数理解析研究所講究録
第 1877 巻 2014 年 29-40

分裂型実可解リー群の一般化最高ウェイトユニタリ表現

名古屋大学 大学院多元数理科学研究科 伊師英之 (Hideyuki ISHI)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

概要. 最高ウェイトユニタリ表現という概念を半単純とは限らない実リー群に対しても定義できるように拡張する. 連結単連結な分裂型可解リー群については, そのような表現は等質ジーゲル領域上の正則函数からなるヒルベルト空間に実現され, 完全に分類される.

序.

通常の意味でのリー群の最高ウェイトユニタリ表現は, 半単純コンパクトリー群またはエルミート型半単純リー群について定義されるもので, 等質正則直線束の正則切断の空間に自然に実現される. その分類は Enright-Howe-Wallach [2] および Jakobsen [8] によって完成された. Lisiecki は複素幾何的な視点からコヒーレント・ステート表現なるユニタリ表現のクラスを導入し, それが最高ウェイトユニタリ表現の一般化になっていることを示す一方, ユニモジュラーなリー群のコヒーレント・ステート表現を分類している ([13, 14]). Neeb [15, 16] は Lisiecki の考察した表現を一般化最高ウェイト (generalized highest weight) 表現として定式化し, その複素半群への解析接続を研究した.

我々は「コンパクトに埋め込まれたカルタン部分代数の存在」という Neeb の要請を外して一般化最高ウェイトユニタリ表現を考察する. この設定では, もはやカルタン部分代数やルート系は現れず, 一つの表現が無数の異なる '最高ウェイト' を持つなど, これまでの研究には無い新しい現象が生じている一方, 最高ウェイトユニタリ表現の複素幾何との密接なつながりは受け継がれている. 基本問題は全ての一般化最高ウェイトユニタリ表現を分類することであるが, 現段階では未解決であり, 本稿では連結かつ単連結な分裂型可解リー群について, この問題の解答を与える. 第 1 節で詳しい定義を与えた後, 第 2 節では正の全複素的分極環からの複素解析的誘導表現のユニタリ化として一般化最高ウェイトユニタリ表現が実現されることを示す. 分裂型可解リー代数が正の全複素的分極環をもつならば, それは本質的に正規 j 代数から構成されるという藤原英徳の結果 [3, 4] を踏まえ, 表現の分類は正規 j 代数の言葉を用いて記述される (第 3 節). 第 4 節では正規 j 代数から定まる等質ジーゲル領域上の正則函数からなる再生核ヒルベルト空間に一般化最高ウェイト表現を実現する. 紙数の関係で概要の説明にとどまったが, 実はジーゲル領域上の函数空間に実現できるという点が, 表現のユニタリ化可能性の判定において決定的な役割を果たしているのである.

§1. 一般化最高ウェイトユニタリ表現.

実リー代数 $\mathfrak{g}$ の複素化を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ で表す. 複素リー部分代数 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ で $\mathfrak{p}+\overline{\mathfrak{p}}=\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (ただし $\overline{\mathfrak{p}} := \{\bar{Z};\, Z \in \mathfrak{p}\}$) を満たすものを一般化放物型部分代数とよぶ. この $\mathfrak{p}$ に関して $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-加群 V が一般化最高ウェイト (generalized highest weight, 以下 GHW と略す) 加群であるとは, 次の二条件を満たす $v_0 \in V$ が存在することをいう:
(V1) $\mathfrak{p}\cdot v_0 = \mathbb{C}v_0$,
(V2) $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\cdot v_0 = V$.
このとき $\mathfrak{p}$ 上の $\mathbb{C}$-線型形式 λ_0 で $Z\cdot v_0 = \lambda_0(Z_0)v_0$ $(Z \in \mathfrak{p})$ となるものが定まるが, この λ_0 を一般化最高ウェイト (GHW), v_0 を λ_0 に対応する GHW ベクトルとよぶ. 定義から $\lambda_0 : \mathfrak{p} \to \mathbb{C}$ はリー代数の表現である. すなわち

$$\lambda_0([Z_1, Z_2]) = 0 \qquad (Z_1, Z_2 \in \mathfrak{p})$$

が成り立つ. 以上の概念は Jakobsen-Kac [9] によって $\mathfrak{g}$ がカッツ・ムーディ代数の場合に考察された. 我々の用語法は Neeb [16] に従う.

以後 $\mathfrak{g}$ は有限次元連結実リー群 G のリー代数とする. リー群 G のユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ が $\mathfrak{p}$ に関して GHW ユニタリ表現であるとは, C^∞ ベクトルの空間 $\mathcal{H}_\pi^\infty$ の稠密な $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-部分空間 $V \subset \mathcal{H}_\pi^\infty$ で $\mathfrak{p}$ に関して GHW 加群となるものが存在することをいう. Neeb [16] はこの概念をコンパクトに埋め込まれたカルタン代数 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ (すなわち $e^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{t}}$ が $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の中でコンパクト) の存在の仮定のもとに論じたが, 我々はこの仮定を要請しない. リー群 G が半単純のとき, $\mathfrak{p}$ は適当なルート系から定まる通常の意味の放物型部分代数であり, $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ も Harish-Chandra ([5]) の意味の最高ウェイトユニタリ表現であることが証明されている ([14, 15]).

ここで GHW ユニタリ表現の例を挙げよう. 上半平面 $\mathbb{H}$ を保存するアファイン変換全体からなる群 $G = \{g_{b,a} : z \mapsto az+b;\, a>0,\, b \in \mathbb{R}\}$ を考える. 群 G は $SL(2,\mathbb{R})$ の可解部分リー群 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{1/2} & 0 \\ 0 & a^{-1/2} \end{pmatrix} ;\, a>0, b \in \mathbb{R} \right\}$ として実現でき, よって G のリー代数 $\mathfrak{g}$ は $H = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ と $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で張られる 2 次元の線型リー代数と同型である. いま $\mathfrak{p} := \mathbb{C}(H+iE)$ とおくと, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p} \oplus \overline{\mathfrak{p}}$ だから $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の一般化放物型部分代数である. 上半平面 $\mathbb{H}$ 上のルベーグ測度に関して二乗可積分な正則函数からなるヒルベルト空間を $L^2_{hol}(\mathbb{H})$ と表し, 群 G のユニタリ表現 $(\pi, L^2_{hol}(\mathbb{H}))$ を

$$\pi(g)f(z) := a^{-1}f(g^{-1}\cdot z) \quad (f \in L^2_{hol}(\mathbb{H}),\, g = g_{b,a} \in G,\, z \in \mathbb{H})$$

と定義する. さらに $s \in \mathbb{C}$ に対し $\mathbb{H}$ 上の正則函数 f_s を $f_s(z) := \left(\frac{z+i}{2i}\right)^{-(s+1)}$ $(z \in \mathbb{H})$ と定めると, $f_s \in L^2_{hol}(\mathbb{H})$ となる必要十分条件は $\Re s > 0$ で, このとき

$$\dot{\pi}(H+iE)f_s = sf_s$$

が成り立ち, f_s は $\mathfrak{p}$ に関する GHW ベクトルになっている.

このように一つのユニタリ表現が無数の GHW を持つことがあり得るという事実は, 通常の最高ウェイト理論との大きな違いである.

§2. 複素解析的誘導表現との関係.

リー群 G の GHW ユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ について GHW $\lambda_0 : \mathfrak{p} \to \mathbb{C}$ と GHW ベクトル $v_0 \in \mathcal{H}_\pi$ を一つ固定し, 前節の記号を引き続き用いる. いま

$$\mathfrak{p}_0 := \{\, Z \in \mathfrak{g}_\mathbb{C} \,;\, \dot{\pi}(Z)v_0 \in \mathbb{C}v_0 \,\} \tag{1}$$

とおくと, $\mathfrak{p}_0$ は $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の複素部分リー代数で $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_0$ である. 線型形式 $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$ を

$$\xi_0(X) := \frac{1}{i}\frac{(\dot{\pi}(X)v_0|v_0)_{\mathcal{H}_\pi}}{\|v_0\|^2_{\mathcal{H}_\pi}} \qquad (X \in \mathfrak{g}) \tag{2}$$

によって定める (π のユニタリ性から, ξ_0 は実数値であることに注意).

命題 1. 部分リー代数 $\overline{\mathfrak{p}}_0 := \left\{\, \overline{Z} \,;\, Z \in \mathfrak{p}_0 \,\right\} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ は $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$ における正の全複素的分極環 (totally complex positive polarization) である. すなわち, 次が成り立つ :
(P1) $\mathfrak{p}_0 + \overline{\mathfrak{p}}_0 = \mathfrak{g}_\mathbb{C}$,
(P2) $\xi_0([\overline{\mathfrak{p}}_0, \overline{\mathfrak{p}}_0]) = \{0\}$,
(P3) 任意の $Z \in \mathfrak{p}_0$ について $i\xi_0([\overline{Z}, Z]) \geq 0$,
(P4) $Z \in \mathfrak{p}_0$ について $i\xi_0([\overline{Z}, Z]) = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathfrak{p}_0 \cap \overline{\mathfrak{p}}_0$.

証明. (P1) は $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_0$ から従う. 一方 (1) と (2) から

$$\dot{\pi}(Z)v_0 = i\xi_0(Z)v_0 \qquad (Z \in \mathfrak{p}_0). \tag{3}$$

これから (P2) が分かる. さらに (2) から

$$\begin{aligned} i\xi_0([\overline{Z}, Z])\|v_0\|^2_{\mathcal{H}_\pi} &= (\dot{\pi}([\overline{Z}, Z])v_0|v_0)_{\mathcal{H}_\pi} = (\dot{\pi}(\overline{Z})\dot{\pi}(Z)v_0|v_0)_{\mathcal{H}_\pi} - (\dot{\pi}(Z)\dot{\pi}(\overline{Z})v_0|v_0)_{\mathcal{H}_\pi} \\ &= -\|\dot{\pi}(Z)v_0\|^2_{\mathcal{H}_\pi} + \|\dot{\pi}(\overline{Z})v_0\|^2_{\mathcal{H}_\pi}. \end{aligned}$$

最後の等号は π のユニタリ性による. ここで (3) と (2) から

$$\dot{\pi}(Z)v_0 = i\xi_0(Z)v_0 = \frac{(\dot{\pi}(Z)v_0|v_0)_{\mathcal{H}_\pi}}{\|v_0\|^2_{\mathcal{H}_\pi}}v_0 = -\frac{(v_0|\dot{\pi}(\overline{Z})v_0)_{\mathcal{H}_\pi}}{\|v_0\|^2_{\mathcal{H}_\pi}}v_0.$$

これらから

$$\begin{aligned} i\xi_0([\overline{Z}, Z])\|v_0\|^2_{\mathcal{H}_\pi} &= -\frac{|(v_0|\dot{\pi}(\overline{Z})v_0)_{\mathcal{H}_\pi}|^2}{\|v_0\|^2_{\mathcal{H}_\pi}} + \|\dot{\pi}(\overline{Z})v_0\|^2 \\ &= \frac{-|(v_0|\dot{\pi}(\overline{Z})v_0)_{\mathcal{H}_\pi}|^2 + \|\dot{\pi}(\overline{Z})v_0\|^2_{\mathcal{H}_\pi}\|v_0\|^2_{\mathcal{H}_\pi}}{\|v_0\|^2_{\mathcal{H}_\pi}}. \end{aligned}$$

したがってコーシー・シュヴァルツの不等式より (P3) が成り立つ. 右辺が 0 ならば $\dot{\pi}(\overline{Z})(v_0)$ と v_0 は線型従属だから (1) より $\overline{Z} \in \mathfrak{p}_0$. すなわち (P4) も成り立つ. □

部分リー群 $K_0 \subset G$ を

$$K_0 := \{\, g \in G\,;\, \pi(g)v_0 \in \mathbb{C}v_0 \,\} \tag{4}$$

と定義すると, K_0 の 1 次元ユニタリ表現 $\chi_0 : K_0 \to \mathbb{C}^\times$ で $\pi(k)v_0 = \chi_0(k)v_0 \ (k \in K_0)$ となるものが定まる. (1) より K_0 のリー代数は $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{g}$ と等しく, さらに (3) から $\dot{\chi}_0 = i\xi_0|_{\mathfrak{p}_0\cap\mathfrak{g}}$ が分かる. リー群 G の左および右正則表現を, それぞれ $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ と書く. すなわち G 上の函数 ϕ について $\mathcal{L}(g)\phi(a) := \phi(g^{-1}a)$, $\mathcal{R}(g)\phi(a) := \phi(ag) \ (a, g \in G)$ とする. 函数空間

$$C^\infty(G, \xi_0, \overline{\mathfrak{p}}_0, \chi_0) := \left\{ \phi \in C^\infty(G)\,;\, \begin{array}{ll} \dot{\mathcal{R}}(Z)\phi = -i\xi_0(Z)\phi & (Z \in \overline{\mathfrak{p}}_0) \\ \mathcal{R}(k)\phi = \chi_0(k)^{-1}\phi & (k \in K_0) \end{array} \right\}$$

上に左正則表現 $\mathcal{L}$ によって定まる G の表現を, 組 $(\xi_0, \overline{\mathfrak{p}}_0, \chi_0)$ から定まる複素解析的誘導表現という ([1]). 以下のようにして GHW ユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ は, 複素解析的誘導表現 $(\mathcal{L}, C^\infty(G, \xi_0, \overline{\mathfrak{p}}_0, \chi_0))$ の部分表現として実現されることが分かる : ベクトル $v \in \mathcal{H}_\pi$ に対して G 上の函数 f_v を $f_v(g) := (v|\pi(g)v_0)_{\mathcal{H}_\pi} \ (g \in G)$ によって定めると, $Z \in \mathfrak{p}_0$ について

$$\dot{\mathcal{R}}(\overline{Z})f_v(g) = (v|\pi(g)\dot{\pi}(Z)v_0)_{\mathcal{H}_\pi} = (v|\, i\xi_0(Z)\pi(g)v_0)_{\mathcal{H}_\pi} = -i\xi_0(\overline{Z})f_v(g)$$

であり, $k \in K_0$ について

$$\mathcal{R}(k)f_v(g) = (v|\pi(g)\pi(k)v_0)_{\mathcal{H}_\pi} = (v|\chi_0(k)\pi(g)v_0)_{\mathcal{H}_\pi} = \chi_0(k)^{-1}f_v(g)$$

だから, $f_v \in C^\infty(G, \xi_0, \overline{\mathfrak{p}}_0, \chi_0)$ である. GHW ベクトル v_0 が生成する部分空間 $V = U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})v_0 \subset \mathcal{H}_\pi^\infty$ が稠密であることから, 写像 $\Phi_{v_0} : \mathcal{H}_\pi \ni v \mapsto f_v \in C^\infty(G, \xi_0, \overline{\mathfrak{p}}_0, \chi_0)$ は単射である. しかも $a,\ g \in G$ について

$$f_{\pi(g)v}(a) = (\pi(g)v|\pi(a)v_0)_{\mathcal{H}_\pi} = (v|\pi(g^{-1}a)v_0)_{\mathcal{H}_\pi} = \mathcal{L}(g)f_v(a)$$

だから, Φ_{v_0} は GHW ユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ から 複素解析的誘導表現 $(\mathcal{L}, C^\infty(G, \xi_0, \overline{\mathfrak{p}}_0, \chi_0))$ への絡作用素である.

作用素 Φ_{v_0} の像 $\mathcal{H}(G, \pi, v_0) := \Phi_{v_0}(\mathcal{H}_\pi) \subset C^\infty(G, \xi_0, \overline{\mathfrak{p}}_0, \chi_0)$ に, $\Phi_{v_0} : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}(G, \pi, v_0)$ がユニタリ同型になるようにヒルベルト空間の構造をいれる. すなわち $f_v, f_{v'} \in \mathcal{H}(G, \pi, v_0) \quad (v, v' \in \mathcal{H}_\pi)$ に対し, $(f_v|f_{v'})_{\mathcal{H}(G,\pi,v_0)} := (v|v')_{\mathcal{H}_\pi}$ と内積を定める. このとき $(\mathcal{L}, \mathcal{H}(G, \pi, v_0))$ は π と同型なユニタリ表現である. さらに, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}(G, \pi, v_0)$ は再生核をもつ. すなわち $\mathcal{K}_{v_0} : G \times G \to \mathbb{C}$ を $\mathcal{K}_{v_0}(g_1, g_2) :=$

$(\pi(g_2)v_0|\pi(g_1)v_0)_{\mathcal{H}_\pi}$ $(g_1, g_2 \in G)$ によって定めると, $g \in G$ について $\mathcal{K}_{v_0}(\cdot, g) = f_{\pi(g)v_0} \in \mathcal{H}(G, \pi, v_0)$ であり, 任意の $f_v \in \mathcal{H}(G, \pi, v_0)$ について

$$f_v(g) = (v|\pi(g)v_0)_{\mathcal{H}_\pi} = (f_v|f_{\pi(g)v_0})_{\mathcal{H}(G,\pi,v_0)} = (f_v|\mathcal{K}_{v_0}(\cdot, g))_{\mathcal{H}(G,\pi,v_0)}$$

である. 一般に, 函数空間に実現されるリー群の表現がユニタリ化可能であるとは, 再生核ヒルベルト空間の構造をもつ不変部分空間で, その上の部分表現がユニタリになるものが存在することをいう. 上の議論から複素解析的誘導表現 $(\mathcal{L}, C^\infty(G, \xi_0, \overline{\mathfrak{p}}_0, \chi_0))$ はユニタリ化可能で, そのユニタリ化として π と同型な表現 $(\mathcal{L}, \mathcal{H}(G, \pi, v_0))$ が得られたことになる. 函数空間 $C^\infty(G, \xi_0, \overline{\mathfrak{p}}_0, \chi_0)$ は或る等質正則直線束の切断の空間とみなせる ([19]) ので, そのユニタリ化は, 存在すれば一意に定まる ([10]). したがって GHW ユニタリ表現 π は既約である.

この節の議論を逆に辿り, $\xi \in \mathfrak{g}^*$ の正の全複素的分極環 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の複素解析的誘導表現から出発して, そのユニタリ化が（もし存在すれば）一般化放物型部分代数 $\overline{\mathfrak{q}}$ に関する $i\xi|_{\overline{\mathfrak{q}}}$ を GHW とする GHW ユニタリ表現であることを示すこともできる. 通常は, 適当な不変測度に関する二乗可積分な函数の空間をもってユニタリ化とするのであるが ([1, 11]), そのような空間が $\{0\}$ であっても, ユニタリ化を与える別の再生核ヒルベルト空間が存在する場合があることが重要なポイントである.

§3. 分裂型可解リー群の場合.

以後, 連結かつ単連結な分裂型可解リー群の GHW ユニタリ表現を論じる. 考察の基礎となるのは, 有界等質領域上の等質ケーラー構造に由来する代数構造の入った, 正規 j 代数とよばれる可解リー代数である. この節の内容は Piatetskii-Shapiro [17] および Rossi-Vergne [18] による.

分裂型可解リー代数 $\mathfrak{b}$ と $j^2 = -\mathrm{id}_\mathfrak{b}$ となる線型写像 $j : \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}$ および線型形式 $\omega \in \mathfrak{b}^*$ の三つ組 $(\mathfrak{b}, j, \omega)$ は次の条件を満たすとき正規 j 代数とよばれる :
(J1) $[Y_1, Y_2] + j[jY_1, Y_2] + j[Y_1, jY_2] - [Y_1, Y_2] = 0$ $(\forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{b})$,
(J2) 双線型形式 $(Y_1|Y_2)_\omega := \omega([Y_1, jY_2])$ $(Y_1, Y_2 \in \mathfrak{b})$ が $\mathfrak{b}$ 上の j-不変な内積を定める.
ここで $\mathfrak{p} := \{\, Y - ijY \,;\, Y \in \mathfrak{b} \,\} \subset \mathfrak{b}_\mathbb{C}$ とおくと $\mathfrak{b}_\mathbb{C} = \mathfrak{p} \oplus \overline{\mathfrak{p}}$ であり, 条件 (J1), (J2) は $\overline{\mathfrak{p}}$ が ω における正の全複素的分極環であることと同値である.

内積 $(\cdot|\cdot)_\omega$ に関する $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}$ の直交補空間を $\mathfrak{a}$ とすると, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{b}$ の可換なカルタン部分代数になり, $r := \dim \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{b}$ の階数と呼ばれる. 線型形式 $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ について $\mathfrak{b}_\alpha := \{\, Y \in \mathfrak{b} \,;\, [C, Y] = \alpha(C)Y \ (C \in \mathfrak{a}) \,\}$ とおく.

定理 2 (Piatetskii-Shapiro [17]). (i) 次の分解が成り立つような $\mathfrak{a}^*$ の基底 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$

が存在する: $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(1) \oplus \mathfrak{b}(1/2) \oplus \mathfrak{b}(0)$, ただし

$$\mathfrak{b}(1) := \sum_{k=1}^{r}{}^{\oplus} \mathfrak{b}_{\alpha_k} \oplus \sum_{1\le k<m\le r}{}^{\oplus} \mathfrak{b}_{(\alpha_m+\alpha_k)/2}, \quad \mathfrak{b}(1/2) := \sum_{k=1}^{r}{}^{\oplus} \mathfrak{b}_{\alpha_k/2},$$

$$\mathfrak{b}(0) := \mathfrak{a} \oplus \sum_{1\le k<m\le r}{}^{\oplus} \mathfrak{b}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2}.$$

さらに $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ の双対基底を $\{A_1, \ldots, A_r\} \subset \mathfrak{a}$ とし, $E_k := -jA_k$ とすると $\mathfrak{b}_{\alpha_k} = \mathbb{R}E_k$.
(ii) $[\mathfrak{b}(p), \mathfrak{b}(q)] \subset \mathfrak{b}(p+q)$ $\quad (p, q = 0, 1/2, 1)$, ただし $p > 1$ のときは $\mathfrak{b}(p) := \{0\}$.
(iii) $j\mathfrak{b}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2} = \mathfrak{b}_{(\alpha_m+\alpha_k)/2}$ $(1 \le k < m \le r)$ かつ $j\mathfrak{b}_{\alpha_k/2} = \mathfrak{b}_{\alpha_k/2}$ $(k = 1, \ldots, r)$.

前述のように $\overline{\mathfrak{p}} = \{Y + ijY\,;\, Y \in \mathfrak{b}\}$ は $\omega \in \mathfrak{b}^*$ における正の全複素的分極環である. さらに $\mathbb{R}A_r \subset \mathfrak{b}$ の直交補空間を $\mathfrak{b}'$ とし, $\mathfrak{p}' := \mathbb{C}E_r \oplus (\mathfrak{b}'_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{p})$ および $\omega' := \omega|_{\mathfrak{b}'} \in (\mathfrak{b}')^*$ とおくと, $\overline{\mathfrak{p}'}$ は ω' における正の全複素的分極環である. 次の定理は藤原 [3, 4] の結果から従う.

定理 3. 連結かつ単連結な分裂型可解リー群が, GHW ユニタリ表現 π で $\mathrm{Ker}\,\pi$ が離散的なものを許容するとき, そのリー代数, 一般化放物型部分代数および GHW の組は, 正規 j 代数から上述のようにして構成された $(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}, i\omega|_{\mathfrak{p}})$ または $(\mathfrak{b}', \mathfrak{p}', i\omega'|_{\mathfrak{p}'})$ のいずれかに等しい.

可解リー代数 $\mathfrak{b}$ に対応する連結かつ単連結な可解リー群を B とする. 正規 j 代数の構造データを用いて, B の GHW ユニタリ表現の存在条件を記述しよう. 定理 2 より, 任意の $Y \in \mathfrak{b}$ は

$$Y = \sum_{k=1}^{r}(c_k A_k + x_{kk} E_k) + Y_0 \quad (c_k,\ x_{kk} \in \mathbb{R},\ Y_0 \in (\mathfrak{a} \oplus j\mathfrak{a})^{\perp})$$

と分解される. このとき $\beta_k := -\omega(A_k)$, $\gamma_k := -\omega(E_k)$, $(k = 1, \ldots, r)$ とおくと $\omega(Y) = -\sum_{k=1}^{r}(\beta_k c_k + \gamma_k x_{kk})$ となり, 一方 $[E_k, jE_k] = -[A_k, E_k] = -E_k$ だから $\gamma_k = \omega([E_k, jE_k]) > 0$ $(k = 1, \ldots, r)$ である. パラメータ $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \{0, 1\}^r$ で $\varepsilon_r = 1$ となるものに対し, $q_k(\varepsilon) := \sum_{m>k} \varepsilon_m \dim \mathfrak{g}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2}$ $(k = 1, \ldots, r)$ とおき,

$$\mathcal{X}(\varepsilon) := \{\, s \in \mathbb{R}^r\,;\, s_k > q_k(\varepsilon)/4 \ (\text{if } \varepsilon_k = 1),\ s_k = q_k(\varepsilon)/4 \ (\text{if } \varepsilon_k = 0)\,\},$$

$$\mathcal{X} := \bigsqcup_{\varepsilon} \mathcal{X}(\varepsilon)$$

と定める.

定理 4. 一般化放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ に関して $i\omega|_{\mathfrak{p}}$ を GHW とする B の GHW ユニタリ表現 π_ω が存在する必要十分条件は $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ が $\mathcal{X}$ に属することである.

続いて GHW ユニタリ表現の分類について述べる.

定理 5. (i) 定理 4 の γ が $\mathcal{X}(\varepsilon)$ に属するとき, $\omega_\varepsilon \in \mathfrak{b}^*$ を $\omega_\varepsilon(Y) := -\sum_{k=1}^r(\beta_k c_k + \varepsilon_k\gamma_k x_{kk})$ によって定義すると, GHW ユニタリ表現 π_ω は軌道の方法 (Kirillov-Bernat 対応) により余随伴軌道 $\mathrm{Ad}^*(B)\omega_\varepsilon \subset \mathfrak{b}^*$ に対応する.
(ii) π_ω と $\pi_{\tilde{\omega}}$ が同値である必要十分条件は, $\omega, \tilde{\omega}$ に対応する $\gamma, \tilde{\gamma}$ が同一の $\mathcal{X}(\varepsilon)$ に属し, かつ $\varepsilon_k = 0$ のときは $\beta_k = \tilde{\beta}_k$ となることである.

定理 4 と 定理 5 (i) は $B, \mathfrak{p}, \omega$ の代わりに $B' := \exp \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{p}'$, ω' に置き換えても成り立つが, 定理 5 (ii) では, 条件に $\gamma_r = \tilde{\gamma}_r$ を加える必要がある.

実シンプレクティック・リー代数 $\mathfrak{sp}(2r, \mathbb{R})$ の次のような部分代数 $\mathfrak{b}_r$ (いわゆる AN-部分) が, 正規 j 代数の典型例である. すなわち r 次の下三角行列全体のなすリー代数を $\mathfrak{h}_r$, 実対称行列全体のなすベクトル空間を $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ としたとき

$$\mathfrak{b}_r := \left\{ Y = \begin{pmatrix} T & X \\ 0 & -{}^{\mathrm{t}}T \end{pmatrix} ; T = (t_{ij}) \in \mathfrak{h}_r,\ X = (x_{ij}) \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}) \right\}$$

と定義する (特に断らない限り $Y \in \mathfrak{b}_r$ について T と X は上の通りとする). 対称行列 $Z = (z_{ij}) \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C})$ に対し, 下三角行列 $\underset{\sim}{Z}$ を

$$(\underset{\sim}{Z})_{ij} := \begin{cases} z_{ij} & (i > j) \\ z_{ii}/2 & (i = j) \\ 0 & (i < j) \end{cases}$$

によって定め, 線型写像 $j : \mathfrak{b}_r \to \mathfrak{b}_r$ を

$$jY := \begin{pmatrix} \underset{\sim}{X} & -(T + {}^{\mathrm{t}}T) \\ 0 & -{}^{\mathrm{t}}(\underset{\sim}{X}) \end{pmatrix} \qquad \left(Y = \begin{pmatrix} T & X \\ 0 & -{}^{\mathrm{t}}T \end{pmatrix} \in \mathfrak{b}_r \right)$$

と定義すると, 対応する正の全複素的分極環 $\mathfrak{p}_r := \{ Y - ijY ; Y \in \mathfrak{b}_r \}$ は

$$\left\{ \begin{pmatrix} \underset{\sim}{Z} & iZ \\ 0 & -{}^{\mathrm{t}}(\underset{\sim}{Z}) \end{pmatrix} ; Z \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C}) \right\} \subset \mathfrak{sp}(2r, \mathbb{C})$$

と表される. さらに $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in \mathbb{R}^r$ と $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in \mathbb{R}^r_{>0}$ について $\omega = \omega_{\beta,\gamma} \in \mathfrak{b}_r^*$ を

$$\omega_{\beta,\gamma}(Y) := -\sum_{k=1}^r (2\beta_k t_{kk} + \gamma_k x_{kk}) \qquad \left(Y = \begin{pmatrix} T & X \\ 0 & -{}^{\mathrm{t}}T \end{pmatrix} \in \mathfrak{b}_r \right)$$

と定義すると, $(\mathfrak{b}_r, j, \omega_{\beta,\gamma})$ は正規 j 代数である. このとき $\mathfrak{b}_r$ のカルタン部分代数は $\mathfrak{a} = \sum_{1\le k\le r}^{\oplus} \mathbb{R}A_k$ (ただし $A_k := (E_{kk} - E_{r+k,r+k})/2$) で与えられ, $\mathfrak{b}_r$ のルート部分空間は

$$\mathfrak{b}_{\alpha_k} = \mathbb{R}E_{k,r+k}, \qquad \mathfrak{b}_{\alpha_k/2} = \{0\},$$
$$\mathfrak{b}_{(\alpha_m+\alpha_k)/2} = \mathbb{R}(E_{m,r+k} + E_{k,r+m}), \qquad \mathfrak{b}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2} = \mathbb{R}(E_{m,r+k} + E_{k,r+m})$$

となる. これから $\mathfrak{b}'_r = \{\, Y \in \mathfrak{b}_r \,;\, t_{rr} = 0 \,\}$ である.

一般化放物型部分代数 $\mathfrak{p}_r$ に関して GHW が

$$i\,\omega_{\beta,\gamma} : \mathfrak{p}_r \ni \begin{pmatrix} \underset{\sim}{Z} & iZ \\ 0 & -{}^{\mathrm{t}}(\underset{\sim}{Z}) \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^{r} (\gamma_k - i\beta_k) z_{kk} \in \mathbb{C} \quad (Z = (z_{ij}) \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C}))$$

であるような, 可解リー群 $B_r = \exp \mathfrak{b}_r$ の GHW ユニタリ表現 $\pi_{\omega_{\beta,\gamma}}$ の存在条件および分類が, それぞれ定理 4 と定理 5 で与えられたことになる. なお $r=1$ の場合が, 第 1 節の最後で述べた例に他ならない.

§4. GHW ユニタリ表現の実現.

正規 j 代数 $(\mathfrak{b}, j, \omega)$ についての前節の記号を引き続き用いる. まず可解リー群 $B = \exp \mathfrak{b}$ を次のように構成されるジーゲル領域 D のアファイン変換群として実現しよう. 定理 2 (ii) より部分群 $B(0) := \exp \mathfrak{b}(0)$ は $\mathfrak{b}(1)$ に随伴表現によって作用する. 点 $E := E_1 + \cdots + E_r \in \mathfrak{b}(1)$ を通る $B(0)$-軌道 $\Omega := \mathrm{Ad}(B(0))E$ は直線を含まない開凸錐であり, $B(0)$ は単純推移的に作用している. 一方, 定理 2 (iii) より j は $\mathfrak{b}(1/2)$ 上の複素構造を定める. 複素ベクトル空間 $(\mathfrak{b}(1/2), j)$ 上の $\mathfrak{b}(1)_{\mathbb{C}}$-値エルミート形式 Q を $Q(u, u') := ([ju, u'] + i[u, u'])/4$ $(u, u' \in \mathfrak{b}(1/2))$. と定める. ジーゲル領域 D とは $\mathfrak{b}(1)_{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{b}(1/2), j)$ の中の次のような複素領域である : $D := \{\, (z, u) \,;\, \Im z - Q(u, u) \in \Omega \,\}$. リー群 B は D に以下のようにして単純推移的に作用している.

$$\begin{aligned} &\exp(x_0 + u_0)h_0 \cdot (z, u) \\ &\quad := (\mathrm{Ad}(h_0)z + x_0 + 2iQ(\mathrm{Ad}(h_0)u, u_0) + iQ(u_0, u_0), \mathrm{Ad}(h_0)u + u_0) \\ &\qquad\qquad (x_0 \in \mathfrak{b}(1),\ u_0 \in \mathfrak{b}(1/2),\ h_0 \in B(0),\ (z, u) \in D). \end{aligned}$$

とくに $p_0 := (iE, 0) \in D$ とすると微分同相 $B \ni b \overset{\sim}{\mapsto} b\cdot p_0$ が得られるが, その微分写像 $\mathfrak{b} \ni Y \mapsto Y \cdot p_0 \in T_{p_0}D = \mathfrak{b}(1)_{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{b}(1/2), j)$ については $(jY)\cdot p_0 = i(Y \cdot p_0)$ が成り立ち, よって D 上の B-不変な反正則ベクトル場は $\overline{\mathfrak{p}} = \{\, Y + ijY \,;\, Y \in \mathfrak{b} \,\}$ と同一視される. したがって $F \in C^\infty(D)$ について $\tilde{F} \in C^\infty(B)$ を $\tilde{F}(b) := F(b\cdot p_0)$ $(b \in B)$ と定めると, F が正則函数であることと $\dot{\mathcal{R}}(Z)F = 0$ $(\forall Z \in \overline{\mathfrak{p}})$ であることは同値である.

第 2 節の議論から, ユニタリ表現 π_ω は函数空間

$$C^\infty(B,\omega,\mathfrak{p}) := \left\{ \phi \in C^\infty(B)\,;\, \dot{\mathcal{R}}(Z)\phi = -i\omega(Z)\phi \quad (Z \in \overline{\mathfrak{p}}) \right\}$$

上の左正則表現 $\mathcal{L}$ のユニタリ化として得られる. 群 B の 1 次元表現 $\chi_\omega : B \to \mathbb{C}^\times$ を

$$\chi_\omega(\exp C) = e^{-i\omega(C+ijC)} \ (C \in \mathfrak{a}), \quad \chi_\omega(\exp Y) = 1 \ (Y \in [\mathfrak{b},\mathfrak{b}])$$

によって定義すると, $\chi_\omega \in C^\infty(B,\omega,\mathfrak{p})$ である. これから, D 上の正則函数の空間 $\mathcal{O}(D)$ と $C^\infty(B,\omega,\mathfrak{p})$ との線型同型 $\mathcal{O}(D) \ni F \mapsto \chi_\omega \tilde{F} \in C^\infty(B,\omega,\mathfrak{p})$ が得られる. この同型によって $\mathcal{O}(D)$ 上に B の表現を実現したものを T_ω とすると

$$T_\omega(b)F(z) := \chi_\omega(b)^{-1}F(b^{-1}z) \qquad (F \in \mathcal{O}(D),\, b \in B,\, z \in D)$$

であり, 結局 GHW ユニタリ表現 π_ω は T_ω のユニタリ化として得られることがわかる.

部分群 $B' \subset B$ の D への作用は推移的ではないが, 函数空間

$$C^\infty(B',\omega',\mathfrak{p}') := \left\{ \phi \in C^\infty(B')\,;\, \dot{\mathcal{R}}(Z)\phi = -i\omega(Z)\phi \quad (Z \in \overline{\mathfrak{p}'}) \right\}$$

は次のような D 上の正則函数の空間

$$\mathcal{O}(D;\gamma_r) := \left\{ F \in \mathcal{O}(D)\,;\, F(z + cE_r, u) = e^{i\gamma_r c}F(z,u) \quad ((z,u) \in D,\, c \in \mathbb{R}) \right\}$$

と $\mathcal{O}(D;\gamma_r) \ni F \mapsto \chi_\omega|_{B'}\tilde{F}|_{B'} \in C^\infty(B',\omega,\mathfrak{p})$ によって線型同型となる. この同型によって $\mathcal{O}(D;\gamma_r)$ 上に定義した B' の表現 $T_{\omega'}$ は

$$T_{\omega'}(b)F(z) := \chi_\omega(b)^{-1}F(b^{-1}z) \qquad (F \in \mathcal{O}(D;\gamma_r),\, b \in B',\, z \in D)$$

で与えられ, これは表現の制限 $(T_\omega|_{B'},\mathcal{O}(D))$ の $\mathcal{O}(D;\gamma_r) \subset \mathcal{O}(D)$ における部分表現に他ならない. 群 B' の GHW ユニタリ表現 $\pi_{\omega'}$ は $(T_{\omega'},\, \mathcal{O}(D;\gamma_r))$ のユニタリ化として得られる.

ここで $\pi_{\omega'}$ の表現空間であるヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\omega'}(D) \subset \mathcal{O}(D;\gamma_r)$ を具体的に構成しよう (π_ω については [6, 7] 参照). 任意の $x \in \Omega$ は $h \in B'(0) := B(0) \cap B'$ と $c \in \mathbb{R}$ によって $x = \mathrm{Ad}(h)E + cE_r$ と唯一通りに表される. これより Ω 上の函数 $\Upsilon_{\omega'}$ が

$$\Upsilon_{\omega'}(\mathrm{Ad}(h)E + cE_r) := e^{-\gamma_r c}|\chi_\omega(h)|^2$$

によって定義できる. この $\Upsilon_{\omega'}$ は $\Omega + i\mathfrak{b}(1) \subset \mathfrak{b}(1)_{\mathbb{C}}$ 上の正則函数に解析接続される.

命題 6. (i) ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\omega'}(D)$ の再生核 $K^{\omega'} : D \times D \to \mathbb{C}$ は次で与えられる:

$$K^{\omega'}((z_1,u_1),(z_2,u_2)) = \Upsilon_{\omega'}((z_1 - \bar{z}_2)/i - 2Q(u_1,u_2)) \quad ((z_1,u_1),(z_2,u_2) \in D).$$

(ii) D 上の函数 $K^{\omega'}((z,u),(iE,0)) = \Upsilon_{\omega'}((z+iE)/i)$ $((z,u) \in D)$ は表現 $T_{\omega'}$ に関して $i\omega'|_{\mathfrak{p}'}$ を GHW とする GHW ベクトル.

正規 j 代数 $\mathfrak{b}_r \subset \mathfrak{sp}(2r,\mathbb{R})$ の場合, $B_r = \exp\mathfrak{b}_r \subset \mathrm{Sp}(2r,\mathbb{R})$ が作用するジーゲル領域 D はジーゲル上半平面 $D_r := \{\, Z \in \mathrm{Sym}(r,\mathbb{C})\,;\, \Im Z$ は正定値$\}$ に他ならず, 錐 Ω は r 次正定値実対称行列の集合 $S_r^+ \subset \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ である. 対称行列 $X = (x_{ij}) \in \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ と $k = 1,\dots,r$ について $X^{[k]} := (x_{ij})_{1\le i\le k,\,1\le j\le k} \in \mathrm{Sym}(k,\mathbb{R})$ とすると, $\omega' := \omega_{\beta,\gamma}|_{\mathfrak{b}'_r}$ に対応する $\Upsilon_{\omega'}$ は

$$\Upsilon_{\omega'}(X) = \Big(\prod_{k<r-1} (\det X^{[k]})^{-2(\gamma_k-\gamma_{k+1})}\Big)\,(\det X^{[r-1]})^{-2\gamma_{r-1}} \\ \times \exp\Big(-\gamma_r\{x_{rr} - {}^{\mathrm{t}}v(X^{[r-1]})^{-1}v\}\Big) \qquad (X \in S_r^+)$$

(ただし $v := {}^{\mathrm{t}}(x_{r1}, x_{r2}, \cdots, x_{r,r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}$) で与えられる.

次の命題が, この研究の最も重要な鍵である.

命題 7. 双対ベクトル空間 $\mathfrak{b}(1)^*$ 上の測度 $d\mu_{\omega'}$ で次を満たすものが存在する.

$$\Upsilon_{\omega'}(x) = \int_{\mathfrak{b}(1)^*} e^{-\langle x,\xi\rangle}\, d\mu_{\omega'}(\xi) \quad (x \in \Omega).$$

命題 7 および我々の主結果の一つである定理 4 は次のような議論によって得られる.

GHW ユニタリ表現 $\pi_{\omega'}$ が存在
$\Leftrightarrow (T_{\omega'}, \mathcal{O}(D;\gamma_r))$ がユニタリ化可能
$\Leftrightarrow K^{\omega'}((z_1,u_1),(z_2,u_2)) = \Upsilon_{\omega'}((z_1-\bar z_2)/i - 2Q(u_1,u_2))$
　が或るヒルベルト空間の再生核
$\Rightarrow \Upsilon_{\omega'}$ が開凸錐 Ω 上の正型函数
$\Rightarrow \Upsilon_{\omega'}$ をラプラス変換とする測度 $d\mu_{\omega'}(\xi)$ の存在
$\Leftrightarrow \gamma \in \mathcal{X}$

ここで Υ_ω が正型函数であるとは, 任意の $y_1,\dots,y_N \in \Omega$ と $c_1,\dots,c_N \in \mathbb{C}$ について

$$\sum_{p,1=1}^{N} c_p\bar c_q \Upsilon_{\omega'}(y_p+y_q) \ge 0 \tag{5}$$

が成り立つことをいう. もし $K^{\omega'}$ がヒルベルト空間の再生核ならば, (5) の左辺はベクトル $\sum_{p=1}^N c_pK^{\omega'}(\,\cdot\,,(iy_p,0))$ のノルムの二乗だから, 確かに非負である. そして, 広い条件のもとで, 正型函数は測度のラプラス変換であるという Bochner 型定理が知られている. 測度 $d\mu_{\omega'}$ の存在と $\gamma \in \mathcal{X}$ の同値性が最も難しい.

測度 $d\mu_{\omega'}$ から, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\omega'}(D)$ は次のように構成される. 測度 $d\mu_{\omega'}$ の台を $U^* = U^*_{\omega'} \subset \mathfrak{b}(1)^*$ とすると U^* は Ω の双対錐の閉包に含まれる. 各 $\xi \in U^*$ に対してガウス核 $e^{2\xi\circ Q}$ を再生核にもつような $(\mathfrak{b}(1/2), j)$ 上のフォック・バーグマン空間を $\mathcal{F}_\xi$ とする.

定理 8. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\omega'}(D)$ は次のような積分変換 $\Phi_{\omega'}$ の像として記述される:

$$\Phi_{\omega'} : \int_{U^*}^{\oplus} \mathcal{F}_\xi \, d\mu_{\omega'}(\xi) \ni f \mapsto F \in \mathcal{H}_{\omega'}(D),$$

ただし

$$F(z,u) := \int_{U^*} e^{i\langle z,\xi\rangle} f(\xi)(u) \, d\mu_{\omega'}(\xi) \quad ((z,u) \in D)$$

であり, ノルムは

$$\|F\|^2 := \int_{U^*} \|f(\xi)\|^2_{\mathcal{F}_\xi} d\mu_{\omega'}(\xi)$$

と定める.

References

[1] L. Auslander and B. Kostant, *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. Math. **14** (1971), 255–354.

[2] T. Enright, R. Howe, and N. Wallach, *A classification of unitary highest weight modules*, Progr. Math. **40** (1983), pp. 97–143.

[3] H. Fujiwara, *On holomorphically induced representations of split solvable Lie groups*, Proc. Japan Acad. **51** (1975), 808–810.

[4] —, *On holomorphically induced representations of exponential groups*, Japan J. Math. **4** (1978), 109–170.

[5] Harish-Chandra, *Representations of semisimple Lie groups, VI*, Amer. J. Math. **78** (1956), 564–628.

[6] H. Ishi, *Representations of the affine transformation groups acting simply transitively on Siegel domains*, J. Funct. Anal. **167** (1999), 425–462.

[7] —, *Unitary holomorphic multiplier representations over a homogeneous bounded domain*, Adv. Pure Appl. Math. **2** (2011), 405–419.

[8] H. P. Jakobsen, *Hermitian symmetric spaces and their unitary highest weight modules*, J. Funct. Anal. **52** (1983), 385–412.

[9] H. P. Jakobsen and V. G. Kac, *A new class of unitarizable highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras*, Lecture Notes in Phys. **226** (1985), pp. 1–20.

[10] S. Kobayashi *Irreducibility of certain unitary representations*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 638–642.

[11] B. Kostant, *On certain unitary representations which arise from a quantization theory*, Lecture Notes in Physics **6** (1970), pp. 237–253.

[12] W. Lisiecki, *Kaehler coherent state orbits for representations of semisimple Lie groups*, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. **53** (1990), 245–258.

[13] — *A classification of coherent state representations of unimodular Lie groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **25** (1991), 37–43.

[14] — *Coherent state representations. A survey*, Rep. Math. Phys. **35** (1995), 327–358.

[15] K.-H. Neeb, *Coherent states, holomorphic extensions, and highest weight representations*, Pacific J. Math. **174** (1996), 497–542.

[16] —, "Holomorphy and Convexity in Lie Theory", de Gruyter, New York, 2000.

[17] I. I. Piatetskii-Shapiro, "Automorphic functions and the geometry of classical domains," Gordon and Breach, New York, 1969.

[18] H. Rossi and M. Vergne, *Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group*, J. Funct. Anal. **13** (1973), 324–389.

[19] J. A. Tirao and J. A. Wolf, *Homogeneous holomorphic vector bundles*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970), 15–31.

[20] M. Vergne and H. Rossi, *Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group*, Acta Math. **136** (1976), 1–59.

[21] N. R. Wallach, *The analytic continuation of the discrete series I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979), 1–17, 19–37.