, \eta \rangle_E = \langle Q(\xi, \eta) \,|\, x \rangle \quad (x \in V,\ \xi, \eta \in E).$$

により定義する．このとき，次が成り立つ．

命題 2.2. 1. $x \triangle Q(\xi, \eta) = Q(\underline{\varphi}(x)\xi, \eta) + Q(\xi, \underline{\varphi}(x)\eta)$.
2. 任意の $\xi \in E \backslash \{0\}$ に対して，$Q(\xi, \xi) \in \overline{\Omega} \backslash \{0\}$ (Ω-*positive*).

直和空間 $V_E := E \oplus V$ に積 $\triangle$ を以下で定義する：

$$(\xi + x) \triangle (\eta + y) = \underline{\varphi}(x)\eta + (Q(\xi, \eta) + x \triangle y) \quad (\xi, \eta \in E,\ x, y \in V).$$

定理 2.3. $(V_E, \triangle)$ はクランになり，対応する等質凸領域は実ジーゲル領域

$$D(\Omega, Q) := \left\{ \xi + x \in V_E;\ x - \tfrac{1}{2}Q(\xi, \xi) \in \Omega \right\}$$

になる．

ジーゲル領域 $D(\Omega, Q)$ を 1 つ次元の大きい空間の原点を通らない超平面に埋め込み，それと原点とを通る半直線から得られる錐を Ω^0 で表す。Vinberg [12] により，Ω^0 に対応するクランは，クラン $(V_E, \triangle)$ に単位元 e を添加したクラン $V_E^0 := \mathbb{R}e \oplus V_E$ となる．ここで $u := e - e_0$ とおけば，$V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus V_E$ と表せる．この分解に関して，Ω^0 は次のように表せる：

$$\begin{aligned} \Omega^0 &= \left\{ \lambda u + \lambda\xi + \lambda x \in V_E^0;\ \lambda > 0,\ \xi + x \in D(\Omega, Q) \right\} \\ &= \left\{ \lambda u + \xi + x \in V_E^0;\ \lambda > 0,\ \lambda x - \tfrac{1}{2}Q(\xi, \xi) \in \Omega \right\}. \end{aligned}$$

さらに V_E^0 のクラン積は次のようになる：

$$(5) \quad (\lambda u + \xi + x) \triangle (\mu u + \eta + y) = (\lambda\mu)u + (\mu\xi + \tfrac{1}{2}\lambda\eta + \underline{\varphi}(x)\eta) + (Q(\xi, \eta) + x \triangle y).$$

定理 1.2 にあるように，単位元を持つクランの右乗法作用素の行列式の既約因子として，対応する等質錐の基本相対不変式がすべて現れる．この事実を用いて等質錐 Ω^0 の基本相対

不変式を求める．クラン $(V_E^0, \triangle)$ の右乗法作用素 R^0 は，基底を u，E の基底，V の基底，の順で取れば，

$$R^0_{\lambda u+\xi+x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\xi & \lambda\,\mathrm{id}_E & R^0_\xi \\ 0 & R^0_\xi & R_x \end{pmatrix}$$

となる．$R^0_\xi(V) \subset E$，$R^0_\xi E \subset V$ であることに注意．

命題 2.4. クラン V の右乗法作用素を R で表せば，次が成り立つ：

$$\operatorname{Det} R^0_{\lambda u+\xi+x} = \lambda^{1-\dim E+\dim V} \operatorname{Det} R_{\lambda x - Q(\xi,\xi)/2} \qquad (\lambda u + \xi + x \in V_E^0).$$

等質錐 Ω の基本相対不変式を $\Delta_j(x)$ $(j = 1, \ldots, r)$ とすれば，定理 1.2 より，等質錐 Ω^0 の基本相対不変式は多項式 λ および $\Delta_j(\lambda x - Q(\xi,\xi)/2)$ の既約因子で尽くされる事がわかる．等質錐 Ω^0 の階数は $r+1$ であるので，Ω^0 は $r+1$ 個の基本相対不変式 $P_0(v), P_1(v), \ldots, P_r(v)$ $(v \in V_E^0)$ を持つ．

補題 2.5. 多項式 $\Delta_j(\lambda x - Q(\xi,\xi)/2)$ $(j = 1, \ldots, r)$ はある整数 $\alpha_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて次のように既約因数分解される：

$$\Delta_j(\lambda x - Q(\xi,\xi)/2) = \lambda^{\alpha_j} P_j(\lambda u + \xi + x).$$

この補題より，$P_1(v), \ldots, P_r(v)$ を求めるためには，$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ を決定すればよいことがわかる．

3 主結果

H-相対不変な関数の指数 (multiplier) を次のように定義する．Ishi [3] にあるように，任意の $h \in H$ に対して $h_{ii} \in \mathbb{R}_{>0}$ と $h_{kj} \in V_{kj}$ が存在して

$$h = (\exp T_{11})(\exp L_1) \cdots (\exp L_{r-1})(\exp T_{rr})$$

とかける．ただし，$T_{jj} = (2 \log h_{jj}) L_{c_j}$ および $L_j = L_{h_{j+1,j}} + \cdots + L_{h_{rj}}$ とおいた．このとき，$h \in H$ を次のように表す：

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ h_{r1} & h_{r2} & \cdots & h_{rr} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

H-相対不変な関数 f に対応する 1 次元表現 χ は，ある実数 $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ が存在して

$$\chi(h) = (h_{11})^{2\sigma_1} \ldots (h_{rr})^{2\sigma_r}$$

と表現できる．この $\boldsymbol{\sigma} = {}^t(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ を関数 f の指数と呼ぶ．等質錐 Ω の基本相対不変式 Δ_j $(j = 1, \ldots, r)$ の指数を $\boldsymbol{\sigma}_j = {}^t(\sigma_{j1}, \ldots, \sigma_{jr})$ とおき，これらを並べた行列 $\sigma_V := {}^t(\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_r)$ を等質錐 Ω の指数行列 (multiplier matrix) と呼ぶ．Ishi [4] にある基本相対不変式の構成法により，σ_V は下三角行列であり，その対角成分は全て 1 になることがわかる．特に σ_V は可逆である．

$\underline{\varepsilon} = {}^t(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r$ とする．$c_{\underline{\varepsilon}} := \varepsilon_1 c_1 + \cdots + \varepsilon_r c_r$ とすれば，$c_{\underline{\varepsilon}} \in \overline{\Omega}$ である．$c_{\underline{\varepsilon}}$ を通る V の中の H-軌道を $\mathcal{O}_{\underline{\varepsilon}}$ で表す．また自己共役表現 φ に付随する対称双線型形式 Q に関して，$Q[E] := \{Q(\xi,\xi);\ \xi \in E\}$ とおく．$Q[E] = \overline{\mathcal{O}_{\underline{\varepsilon}}}$ を満たすとき，表現 φ は $\underline{\varepsilon}$-表現であるという．

(φ, E) を双対クランの任意の自己共役表現とする．$E_j := \varphi(c_j)E$ $(j = 1, \ldots, r)$ とおき，$d_{kj} := \dim V_{kj}$ $(1 \le j < k \le r)$ とおく．$i = 1, \ldots, r$ に対して $\underline{l}^{(i)} \in \mathbb{R}^r$ を，帰納的に次のように定義する：$\underline{l}^{(1)} := {}^t(\dim E_1, \ldots, \dim E_r)$ とし，$2 \le i \le r$ に対しては

$$\underline{l}^{(i)} := \begin{cases} \underline{l}^{(i-1)} - {}^t(0, \ldots, 0, d_{i+1,i}, \ldots, d_{ri}) & (\text{if } \underline{l}^{(i-1)}_{i-1} > 0), \\ \underline{l}^{(i-1)} & (\text{if } \underline{l}^{(i-1)}_{i-1} \le 0) \end{cases}$$

と定義する．さらに $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(\varphi) \in \{0,1\}^r$ を

$$\varepsilon_i = 1 \quad (\text{if } \underline{l}^{(i)}_i > 0), \qquad \varepsilon_i = 0 \quad (\text{if } \underline{l}^{(i)}_i \le 0) \quad (i = 1, \ldots, r)$$

により定義する．

定理 3.1.[*2] (φ, E) を任意のクランの自己共役表現とする．このとき，φ は $\underline{\varepsilon}(\varphi)$-表現になる．

V の正規分解 (1) を用いて V の部分空間 E' と V' を

$$E' = \bigoplus_{k \ge 2} V_{k1}, \qquad V' = \bigoplus_{2 \le j \le k \le r} V_{kj} \tag{7}$$

により定義する．乗法則 (3) により，V' は双対積 $\triangledown$ に関して閉じており，したがって $(V, \triangledown)$ の部分クランとなる．同じく乗法則 (3) より，$E' \triangledown V' \subset E'$ であるので，各 $x' \in V'$ に対して E' 上の線型変換 $\varphi'(x')\colon \xi' \mapsto \xi' \triangledown x'$ が定義される．ここで命題 1.3 と定義 (C1)，乗法則 3 などにより (φ', E') が部分クラン $(V', \triangledown)$ の自己共役な表現になっていることがわかる．クラン $(V', \triangle)$ と表現 (φ', E') を用いて，式 (5) により定義されるクランは，明らかに元のクラン $(V, \triangle)$ と同型である．したがってクラン V をクラン V' と表現 (φ', E') により構成されるクランと同一視する．

クランのクラス $\mathcal{V}_r$ を帰納的に以下により定義する：$\mathcal{V}_1$ は階数 1 のクランからなるとする．次に $\mathcal{V}_k$ まで定義されたと仮定する．階数 $k+1$ のクラン V を式 (7) により

---

*2 講演のときは予想であったが，名古屋大学の伊師英之先生により正しいということを教えて頂いた．

$V = \mathbb{R}c_1 \oplus E' \oplus V'$ と分解する．$V' \in \mathcal{V}_k$ であり，かつある $\underline{\varepsilon}' \in \{0,1\}^k$ が存在して $(V', \triangledown)$ の自己共役表現 (φ', E') が $\underline{\varepsilon}'$-表現となるとき，$V \in \mathcal{V}_{k+1}$ と定義する．定理 3.1 より，$V \in \mathcal{V}_r$ は階数が r であることと同値になる．

定理 3.2. $V \in \mathcal{V}_r$ とする．(φ, E) を $\underline{\varepsilon}$-表現とすれば，次が成り立つ．

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \sigma_V \begin{pmatrix} 1-\varepsilon_1 \\ \vdots \\ 1-\varepsilon_r \end{pmatrix}.$$

Sketch of the proof. クラン V の階数 r に関する帰納法により証明する．式 (7) により V の部分クラン V' と $(V', \triangledown)$ の自己共役表現 (φ', E') を構成する．$e_1 := c_2 + \cdots + c_r$ とおくと，これは V' の単位元になる．j を一つ固定し，多項式 $\Delta_j(\lambda e_0 - x_{\underline{\varepsilon}})$ $(\lambda \in R,\ x_{\underline{\varepsilon}} \in \overline{\mathcal{O}_{\underline{\varepsilon}}})$ を考察する．$x_{\underline{\varepsilon}} \in \mathcal{O}_{\underline{\varepsilon}}$ について調べれば十分．このとき，ある $h \in H$ が存在して $x_{\underline{\varepsilon}} = hc_{\underline{\varepsilon}}$ と表せ，式 (6) の表記を用いて h を

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ \xi' & h' \end{pmatrix} \quad (h_1 \in \mathbb{R},\ \xi' \in E',\ h' \in H')$$

と表す．ただし，H' はクラン V' の左乗法作用素からなるリー環 $\mathfrak{h}'$ に対応する連結かつ単連結なリー群 $H' = \exp \mathfrak{h}'$ である．$\tilde{\underline{\varepsilon}} := {}^t(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^{r-1}$ とおき，$x_{\tilde{\underline{\varepsilon}}} := h'(\varepsilon_2 c_2 + \cdots + \varepsilon_r c_r)$ とする．このとき

$$\lambda e_0 - x_{\underline{\varepsilon}} = (\lambda - \varepsilon_1 h_1^2)c_1 - \varepsilon_1 \xi' + (\lambda e_1 - x_{\tilde{\underline{\varepsilon}}} - \tfrac{1}{2}Q(\xi', \xi'))$$

となるので，$a^2 = \lambda - \varepsilon_1 h_1^2$ とおけば，補題 2.5 より

$$(8) \qquad \Delta_j(\lambda e_0 - x_{\underline{\varepsilon}}) = \begin{cases} \lambda - \varepsilon_1 h_1^2 & (j=1), \\ a^{2\sigma_{j1}} \Delta'_j(\lambda e_1 - x_{\tilde{\underline{\varepsilon}}} - \frac{\varepsilon_1 \lambda}{2a^2} Q'(\xi', \xi')) & (j = 2, \ldots, r) \end{cases}$$

を得る．ただし Δ'_j $(j = 2, \ldots, r)$ はクラン V' の基本相対不変式である．

まず $j = 1$ のときを考える．明らかに $\alpha_1 = 1 - \varepsilon_1$ であり，$\sigma_{k1} = \delta_{k1}$ $(k = 1, \ldots, r)$ なので，$\alpha_1 = \sigma_{11}(1-\varepsilon_1) = \sum_{i=1}^r \sigma_{i1}(1-\varepsilon_i)$ となる．次に $j \geq 2$ かつ $\varepsilon_1 = 0$ とする．この場合は $a^2 = \lambda$ であり，式 (8) は帰納法の仮定により既約な多項式 $\mathcal{P}_j(\lambda, x_{\tilde{\underline{\varepsilon}}})$ を用いて，

$$\Delta_j(\lambda e_0 - x_{\underline{\varepsilon}}) = \lambda^{\sigma_{j1}} \Delta'_j(\lambda e_1 - x_{\tilde{\underline{\varepsilon}}}) = \lambda^{\sigma_{j1} + \tilde{\alpha}_j(\tilde{\underline{\varepsilon}})} \mathcal{P}_j(\lambda, x_{\tilde{\underline{\varepsilon}}})$$

と因数分解される．$\varepsilon_1 = 0$ であったので，$\alpha_j = \sigma_{j1} + \tilde{\alpha}_j(\tilde{\underline{\varepsilon}}) = \sum_{i=1}^r \sigma_{ji}(1-\varepsilon_i)$ となる．最後に $j \geq 2$ かつ $\varepsilon_1 = 1$ を仮定する．このとき式 (8) はある有理関数 $\mathcal{F}_j(\lambda, x_{\tilde{\underline{\varepsilon}}})$ を用いて

$$\Delta_j(\lambda e_0 - x_{\underline{\varepsilon}}) = \lambda^{\beta_j(\tilde{\underline{\varepsilon}})} a^{2(\sigma_{j1} - d'_j + \beta_j(\varepsilon'))} \mathcal{F}_j(\lambda, x_{\underline{\varepsilon}})$$

とかける．帰納法の仮定より $\sigma_{j1} - d'_j + \beta_j(\varepsilon') = 0$ が成立することに注意．ここで，クラン V' に付随する等質錐を Ω' とかく．H' の Ω' 上の作用 $\rho'(h)x = hx$ から，自然に概均質

ベクトル空間 $((H')^{\mathbb{C}}, (\rho')^{\mathbb{C}}, (V')^{\mathbb{C}})$ を構成でき，特にクラン V' の基本相対不変式 $\Delta'_j(x')$ $(j = 2, 3, \ldots, r)$ はその概均質ベクトル空間の基本相対不変式へと拡張される．この性質を用いると，実は $\mathcal{F}_j(\lambda, x_{\tilde{\underline{\varepsilon}}})$ は既約多項式になることがわかり，$\alpha_j = \beta_j(\tilde{\underline{\varepsilon}}) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_{ji}(1-\varepsilon_i)$ を得る．α_j たちをベクトル表記すれば

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \sigma_V \begin{pmatrix} 1-\varepsilon_1 \\ \vdots \\ 1-\varepsilon_r \end{pmatrix}$$

となる． □

$\operatorname{Det} R_x$ は H-相対不変であったので，定理 1.1 より自然数 $n_1, \ldots, n_r$ が存在して

$$\operatorname{Det} R_x = \Delta_1(x)^{n_1} \cdots \Delta_r(x)^{n_r} \quad (x \in V)$$

と表せる．ここで $m_k := \sum_{l \geq k} \dim V_{lk}$ $(k = 1, \ldots, r)$ とおけば，補題 2.5 により，次の系が得られる．

系 3.3. $\operatorname{Det} R_x$ の基本相対不変式に関する指数 $n_1, \ldots, n_r$ は次を満たす：

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = ({}^t\sigma)^{-1} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix}.$$

3.1 例.

$V = \operatorname{Herm}(r, \mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$ とする．$E_p = \operatorname{Mat}(r \times p, \mathbb{K})$ とし，V 上の線型写像 $\varphi_p \colon V \to \mathcal{L}(E_p)$ を

$$\varphi_p(x)\xi := x\xi \qquad (x \in V,\ \xi \in E_p)$$

により定義する．ただし，右辺の積は通常の行列積である．また，$\underline{\varepsilon}(p) \in \{0,1\}^r$ を

$$\underline{\varepsilon}(p) := \begin{cases} {}^t(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, 0, \ldots, 0) & (1 \leq p < r), \\ {}^t(1, \ldots, 1) & (r \leq p). \end{cases}$$

と定義すると，(φ_p, E_p) は $\underline{\varepsilon}(p)$-表現になる．ここで論文 [10] における表現の正則性は，$\underline{\varepsilon}(p) = {}^t(1, \ldots, 1)$ の場合と対応している．このとき定理 3.2 より

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{cases} {}^t(\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, 1, 2, \ldots, r-p) & (1 \leq p < r), \\ {}^t(0, \ldots, 0) & (r \leq p). \end{cases}$$

となり，これは確かに論文 [10] で求められたものと一致している．また基本相対不変式が左上からの小行列式 $\Delta_k(x) = \det^{(k)}(x)$ であることより，V の指数行列 σ とその逆行列 σ^{-1} は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

になる．系 3.3 において，$m_k = 1 + d(r-k)$ $(k = 1, \ldots, r)$ であることに注意すれば，

$$({}^t\sigma)^{-1} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{r-1} \\ m_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + d(r-1) \\ \vdots \\ 1 + d \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり，確かに式 (4) と一致している．

参考文献

[1] J. Dorfmeister, Inductive construction of homogeneous cones, Trans. Amer. Math. Soc., **252** (1979), 321–349.

[2] J. Faraut and A. Korányi, Analysis on symmetric cones, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[3] H. Ishi, Positive Riesz distributions on homogeneous cones, J. Math. Soc. Japan, **52** (2000), 161–186.

[4] H. Ishi, Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.

[5] H. Ishi, Representation of clans and homogeneous cones, Vestnik Tambov University, **16** (2011), 1669–1675.

[6] H. Ishi, Riesz measures and Wishart laws associated to quadratic maps, Journal of the Mathematical Society of Japan.

[7] H. Ishi and T. Nomura, Tube domain and an orbit of a complex triangular group, Math. Z., **259** (2008), 697–711.

[8] 木村達雄, 概均質ベクトル空間, 岩波書店, 1998.

[9] H. Nakashima, Clans defined by representations of clans and the associated basic relative invariants, (執筆中).

[10] H. Nakashima and T. Nomura, Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants, Kyushu J. Math. **67** (2013), 163–202.

[11] O. S. Rothaus, The construction of homogeneous convex cones, Ann. of Math., **83** (1966), 358–376; Correction, ibid., **87** (1968), 399.

[12] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.