数理解析研究所講究録
第 1877 巻 2014 年 70-87

Clifford Quartic formsから得られる局所関数等式

小木曽岳義（城西大学理学部）

概 要

「局所関数等式を満たす多項式のペアを系統的に求めよ。」という問題は数論的にも解析学的にも興味深い問題であるが，この問題について，最初に成功したのは佐藤幹夫氏で，「正則概均質ベクトル空間の相対不変式とその双対空間の相対不変式のペアは局所関数等式を満たす。」という答えを与えた。その後 1990 年代まで，上記の問題の答えは概均質ベクトル空間の枠組み以外から存在することは知られていなかった。1994 年に Faraut 氏と Koranyi 氏が Euclidean Jordan algebra の表現から局所関数等式を満たす多項式のペアを見つけたが，その中に 1 つだけ非概均質の系列が存在した。「局所関数等式の遺伝定理」([14]) により，「上の空間」から「下の空間」に「良い性質」を満たす 2 次写像があり，「下の空間」が局所関数等式を満たすならば，「上の空間」にも「局所関数等式が遺伝する」という局所関数等式の pull back が可能になった。この結果を踏まえて以下のことを研究した。「下の空間」を符号数 (p,q) の 2 次形式を相対不変式として持つ実概均質ベクトル空間 $(GL(1)\times SO(p,q),\mathbb{R}^{p+q})$ としたときに，正定値 Clifford 代数のテンソル積の表現から「上の空間」から「下の空間」に「良い性質」を満たす 2 次写像が構成でき，「上の空間」上に局所関数等式を満たす多項式のペアを構成出来，その多くは概均質ベクトル空間の相対不変式とはならないことが分かった。そのような多項式およびそれに付随する空間の分類やその様々な性質について調べたことを報告する。我々の結果は上記の Faraut-Koranyi の非概均質的系列を special case として含んでいる。尚，この原稿は立教大学の佐藤文広氏との共同研究 [19], [20] に基づいている。

§1 : 局所関数等式

1.1. n 変数, d 次の多項式 P, P^* のペア (P,P^*) で

$$(*)\qquad \widehat{|P(x)|^s}(=|P(x)|^s \text{ の Fourier 変換}) = (\text{ガンマ因子}) \times |P^*(y)|^{-\frac{n}{d}-s}$$

のような関数等式を満たすものが存在するか？
という問題は整数論，解析学双方にとって興味深い問題である。(上記の $(*)$ のような関数等式は大域ゼータ関数の関数等式との対比で局所関数等式と呼ばれる。例えば，古典的に

よく知られている局所関数等式として

$$|\widehat{\det X}|^{s-n} = (2\pi)^{-ns}(2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}}2^n\cos(\pi\tfrac{s}{2})\cdots\cos(\pi\tfrac{(s-n+1)}{2}) \times\Gamma(s)\Gamma(s-1)\cdots\Gamma(s-n+1)|\det Y|^{-s} \tag{1.1}$$

$$(\widehat{x_1^2+\cdots+x_n^2})^{s-\frac{n}{2}} = \pi^{\frac{-2s+(n-2)}{2}}\Gamma(s)\Gamma(s-\frac{(n-2)}{2})\sin\pi(\frac{n}{2}-s)(y_1^2+\cdots+y_n^2)^{-s} \tag{1.2}$$

などがある。ここで (1.1) のガンマ因子は Riemann zeta 関数をシフトして積をとったものの関数等式のガンマ因子と一致し, (1.2) のガンマ因子は Epstein の zeta 関数のガンマ因子である。また, これらは線形偏微分方程式の基本解とも関係している。

1.2. 概均質ベクトル空間の基本定理 $(*)$ を満たす多項式のペア (P, P^*) を系統的に見つけるのに最初に成功したのは佐藤幹夫氏で, 正則概均質ベクトル空間の相対不変式 P とその contragredient 表現の相対不変式 P^* が $(*)$ を満たすということを示し, 木村達雄氏とともに既約な概均質ベクトル空間を全て分類している ([22], [23], [8] 参照)。このことをもう少し詳しく説明する。連結線型代数群 G とその有理表現 (ρ, V) について, V が開 G-軌道をもつとき 3 つ組 (G, ρ, V) を概均質ベクトル空間であるといい, G のある有理指標 χ について $P(\rho(g)x) = \chi(g)P(x)$ をみたす V 上の多項式 $P(x)$ を相対不変式という。(G, ρ, V) が Hessian が恒等的に 0 ではない相対不変式をもつとき正則概均質ベクトル空間であるという。G が reductive な正則概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) 及びその双対空間 (G, ρ^*, V^*) について, 開軌道の補集合 S, S^* を絶対既約超曲面とするとき, S を定義する多項式 P と S^* を定義する多項式 P^* は, それぞれ $(G, \rho, V), (G, \rho^*, V^*)$ の相対不変式になる。ここで P, P^* の次数を d とする。このとき, $P^*(\mathrm{grad}_x)P(x)^{s+1} = b(s)P(x)^s$ を満たすような s の d 次多項式 $b(s)$ が存在し, これを b-関数というが, 柏原正樹氏 ([6]) により, $b(s) = b_0(s+\alpha_1)\cdots(s+\alpha_d), \alpha_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ と 1 次式に分解することが知られている。それぞれの空間の開軌道の実点の集合 $(V-S)_{\mathbb{R}}, (V^*-S^*)_{\mathbb{R}}$ を考えると,

$$(V-S)_{\mathbb{R}} = \Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_\nu, \quad (V^*-S^*)_{\mathbb{R}} = \Omega_1^*\cup\cdots\cup\Omega_\nu^* \tag{1.3}$$

と同数の連結成分に分解する。$\mathrm{Re}(s) > 0$ のとき, $1 \le i \le \nu$ に対して

$$|P(x)|_i^s := \begin{cases} |P(x)|^s & x\in\Omega_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad |P^*(y)|_i^s := \begin{cases} |P^*(y)|^s & y\in\Omega_i^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1.4}$$

とおく。b-関数 $b(s) = b_0\prod_{i=1}^d(s+\alpha_i)$ にそって,

$$\gamma(s) := \prod_{i=1}^d \Gamma(s+\alpha_i) \tag{1.5}$$

とおくと $\frac{1}{\gamma(s)}|P(x)|_i^s$, $\frac{1}{\gamma(s)}|P^*(y)|_i^s$ はともに $s\in\mathbb{C}$ について $\mathbb{C}$ 上正則に解析接続されて，それぞれ $V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}^*$ 上の緩増加超関数を定める。このとき $\hat{}$ で Fourier 変換を表せば

$$\widehat{|P|_i^s}=\gamma(s)\sum_{j=1}^{\nu}c_{ij}(s)|P^*|_j^{-\frac{n}{d}-s} \quad \text{(局所関数等式)} \tag{1.6}$$

が成立する。これは「概均質ベクトル空間の基本定理」と呼ばれる。ただし, $n=\dim V=\dim V^*, d=\deg P=\deg P^*$ としている。ここで $c_{ij}(s)$ は指数関数による簡単な表示を持つ有理型関数である。($(*)$ は (1.6) で $\nu=1$ とした特別な場合である。)

1.3. 2次形式の局所関数等式 (1.1) は概均質ベクトル空間 $(GL(n),M(n))$ の相対不変式 $\det X,\ X\in M(n)$ から, (1.2) は概均質ベクトル空間 $(GL(1)\times SO(n),V(n))$ の real form で positive definite な2次形式を持つ場合から得られると解釈できる。また, 一般の符号数 (p,q) の2次形式 $P^*=P=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{j=p+1}^{p+q}x_j^2$ を相対不変式に持つ実概均質ベクトル空間 $(GL(1)\times SO(p,q),\mathbb{R}^{p+q})$ の局所関数等式について以下で述べる。

補題 1.1. $p\geq q\geq 0,\ p+q>0$, のとき, $\Omega:=\{x\in\mathbb{R}^{p+q}|P(x)\neq 0\}$, $P(x)=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{j=1}^{q}x_{p+j}^2$ について, Ω の連結成分への分解は以下で与えられる：

(1)$(p,q)=(1,0)$ のとき, $\Omega=\Omega_+\cup\Omega_-$, ここで $\Omega_+:=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$, $\Omega_-:=\{x\in\mathbb{R}|x<0\}$.

(2)$(p,q)=(1,1)$ のとき, $\Omega=\Omega_{++}\cup\Omega_{+-}\cup\Omega_{-+}\cup\Omega_{--}$, ここで $\Omega_{++}:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|P(x)>0,\ x_1>0\}$, $\Omega_{+-}:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|P(x)>0,\ x_1<0\}$, $\Omega_{-+}:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|P(x)<0,\ x_2>0\}$, $\Omega_{--}:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|P(x)<0,\ x_2<0\}$,

(3)$(p,q)=(p,0)$, $p\geq 2$ のとき, $\Omega=\Omega_+$ は連結.

(4)$(p,q)=(p,1)$, $p\geq 2$ のとき, $\Omega=\Omega_+\cup\Omega_{-+}\cup\Omega_{--}$, ここで $\Omega_{-+}:=\{x\in\mathbb{R}^{p+1}|P(x)<0,x_{p+1}>0\}$, $\Omega_{--}:=\{x\in\mathbb{R}^{p+1}|P(x)<0,x_{p+1}<0\}$.

(5)(p,q), $p,q\geq 2$ のとき, $\Omega=\Omega_+\cup\Omega_-$, ここで $\Omega_+:=\{x\in\mathbb{R}^{p+q}|P(x)>0\}$, $\Omega_-:=\{x\in\mathbb{R}^{p+q}|P(x)<0\}$.

定理 1.2. $\mathbf{e}[z]:=\exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ とするとき, 2次形式 P について, 以下の局所関数等式が成立する：

(1)$(p,q)=(n,0)$ のとき,

$$\widehat{|P|^s}=-\pi^{2s+\frac{n}{2}+1}\Gamma(s+1)\Gamma(s+\frac{n}{2})\sin(s\pi)|P|^{-s-\frac{n}{2}} \tag{1.7}$$

.

(2)$(p,q)=(n-1,1)$ のとき,

(1.8)

$$\begin{bmatrix} \widehat{|P|^s_+} \\ \widehat{|P|^s_{-+}} \\ \widehat{|P|^s_{--}} \end{bmatrix} = \pi^{-2s-\frac{p+q}{2}-1}\Gamma(s+1)\Gamma(s+\frac{p+q}{2}) \begin{bmatrix} -\cos(s\pi) & -\cos(\frac{n\pi}{2}) & -\cos(\frac{n\pi}{2}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\mathbf{e}[-\frac{2s+n}{4}] & \frac{1}{2}\mathbf{e}[\frac{2s+n}{4}] \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\mathbf{e}[\frac{2s+n}{4}] & \frac{1}{2}\mathbf{e}[-\frac{2s+n}{4}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |P|_+^{-s-\frac{p+q}{2}} \\ |P|_{-+}^{-s-\frac{p+q}{2}} \\ |P|_{--}^{-s-\frac{p+q}{2}} \end{bmatrix}$$

(3)$p,q\geq 2$ について

(1.9)

$$\begin{bmatrix} \widehat{|P|^s_+} \\ \widehat{|P|^s_-} \end{bmatrix} = \pi^{-2s-\frac{p+q}{2}-1}\Gamma(s+1)\Gamma(s+\frac{p+q}{2}) \begin{bmatrix} -\sin\pi(s+\frac{q}{2}) & \sin(\frac{\pi p}{2}) \\ \sin(\frac{\pi q}{2}) & -\sin\pi(s+\frac{p}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |P|_+^{-s-\frac{p+q}{2}} \\ |P|_-^{-s-\frac{p+q}{2}} \end{bmatrix}$$

で与えられる。

正則概均質ベクトルの相対不変式とその双対空間の相対不変式のペアから得られる局所関数等式の特徴のひとつとして, 以下で説明するように裏返し変換によって, 「局所関数等式が裏返る」ことがある。

1.4. 裏返し変換との関係 (H,ρ,V) を代数群 H の有理表現とし, その反傾表現を (H,ρ^*,V^*) とする。$m=\dim V$ とおくとき, $n<m$ なる自然数をとる。$(GL_n,\Lambda_1,V(n))$ 及び $(GL_{m-n},\Lambda_1, V(m-n))$ を自然表現とする。このとき, $H\times GL_n$, $\rho\otimes\Lambda_1$, $V\otimes V(n))$ が概均質ベクトル空間ならば $(H\times GL_{m-n},\rho^*\otimes\Lambda_1,V^*\otimes V(m-n))$ も概均質ベクトル空間である。この関係にあるとき, 2つの概均質空間はお互いに**裏返し変換 (castling transform)** の関係にあるという。(この概念は佐藤幹夫氏により導入され, 新谷卓郎氏がチェスの用語から命名した。) 考える (G,ρ,V) の G が $GL(n_1)\times GL(n_2)\times\cdots$ のように直積に分解していて, 表現もテンソル積に分解していて, 一般線群の自然表現がいくつか現れるとき, (G,ρ,V) を $(H\times GL_n,\rho\otimes\Lambda_1,V\otimes V(n))$ とみなして, 裏返し変換を繰り返していけば, 与えられた概均質ベクトル空間と裏返し変換でうつりあう増大列 (あるいは " 木") ができる。裏返し変換で生成される同値関係を**裏返し同値**という。(G,ρ,V) と $(\tilde{G},\tilde{\rho},\tilde{V})$ が裏返し同値であるとは, 一方から他方へ有限回の裏返し変換でうつれることである。(G,ρ,V) が**被約 (reduced)** であるとは, (G,ρ,V) の任意の裏返し変換 $(\tilde{G},\tilde{\rho},\tilde{V})$ に対して, $\dim\tilde{V}\geq\dim V$ が成り立つことである。概均質ベクトル空間の分類が, 木村達雄氏を中心に行われているが, この被約な概均質ベクトル空間をリストアップしているのである。

以下で, 裏返し変換によって, b-関数, 局所関数等式がどの様に対応しているかという, 新谷の公式, 佐藤-落合の公式を説明する。b-関数, 局所関数等式を考える設定として, $H\times GL_n,V\otimes V(n))$ を正則概均質ベクトルとする。局所関数等式は概均質ベクトル空間とそ

の双対空間との関係なので, 都合上 4 つの空間が登場する：

$$\begin{array}{ccc} V\otimes V(n) & \leftarrow \text{双対} \rightarrow & V^*\otimes V(n)^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{裏返し} & & \text{裏返し} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V^*\otimes V(m-n) & \leftarrow \text{双対} \rightarrow & V\otimes V(m-n)^* \end{array}$$

正則な概均質空間に対しては, 双有理な写像 grad log$f$ によって, 概均質ベクトル空間の開軌道とその双対開軌道との間の自然な対応が作れるが, それは裏返し変換による軌道の対応と compatible にできる。

対応する相対不変式の間の b-関数の対応は次のようになる（簡単のため 1 変数版を述べる)。

定理 1.3(Shintani の公式) H を reductive な代数群とし, 既約正則な概均質ベクトル空間 $H\times GL_n, \rho\otimes\Lambda_1, V\otimes V(n))$ と, その裏返し変換 $(H\times GL_{m-n}, \rho^*\otimes\Lambda_1, V^*\otimes V(m-n))$ に対して, それぞれの基本相対不変式が $f, \tilde{f}$ であり, b-関数が $b(s), \tilde{b}(s)$ であるとする。$Q\in\mathbb{C}[\Lambda^n V]$ を用いて, $f=Q\circ\Delta$, $\tilde{f}=Q\circ\tilde{\Delta}$ と書けるから, $d-\mathrm{deg}Q$ とすると $\mathrm{deg}f=nd$, $\mathrm{deg}\tilde{f}=(m-n)d$ である。このとき, 以下の関係式が成立する：

$$\frac{b(s)}{\prod_{i=0}^{d-1}\prod_{j=1}^{n}(ds+i+j)}=\frac{\tilde{b}(s)}{\prod_{i=0}^{d-1}\prod_{j=1}^{m-n}(ds+i+j)}$$

局所関数等式においても上記と同様の公式が成立する。

定理 1.4(F.Sato-Ochiai の公式) $(G,\sigma,W)=(H\times GL_n,\rho\otimes\Lambda_1,V\otimes V(n))$ の相対不変式 f と, その双対 $(G,\sigma^*,W^*)=(H\times GL_n,\rho^*\otimes\Lambda_1^*,V^*\otimes V(n)^*)$ の基本相対不変式 f^* について, 局所関数等式

$$\widehat{|f|^s}=\sum_{j=1}^{\mu}\gamma_{ij}(s)|f^*|_j^{-s-\frac{n}{d}}$$

が成立するとき, (G,σ,W) を裏返した空間 $(H\times GL_{m-n},\rho^*\otimes\Lambda_1^*,V\otimes V(m-n)^*)$ の (f^* に対応する) 相対不変式 $\tilde{f}^*$ との間にも局所関数等式

$$\widehat{|\tilde{f}|^s}=\sum_{j=1}^{\mu}\tilde{\gamma}_{ij}(s)|\tilde{f}^*|_j^{-s-\frac{n}{d}}$$

が成立し, ガンマ因子 $\gamma_{ij}(s),\tilde{\gamma}_{ij}(s)$ との関係は

$$\frac{\gamma_{ij}(s)}{\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma_{\mathbb{R}}(ds+m-k)}=\frac{\tilde{\gamma}_{ij}(s)}{\prod_{k=0}^{m-n-1}\Gamma_{\mathbb{R}}(ds+m-k)}$$

但し, $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)=2(2\pi)^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)$ とする。尚, 上記の公式は, $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{C}$ に変換しても成立する。また多変数でも成立する ([21] 参照)。

こうして, 正則概均質ベクトル空間を与えればそれを種として無限に広がる正則概均質ベクトル空間の木が出来, さらにそれぞれの枝には局所関数等式の実がなっているということが分かった。しかもどのような実であるかも元の種から分かる。このような意味で正則概均質ベクトル空間はは非常に豊富な局所関数等式を含むクラスである。

1.5. 概均質ベクトル空間の基本定理の様々な一般化 上記で説明したように [22] では, 作用する群が reductive, 特異点集合が超曲面で $\mathbb{R}$-既約成分は絶対既約の条件の下で局所関数等式が示されている。これに対して条件を緩めたり, 他の局所体や有限体への類似など様々な一般化が研究されているが, それについては [8], [4], [15], [17] などに詳細が記されているので参照されたい。

§2 : Euclidean Jordan Algebra の表現から得られる局所関数等式

2.1.

問題 A:上記のような局所関数等式を満たすような多項式のペアは上記の (P,P^*) ぐらいしかないのだろうか？つまり概均質ベクトル空間の理論だけが局所関数等式を満たす多項式のペアを構成する唯一の方法か?

この問題の答えは「No」である。[2] の中で単純 Euclidean Jordan algebra の表現から局所関数等式を満たすペアが構成されており 4 種類の系列のうち 3 つ $\mathrm{Sym}(m,\mathbb{R}), \mathrm{Herm}(m,\mathbb{C}), \mathrm{Herm}(m,\mathbb{H})$ はよく知られている概均質ベクトル空間になる ($H_3(\mathbb{O})$ は表現が無い) が, 以下の 1 つは概均質ベクトル空間の相対不変式でない多項式が登場している。

例 2.1 単純 Euclidean Jordan algebra $S(V)=\mathbb{R}\oplus V,\ V\cong\mathbb{R}^n$ の構造は以下のように定められる：

$S(V)=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^n\ni(\lambda,u),(\mu,v)$ について, 積を

$$(\lambda,u)\cdot(\mu,v)=(\lambda\mu+\langle u,v\rangle,\lambda v+\mu u)\in S(V) \tag{2.1}$$

このとき determinant は $\det(\lambda,u)=\lambda^2-u_1^2-\cdots-u_n^2$ となる。ここで, $\langle *,*\rangle$ は V 上の内積とし, この内積についての正規直交基底を $e_1,e_2,\ldots,e_n$ とする。このとき, $S(V)$ の表現 (Φ,W) について, W から $S(V)$ への 2 次写像 $Q:W\longrightarrow S(V)$ を

$$Q(w):=(|w|^2,(\Phi(e_1)w,w)_W,\ldots,(\Phi(e_n)w,w)_W) \tag{2.2}$$

と定義し, 4 次多項式

$$P(w)=\det(Q(w))=|w|^4-(\Phi(e_1)w,w)^2-\cdots-(\Phi(e_n)w,w)^2 \tag{2.3}$$

を考える。$P, P^* = P$ という 4 次多項式のペアに対し局所関数等式が成立することが [2], [1] で示されている。また, n が小さいときを除いて P は概均質ベクトル空間の相対不変式とはならないことが主張されているが, いつ概均質かどうかの正確な分類はなされていなかったように思われる。

§3 : 局所関数等式の遺伝定理

3.1.

問題 B:局所関数等式を満たす多項式のペアの構成に概均質ベクトル空間や Euclidean Jordan algebra は必要不可欠か？

この問題に関連したことを以下で議論する。[14] の中で 局所関数等式の pull back 定理が示されており, m 次元ベクトル空間 W から n 次元ベクトル空間 V へ, またそれらの双対空間の間にも m 次元ベクトル空間 W^* から n 次元ベクトル空間 V^* へ「双対」,「非退化」な 2 次写像 Q, Q^* が存在し, V 上の多項式 P と V^* 上の多項式 P^* の間に局所関数等式が存在するときに, W 上の多項式 $P \circ Q$ と W^* 上の多項式 $P^* \circ Q^*$ の間にも局所関数等式が存在し, そのガンマ因子は (P, P^*) の関数等式に現れるガンマ因子で明示的に書くことができることが示されている。そのことを以下で説明する。

3.2. 局所関数等式の Pull back. W を m 次元複素ベクトル空間, V を n 次元複素ベクトル空間とし, $Q : W \to V$ を W から V への 2 次写像とする。このとき, 対称行列の組 S_i $(1 \leq i \leq n), S_i^*$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して $Q(w) = (S_1[w], S_2[w], \ldots, S_n[w])$, $S_i[w] = {}^t w S_i w$, また W, V の双対空間 W^*, V^* についての 2 次写像 $Q^* : W^* \to V^*$ を $Q^*(w^*) = (S_1^*[w^*], S_2^*[w^*], \ldots, S_n^*[w^*])$ と書け, また $Q(w) \in V$ と $v^* = (a_1, \ldots, a_n) \in V^*$ の自然な pairing $\langle Q(w), v^* \rangle$ は

$$\langle Q(w), v^* \rangle = a_1 S_1[w] + \cdots + a_n S_n[w] = (a_1 S_1 + \cdots + a_n S_n)[w], \tag{3.1}$$

と書けるが, ここに現れる対称行列 $a_1 S_1 + \cdots + a_n S_n$ を $S_Q(v^*)$ とおく。$S_{Q^*}(v)$, $v \in V$ も同様に定義する。さらに, V 上の斉次多項式 P と V^* 上の斉次多項式 P^* について

$$\exists \phi : \Omega := \{v \in V | P(v) \neq 0\} \xrightarrow{\cong} \Omega^* := \{v^* \in V^* | P^*(v^*) \neq 0\}, \tag{3.2}$$

を満たす双正則射 ϕ が存在するとする。ここで, $Q : W \to V$, $Q^* : W^* \to V^*$ が,

$$S_Q(\phi(v)) = S_{Q^*}(v)^{-1} \quad (v \in \Omega) \tag{3.3}$$

を満たすとき, Q, Q^* は (ϕ に関して) *dual* であると定義する。

ここで話の複雑さを回避するために P と P^* をともに既約多項式であるとする。以下, W, V, P, P^*, Q, Q^* は defined over $\mathbb{R}$ で, $Q : W \to V$, $Q^* : W^* \to V^*$ が, dual かつ nondegenerate であるとし, 合成して得られる多項式 $\tilde{P} := P \circ Q$, $\tilde{P}^* := P^* \circ Q^*$ を考える。$\Omega(\mathbb{R})$ の連結成分への分解 $\Omega(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=1}^{\nu} \Omega_i$, $\Omega_i^* = \phi(\Omega_i)$ $(1 \le i \le \nu)$ の Q, Q^* による pull back を $\tilde{\Omega}_i := Q^{-1}(\Omega_i)$, $\tilde{\Omega}_i^* := Q^{*-1}(\Omega_i^*)$ とする。ここで, $\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{\nu} \tilde{\Omega}_i, \tilde{\Omega}^* = \bigcup_{j=1}^{\nu} \tilde{\Omega}_j^*$ について,

$$\text{(3.4)} \qquad \operatorname{rank} Jac(Q)(w) = \operatorname{rank} Jac(Q^*)(w^*) = n \quad (w \in \tilde{\Omega}, w^* \in \tilde{\Omega}^*)$$

のとき, Q, Q^* は *nondegenerate* であると定義する。このとき以下の定理が成立する：

定理 3.1. (F.Sato [14] : 局所関数等式の pull back) n 変数 d 次の多項式 P, P^* が局所関数等式

$$\text{(3.5)} \qquad \mathcal{F}_V\left(|P|_i^s\right)(v^*) = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s) |P^*(v^*)|_j^{-\frac{n}{d}-s},$$

を満たすとき $\tilde{P}, \tilde{P}^*$ も局所関数等式

$$\text{(3.6)} \qquad \mathcal{F}_W\left(|\tilde{P}|_i^s\right)(w^*) = \sum_{j=1}^{\nu} \left(\sum_{k=1}^{\nu} \varepsilon_k \gamma_{ik}(s) \gamma_{kj}(s + \frac{m-2n}{2d}) \right) |\tilde{P}^*(w^*)|_j^{-\frac{m}{2d}-s},$$

を満たす。ここで, $\mathcal{F}_V, \mathcal{F}_W$ はそれぞれ V, W 上の Fourier 変換で, ε_k $(1 \le k \le \nu)$ は以下のように決まるものである: $S_Q(v^*)$ は正則対称行列であるが, $s_k := S_Q(v^*)$ の正の固有値の個数, $t_k := S_Q(v^*)$ の負の固有値の個数 とするとき, $\varepsilon_k := \exp\left(\frac{\pi\sqrt{-1}(s_k - t_k)}{4}\right)$ $(1 \le k \le \nu)$ と定義する。これは Weil constant(cf.[25]) と言われるものである。

上記の定理より, 例えば正則概均質ベクトル空間への非退化双対 2 次写像が構成できれば局所関数等式を満たす新しい多項式が与えられる。

§4 : 正定値 Clifford 代数のテンソル積の表現から得られる局所関数等式 (主結果)

4.1. 下の空間 V, V^* が概均質ベクトル空間 $(GL(1,\mathbb{R}) \times SO(p,q), \mathbb{R}^{p+q})$ とその双対空間のとき, W 上の多項式 $P \circ Q$ と W^* 上の多項式 $P^* \circ Q^*$ がどんな空間に住んでいるかを調べたところ, 正定値 Clifford 代数 C_p, C_q のテンソル積 $R_{p,q} = C_p \otimes C_q$ の表現 ρ から得られる空間に住んでいることが分かり, 例 2.1. で紹介した非概均質的局所関数等式が我々の結果の special case, $(p,q) = (1, n-1)$ のときであることが分かった。また, それらがどんな空

間で，またいつ概均質ベクトル空間になるのかが問題となるが，これに関して得た結果を以下説明する。

4.2. 実概均質ベクトル空間 $(GL(1,\mathbb{R})\times SO(p,q),\mathbb{R}^{p+q})$ は相対不変式 $P(v)=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{j=1}^{q}x_{p+j}^2$ を持ち，双対空間 V^* 上の相対不変式 P^* との間に (1.7), (1.8), (1.9) のような局所関数等式が存在する。このとき V の開軌道 Ω と V^* の開軌道 Ω^* の間に $\phi(v)=\mathrm{grad}\ \log P=\frac{1}{P(v)}(x_1,\dots,x_p,-x_{p+1},\dots,-x_{p+q})$ で定義される biregular map が存在することに注意する。今，ある m 次元ベクトル空間 W, W^* が存在して，２次写像 $Q:W\longrightarrow V$, $Q:W^*\longrightarrow V^*$ が self-dual とし，$Q(w)=(S_1[w],S_2[w],\dots,S_{p+q}[w])$, $Q^*(w^*)=(S_1[w^*],S_2[w^*],\dots,S_{p+q}[w^*])$ とおく。ここで，S_i $(1\le i\le p+q)$ は m 次対称行列とする。

$$
(4.1)\qquad \begin{cases} S_Q(\phi(v))=\frac{1}{P(v)}(x_1S_1+\cdots+x_pS_p-x_{p+1}S_{p+1}\cdots-x_{p+q}S_{p+q}) \\ S_{Q^*}(v)=x_1S_1+\cdots+x_pS_p+x_{p+1}S_{p+1}\cdots+x_{p+q}S_{p+q} \end{cases}
$$

となることから，

Q と Q^* が dual ($\Leftrightarrow S_Q(\phi(v))=S_{Q^*}(v)^{-1}$) $\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{p}x_iS_i-\sum_{j=1}^{q}x_{p+j}S_{p+j})(\sum_{k=1}^{p+q}x_kS_k)=P(v)I_m$

$\Leftrightarrow$

$$
(4.2)\qquad \begin{cases} S_i^2=I_m & \text{for } 1\le i\le p+q \\ S_iS_j+S_jS_i=0_m & 1\le i,j \ \text{ or }\ p+1\le i,j\le p+q \\ S_iS_j-S_jS_i=0_m & 1\le i\le p \text{ and } p+1\le j\le p+q \end{cases}
$$

となる。一方，正定値 Clifford 代数 C_p, C_q のテンソル積 $R_{p,q}:=C_p\otimes C_q$ の生成元 $e_1,e_2,\dots,e_{p+q}$ の m 次元表現行列を $S_1,\dots,S_{p+q}$ (これらを基底行列と呼ぶ) とすると，これらは関係式 (4.2) を満たす。このとき，$P(v)\neq 0$ となる $v\in\mathbb{R}^{p+q}$ について，$S(v):=\sum_{i=1}^{p+q}v_iS_i$ とするとき，$S(v)$ は v が属する連結成分にのみ依存し，各連結成分 $\Omega_\eta,\Omega_{\eta\tau}$ $(\eta,\tau\in\{\pm\})$ について，$\gamma=\gamma_\eta,\gamma_{\eta\tau}$ を

$$
\gamma=\mathbf{e}[\frac{\sigma_+-\sigma_-}{8}]
$$

(σ_+=$S(v)$ の正の固有値の個数，σ_-=$S(v)$ の負の固有値の個数) とする。このとき，γ は以下のように具体的に与えられる：

補題 4.1 $p\ge q\ge 0$ とするとき，

(1) $(p,q)=(1,0)$ のとき，$\gamma_\pm=\mathbf{e}[\frac{\pm(k_+-k_-)}{8}]$, ここで $k_\pm=\dim\{w\in W|\rho(e_1)w=\pm w\}$,

(2) $(p,q)=(1,1)$ のとき，$\gamma_{\eta,\tau}=\mathbf{e}\left[\frac{\tau(k_{++}-k_{--})+\tau\eta(k_{+-}-k_{-+})}{4}\right]$, ここで，$k_{\sigma_1,\sigma_2}=\dim\{w\in W|\rho(e_1)w=\sigma_1w,\rho(e_2)w=\sigma_2w\}$ $(\sigma_1,\sigma_2\in\{\pm\}$.

(3) $P\ge 2$, $q=0$ のとき，$\gamma=1$,

(4) $p \geq 2, q=1$ のとき, $\gamma_+ = 1, \gamma_{-,\pm} = \begin{cases} (\sqrt{-1})^{\pm(k_+-k_-)} & (p=2), \\ (-1)^{k_+-k_-} & (p=3), \\ 1 & (p \geq 4), \end{cases}$, ここで k_+ (k_-) は e_{p+1} の作用が $+1(-1)$ 倍となるような $R_{p,1}$ の既約表現 ρ の重複度とする。

(5) $p \geq q \geq 2$ のとき, $\gamma_+ = \gamma_- = 1$

上記と定理 3.1 から以下の定理を得る。

定理 4.2. ([19], [20]) $R_{p,q} = C_p \otimes C_q$ の表現 ρ の基底行列を $S_1, S_2, \ldots, S_{p+q}$ とするとき, ρ の表現空間 W から $V = \mathbb{R}^{p+q}$ への 2 次写像, およびその双対空間の 2 次写像 $Q : W \to V, Q^* : W^* \to V^*$ を $Q(w) := (S_1[w], S_2[w], \ldots, S_{p+q}[w])$, $Q^*(w^*) := (S_1[w^*], S_2[w^*], \ldots, S_{p+q}[w^*])$ で定義すると, Q, Q^* は dual で,W 上の 4 次多項式 $\tilde{P} = P \circ Q$ と W^* 上の 4 次多項式 $\tilde{P^*} = P^* \circ Q^*$ は, $(p,q) = (1,1), (p,q,m = \mathrm{dim}W) = (2,1,2)$, $(3,1,4)$, $(5,1,8)$, $(9,1,16)$, $(2,2,4)$, $(3,3,8)$, $(5,5,16)$ の $\tilde{P} = \tilde{P^*} = 0$ となる場合を除いて, 以下の局所関数等式を満たす：

$(p,q) = (n,0)$ のとき,

$$\begin{aligned} \widehat{|\tilde{P}|_+^s} = \; & 2^{4s+\frac{m}{2}} \pi^{-4s-2-\frac{m}{2}-p-q} \Gamma(s+1)\Gamma(s+\tfrac{p+q}{2})\Gamma(s+1+\tfrac{m-2(p+q)}{4})\Gamma(s+\tfrac{m}{4}) \cdot \\ & \sin(\pi s)\sin\pi(s-\tfrac{n}{2}) |\tilde{P}|_+^{-\frac{m}{4}-s} \end{aligned} \tag{4.3}$$

$p > q = 1$ のとき,

(4.4)

$$\begin{pmatrix} \widehat{|\tilde{P}|_+^s} \\ \widehat{|\tilde{P}|_{-+}^s} \\ \widehat{|\tilde{P}|_{--}^s} \end{pmatrix} = 2^{4s+\frac{m}{2}} \pi^{-4s-2-\frac{m}{2}-p-q} \Gamma(s+1)\Gamma(s+\tfrac{p+q}{2})\Gamma(s+1+\tfrac{m-2(p+q)}{4})\Gamma(s+\tfrac{m}{4}) \cdot$$
$$\times \sin\pi s \begin{pmatrix} -\sin\pi(s-\frac{n}{2}) & 0 & 0 \\ -\sin\frac{n\pi}{2} & -\sin\pi(s+\frac{n}{2}) & 0 \\ -\sin\frac{n\pi}{2} & 0 & -\sin\pi(s+\frac{n}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\tilde{P^*}|_+^{-s-\frac{m}{4}} \\ |\tilde{P^*}|_{-+}^{-s-\frac{m}{4}} \\ |\tilde{P^*}|_{--}^{-s-\frac{m}{4}} \end{pmatrix}$$

$p > q \geq 2$ のとき,

(4.5)

$$\begin{pmatrix} \widehat{|\tilde{P}|_+^s} \\ \widehat{|\tilde{P}|_-^s} \end{pmatrix} = 2^{4s+\frac{m}{2}} \pi^{-4s-2-\frac{m}{2}-p-q} \Gamma(s+1)\Gamma(s+\tfrac{p+q}{2})\Gamma(s+1+\tfrac{m-2(p+q)}{4})\Gamma(s+\tfrac{m}{4}) \cdot$$
$$\times \sin\pi s \begin{pmatrix} \sin\pi(s+\frac{q-p}{2}) & -2\sin\frac{\pi p}{2}\cos\frac{\pi q}{2} \\ -2\sin\frac{\pi q}{2}\cos\frac{\pi p}{2} & \sin\pi(s+\frac{p-q}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\tilde{P^*}|_1^{-s-\frac{m}{4}} \\ |\tilde{P^*}|_2^{-s-\frac{m}{4}} \end{pmatrix}$$

注意：$p+q \geq 5$ のとき, Weil constant ε_k は 1 になることと, m は 8 の倍数になることなどに注意して, 三角関数の和積公式などを用いて変形すると, 上記のような簡単な形でガン

マ行列が現れる。但し, $p \geq 5, q = 0$ の場合は, 連結成分が 1 個であるので, 行列の $(1,1)$-成分のみを考えればよい。尚, $p+q \leq 4$ の場合は定理 4.6. にあるように概均質ベクトル空間になり, よく知られたものになる。

4.3. 我々はいろいろな $R_{p,q}$ の表現を考察することで, $\tilde{P}, \tilde{P}^*$ がどのような多項式であるのか？ 特にそれが概均質ベクトル空間の相対不変式になるのか？ などのことを考察するため, $R_{p,q}$ の表現 ρ から得られる局所関数等式 (4.3) を満たす多項式 $\tilde{P}$ の不変 Lie 環 $\mathfrak{g}_{p,q}(\rho) := \{X \in M(m,\mathbb{R}) | \frac{d}{dt}\tilde{P}(e^{tX}\cdot w)|_{t=0} = 0\} = \{X \in M(m,\mathbb{R}) | \sum_{i=1}^{p} S_i[w]({}^tXS_i + S_iX)[w] - \sum_{j=1}^{q} S_{p+j}[w]({}^tXS_{p+j} + S_{p+j}X)[w] = 0\}$ を考察し, 以下のような結果を得た。

定理 4.2([19], [20]) 上記のような設定と記号の下で, $R_{p,q} = C_p \otimes C_q$ の m 次元表現 ρ について

(4.6)

$$\mathfrak{g}_{p,q}(\rho) = \mathfrak{so}(p,q) \oplus \mathfrak{h}_{p,q}(\rho), \quad \mathfrak{h}_{p,q}(\rho) = \{X \in M(m,\mathbb{R}) | {}^tXS_i + S_iX = 0 \ (1 \leq i \leq p+q)\}$$

（ここで $\mathfrak{so}(p,q)$ は W に (半)spin 表現として作用する）

が以下の場合を除いて成立する：

$p+q$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
m	$*$	2, 4	4, 8	8	8, 16	16	16	16	16, 32	32

(Table 1)

（ *は $(p,q) = (2,0)$ のとき $m = 2$, $(p,q) = (1,1)$ のとき m が任意を意味する ）

上記の $\mathfrak{h}_{p,q}(\rho)$ の構造は以下のように具体的に決定できる：Clifford 代数 C_p, C_q の周期性, 準周期性より, $R_{p,q} = R_{q,p}$, $R_{p+8,q} \cong R_{p,q} \otimes M(16,\mathbb{R})$, $R_{p+4,q+4} \cong R_{p,q} \otimes M(16,\mathbb{R})$ となることや, $R_{p,q}$ は $M(2^l,\mathbb{K}), M(2^l,\mathbb{K})^{\oplus 2}, M(2^l,\mathbb{K})^{\oplus 4}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H})$ という型になるということより, $R_{p,q}$ の既約表現と $R_{p+8,q}, R_{p+4,q+4}$ の既約表現の間には自然な対応があるので, 対応する表現を同じ記号で表す。

定理 4.3.([19], [20]) $R_{p,q}$ の表現 ρ について, $\mathfrak{h}_{p,q}(\rho)$ は以下のような周期性を持つ。

$$\mathfrak{h}_{p,q}(\rho) \cong \mathfrak{h}_{q,p}(\rho) \cong \mathfrak{h}_{p+8,q}(\rho) \cong \mathfrak{h}_{p,q+8}(\rho) \cong \mathfrak{h}_{p\pm 4,q\pm 4}(\rho), \tag{4.7}$$

従って $\mathfrak{h}_{p,q}(\rho)$ の特色は $\bar{p} = p \bmod 8, \bar{q} = q \bmod 8$ にのみ依存する。このとき, 以下を得る：

定理 4.4([19],[20]) $\mathfrak{h}_{p,q}(\rho)$ は以下で与えられる：

$\bar{p}\backslash\bar{q}$	0	1	2	3
0	$\mathfrak{gl}(k,\mathbb{R})$	$\mathfrak{o}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{so}(k,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}^*(2k)$
1	$\mathfrak{so}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{so}(k_1,k_2)\oplus\mathfrak{so}(k_3,k_4)$	$\mathfrak{so}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{u}(k_1,k_2)$
2	$\mathfrak{so}(k,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{gl}(k,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(k,\mathbb{R})$
3	$\mathfrak{so}^*(2k)$	$\mathfrak{u}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{sp}(k,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(k_1,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sp}(k_2,\mathbb{R})$
4	$\mathfrak{gl}(k,\mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{sp}(k,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(k,\mathbb{R})$
5	$\mathfrak{sp}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{sp}(k_1,k_2)\oplus\mathfrak{sp}(k_3,k_4)$	$\mathfrak{sp}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{u}(k_1,k_2)$
6	$\mathfrak{sp}(k,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{gl}(k,\mathbb{H})$	$\mathfrak{so}^*(2k)$
7	$\mathfrak{sp}(k,\mathbb{R})$	$\mathfrak{u}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{so}^*(2k)$	$\mathfrak{so}^*(2k_1)\oplus\mathfrak{so}^*(2k_2)$

(Table 2)

ここで k_1,k_2,k_3,k_4,k は $R_{p,q}$ の表現 ρ を既約表現の直和として表したときの重複度である。

注意. saoch 上記の定理 4.2 について，$\mathfrak{g}_{p,q}(\rho)\supsetneqq\mathfrak{so}(p,q)\oplus\mathfrak{h}_{p,q}(\rho)$ で，$\mathfrak{so}(p,q)$ が表現空間 W に（半)spin 表現で作用することは，$\mathfrak{h}_{p,q}(\rho)$ の定義や，仮定から比較的容易に示せるが，$p+q$ が小さいときと表現次元が小さいときを除いて $\mathfrak{g}_{p,q}(\rho)=\mathfrak{so}(p,q)\oplus\mathfrak{h}_{p,q}(\rho)$ となることを示すのは容易でなく，Clifford 代数や 2 次形式についての細かい議論を要する。

注意.

		$\mathfrak{sp}(k_1,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sp}(k_2,\mathbb{R})$		
	$\mathfrak{sp}(k,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(k,\mathbb{R})$	$\mathfrak{gl}(k,\mathbb{R})$	
$\mathfrak{sp}(k_1,k_2)\oplus\mathfrak{sp}(k_3,k_4)$	$\mathfrak{sp}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{u}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{so}(k_1,k_2)$	$\mathfrak{so}(k_1,k_2)\oplus\mathfrak{so}(k_3,k_4)$
	$\mathfrak{gl}(k,\mathbb{H})$	$\mathfrak{so}^*(2k)$	$\mathfrak{so}(k,\mathbb{C})$	
		$\mathfrak{so}^*(2k_1)\oplus\mathfrak{so}^*(2k_2)$		

(Table 3)

の 13 個が，定理 4.3.，定理 4.4. より $(\mathfrak{h}_{p,q})_{p,q}$ の「基本領域」であることが分かる。（この１３個の「基本領域」は [12] に現れる Clifford Klein forms のあるクラスの「基本領域」となんらかの関係がありそうだということを，吉野太郎氏と落合啓之氏から指摘された。）

これより以下が成立するのも分かる。

(4.8) $$\mathfrak{h}_{p,q}(\rho)\cong\mathfrak{h}_{p',q'}(\rho)\quad(p+p'\equiv 0 \bmod 6,\ q+q'\equiv 0 \bmod 6)$$

$\mathfrak{h}_{p,q}(\rho)$ の作用は $\mathfrak{so}(p,q)$ の（半)spin 表現と可換なことから，W への $\mathfrak{h}_{p,q}(\rho)$ の作用の仕方も具体的に分かる。

4.4. 定理 4.2, 定理 4.4 及び概均質ベクトル空間の分類の結果 ([7], [8], [9], [10], [11] など) から次が分かる。

定理 4.5([19],[20]) $p+q \geq 12$ のとき, $R_{p,q}$ の任意の表現から得られる局所関数等式 (4.3) を満たす多項式 $\tilde{P}$ は概均質ベクトル空間の相対不変式とはならない。

$p+q \leq 11$ のとき, 定理 4.2. の例外が生ずるが, その場合には $\mathfrak{g}_{p,q}(\rho)$ は具体的に計算することが出来来, 概均質ベクトル空間を与えるか否かを決定できる。

定理 4.6.([19], [20])

(1) $p+q$ が小さいときには以下のようになっている：

m_0 = minimum of the dimensions of the simple $C_p \otimes C_q$-modules,

$m = \dim W$,

$0 \Longleftrightarrow \tilde{P} \equiv 0$ (degenerate case),

$\bigcirc \Longleftrightarrow \mathfrak{g}_{p,q}(\rho) = \mathfrak{so}(p,q) \oplus \mathfrak{h}_{p,q}(\rho)$,

$\times \Longleftrightarrow \mathfrak{g}_{p,q}(\rho) \supsetneqq \mathfrak{so}(p,q) \oplus \mathfrak{h}_{p,q}(\rho)$,

pv $\Longleftrightarrow$ $\tilde{P}$ is a relative invariant of a pv,

pure $\Longleftrightarrow$ (all the $R^+_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-simple modules in $W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ are isomorphic),

mixed $\Longleftrightarrow$ (W is not pure),

のとき,

$p+q$	m_0	$m=m_0$	$m=2m_0$	$m \geq 3m_0$
1	1	○, pv	○, pv	○, pv
2	1	0 0	(mixed) ○, pv (pure) 0	(mixed) ○, pv (pure) 0
3	2	0	×, pv	○, pv
4	4	0	×, pv	○, pv
5	8	×, pv	○	○
6	8	0	×, pv	○ (pure) pv (mixed) non-pv
7	16	×, pv	○	○
8	16	×, pv	○	○
9	16	×, pv	○	○
10	16	0	× (pure) pv (mixed) non-pv	○
11	32	×, pv	○	○

(Table 4)

(2)$p+q \leq 11$ のときに定理 4.2 の例外となる場合は以下である：

$p+q$	$\dim W$	$\mathfrak{g}_{p,q}(\rho)\otimes\mathbb{C}$	$(\mathfrak{so}(p,q)\oplus\mathfrak{h}_{p,q}(\rho))\otimes\mathbb{C}$
3	4	$\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$	$\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{so}(2)$
4	8	$\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{gl}(2)$	$\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{gl}(2)$
5	8	$\mathfrak{so}(8)$	$\mathfrak{so}(5)\oplus\mathfrak{sp}(1)$
6	16 (pure)	$\mathfrak{sl}(4)\oplus\mathfrak{sl}(4)$	$\mathfrak{sl}(4)\oplus\mathfrak{sp}(2)$
6	16 (mixed)	$\mathfrak{sl}(4)\oplus\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{gl}(1)$	$\mathfrak{sl}(4)\oplus\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$
7	16	$\mathfrak{so}(8)\oplus\mathfrak{sl}(2)$	$\mathfrak{so}(7)\oplus\mathfrak{sl}(2)$
8	16	$\mathfrak{so}(8)\oplus\mathfrak{so}(8)\oplus\mathfrak{gl}(1)$	$\mathfrak{so}(8)\oplus\mathfrak{gl}(1)$
9	16	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{so}(9)$
10	32 (pure)	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathfrak{sl}(2)$	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathfrak{so}(2)$
10	32 (mixed)	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathfrak{gl}(1)$	$\mathfrak{so}(10)$
11	32	$\mathfrak{so}(12)$	$\mathfrak{so}(11)$

(Table 5)

ここで, $p+q=10$, $\dim W=32$(mixed)の場合を除いて, $\mathfrak{g}_{p,q}(\rho)\otimes\mathbb{C}$ の作用は概均質ベクトル空間を与える。特に $p+q\leq 4$ のときは常に概均質ベクトル空間になっている。

注意. 例えば, $p+q\leq 4$ の場合には以下のような実概均質ベクトル空間が現れる：

(p,q)	prehomogeneous vector space
$(1,0)$	$(GL(1,\mathbb{R})\times SO(k_1,k_2),\mathbb{R}^{k_1+k_2})$
$(2,0)$	$(GL(1,\mathbb{C})\times SO(k,\mathbb{C}),\mathbb{C}^k)$
$(1,1)$	$(GL(1,\mathbb{R})\times SO(k_1,k_2),\mathbb{R}^{k_1+k_2})\oplus(GL(1,\mathbb{R})\times SO(k_3,k_4),\mathbb{R}^{k_3+k_4})$
$(3,0)$	$(GL(1,\mathbb{R})\times SO^*(2k)\times SU(2),\mathbb{C}^{2k})$
$(2,1)$	$(GL(2,\mathbb{R})\times SO(k_1,k_2),M(2,k_1+k_2,\mathbb{R}))$
$(4,0)$	$(GL(1,\mathbb{H})\times GL(1,\mathbb{H})\times GL(k,\mathbb{H}),M(2,k,\mathbb{H}))$
$(3,1)$	$(GL(2,\mathbb{C})\times SU(k_1,k_2),M(2,k_1+k_2;\mathbb{C}))$
$(2,2)$	$(GL(2,\mathbb{R})\times GL(2,\mathbb{R})\times SL(k,\mathbb{R}),M(2,k;\mathbb{R}))$

(Table 6)

上記の議論は F.Sato の 2 次写像による局所関数等式を, 下の空間が概均質ベクトル空間 $(G,\rho,V)=(GL(1)\times SO(p+q),\Lambda_1,\mathbb{C}^{p+q})$ の real form の場合に適用したのだが, その他の概均質ベクトル空間を下の空間としてとったときに, 自己双対, 非退化な 2 次写像が存在するかどうかという自然な問題が生じるが, それについは現在進行中で, 分かっている部分を以下リストアップする。ただし, ○は自己双対, 非退化な 2 次写像が存在する, ?はどちらか分からない, ×は存在しないことを意味する。$*$ についてはn $n=1$ の場合が, 今まで説明してきた Clifford quartic forms の場合で, もちろん○であるが, それ以外の場合は?である。

(1)	$(H \times GL(n), M(n))$	○
(2)	$(GL(n), Sym(n))$	○
(3)	$(GL(2n), Alt(2n))$	○
(4)	$(GL(2), 3\Lambda_1(\mathbb{C}^2))$	×
(5)	$(GL(6), \Lambda_3, V(20))$	?
(6)	$(GL(7), \Lambda_3, V(35))$	?
(7)	$(GL(8), \Lambda_3, V(56))$	?
(8)	$(SL(3) \times GL(2), 2\Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(6) \otimes V(2))$	?
(9)	$(SL(6) \times GL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, V(15) \otimes V(2))$	?
(10)	$(SL(5) \times GL(3), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, V(10) \otimes V(3))$	?
(11)	$(SL(5) \times GL(4), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1, V(10) \otimes V(4))$	?
(12)	$(SL(3) \times SL(3) \times GL(2), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(3) \otimes V(3) \otimes V(2))$	?
(13)	$(Sp(m) \times GL(n), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(2m) \otimes V(n))$	?
(14)	$(GL(1) \times Sp(3), \Lambda_1 \otimes \Lambda_3, V(1) \otimes V(14))$	?
(15)	$(SO(n) \times GL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(n) \otimes V(m))$	*
(16)	$(GL(1) \times Spin(7), \Lambda_1 \otimes (spin - rep.), V(1) \otimes V(8))$	○
(17)	$(GL(2) \times Spin(7), \Lambda_1 \otimes (spin - rep.), V(2) \otimes V(8))$	?
(18)	$(GL(3) \times Spin(7), \Lambda_1 \otimes (spin - rep.), V(3) \otimes V(8))$	?
(19)	$(GL(1) \times Spin(9), \Lambda_1 \otimes (spin - rep.), V(2) \otimes V(16))$	?
(20)	$(GL(2) \times Spin(10), \Lambda_1 \otimes (half - spin - rep.), V(2) \otimes V(16))$	?
(21)	$(GL(3) \times Spin(10), \Lambda_1 \otimes (half - spin - rep.), V(3) \otimes V(16))$	?
(22)	$(GL(1) \times Spin(11), \Lambda_1 \otimes (half - spin - rep.), V(1) \otimes V(32))$	?
(23)	$(GL(1) \times Spin(12), \Lambda_1 \otimes (half - spin - rep.), V(1) \otimes V(32))$	?
(24)	$(GL(1) \times Spin(14), \Lambda_1 \otimes (half - spin - rep.), V(1) \otimes V(64))$	?
(25)	$(GL(1) \times G_2, \Lambda_1 \otimes \Lambda_2, V(1) \otimes V(7))$	○
(26)	$(GL(2) \times G_2, \Lambda_1 \otimes \Lambda_2, V(2) \otimes V(7))$	?
(27)	$(GL(1) \times E_6, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(1) \otimes V(27)$	×
(28)	$(GL(2) \times E_6, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(2) \otimes V(27)$	?
(29)	$(GL(1) \times E_7, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, V(1) \otimes V(56)$	?
(30)*nonreg.*		?

(Table 7)

以上の結果より, 特殊なものではあるが, 概均質ベクトル空間の相対不変式でないにも

かかわらず局所関数等式を満たす多項式が豊富に存在することが分かった。

問題 C: 局所関数等式成立の真の根拠は何か？

§5:最後に

ここでは, 最近のこの研究に関連する話題, 今後の課題等について述べる。

最近分かったこと

Clifford quartic forms のペアは非概均質的な局所関数等式を満たし, どの概均質ベクトル空間の相対不変式になっていないことを説明したが, 最近の我々の研究で, 以下のことがわかったので, ここに記しておく, [3] の中の３９ページに以下の様な問題が Question 1 として提示されている, 原文のまま引用すると：

> Is it true that any polynomial f satisfying projective semiclassical condition such that its multiplicative Legendre transform is also a polynomial, is a relative invariant of a prehomogeneous vector space?

この問題に対して Clifford quartic form は, その multiplicative Legendre 変換は自分自身になり, 当然, 多項式になる。しかしながら, この Clifford quartic form はほとんどの場合が非概均質的多項式であり, これは, [3] の中の３９ページの Question 1 の反例を示したことになる。

Euclidean とは限定しない半単純 Jordan algebra との関係

[5] の中で、伊師英之氏は、我々が Clifford algebra $R_{p,q}$ の表現から構成した２次写像は, (Euclidean とは限らない) 半単純 Jordan algebra の表現からも解釈が出来ることを示している。

今後の課題

非概均質ベクトル空間であるにもかかわらず局所関数等式を持つ多項式が住む空間は, どのように正則概均質ベクトル空間と異なり, また似ているのか？例えば Clifford quartic forms のクラスは裏返し変換をした空間が, 局所関数等式を満たすのであろうか？

その他の非概均質的関数等式

[16] の中で, 佐藤文広氏は decomposable な graph から多変数の非概均質的局所関数等式を構成している。

参考文献

[1] J.-L.Clerc, Zeta distributions associated to a representation of a Jordan algebra, *Math.Z.,* **239** (2002), 263-276.

[2] J.Faraut and A.Koranyi, *Analysis of symmetric cones,* Oxford University Press, 1994.

[3] P.Etingof , D.Kazhdan and A.Polishchuk, When is the Fourier transform of an elementary function elementary? , *Sel. math.* **8** (2002), 27–66.

[4] A.Gyoja, **概均質ベクトル空間の最近の発展**, **数学** **47**(3)(1995),209–223.

[5] H.Ish, Self-dual quadratic maps and representations of Jordan algebras, preprint, 2012.

[6] M.Kashiwara, B-functions and holonomic systems (Rationality of roots of b-functions), *Invent. Math.* **38**(1978),121-135.

[7] T.Kimura, A classification theory of prehomogeneous vector spaces, *Representations of Lie groups, Kyoto, Hiroshima, Academic Press, Boston, MA* (1988), 223–256

[8] T.Kimura, A , Introduction to prehomogeneous vector spaces, Translations of Mathematical Monographs, 215. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[9] T. Kimura, S. Kasai, M. Inuzuka, and O. Yasukura, A classification of 2-simple prehomogeneous vector spaces of type I, *J. Algebra*, **114** (1988), 369–400.

[10] T.Kimura, T.Kogiso and K.Sugiyama, Relative invariants of 2-simple prehomogeneous vector spaces of Type I, *J. Alg.* **308** (2007), no. 2, 445–483.

[11] T. Kimura, K. Ueda and T. Yoshigaki, A classification of 3-simple prehomogeneous vector spaces of nontrivial type, Japan. J. Math. **22** (1996), 159-198.

[12] T.Kobayashi and T.Yoshino, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces: revisited, *Pure and Appl. Math.* **Quarterly 1** (2005), 603-684, Special Issue: In Memory of Professor Armand Borel.

[13] T.Kogiso, G.Miyabe, M.Kobayashi and T.Kimura, Relative invariants for some prehomogeneous vector spaces, *Math. of Comp.,* **72**(2002), No.242, 865–889

[14] F.Sato, Quadratic maps and non-prehomogeneous local functional equations, *Comment. Math. Univ. St. Pauli,* **56**(2007), No.2, 163–184.

[15] F. Sato, 概均質ベクトル空間に関連する文献, 京都大学数理解析研究所講究録 **924** 1995,263–296.

[16] F. Sato, Local functional equations associated with decomposable graphs, *Josai Mathematical Monographs* , **6**(2012), p.59–p.69.

[17] F. Sato, 関数等式の様々な一般化, 第１０回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間」, 2002, 91–113.

[18] F.Sato and T.Kogiso, Representations of Clifford algebras and quartic polynomials with local functional equations, RIMS Kokyuroku, **1617** (2008), 63–82. .

[19] F.Sato and T.Kogiso, Representations of Clifford algebras and local functional equations, *RIMS Kokyuroku-Bessatsu* ,**B36**, 53–66, (2012). .

[20] F.Sato and T.Kogiso, Representations of Clifford algebras and local functional equations of non prehomogeneous type, *arXiv.* 1308.4535v1 .

[21] F.Sato and H.Ochiai, Castling transforms of prehomogeneous vector spaces and functional equations., Comment. Math. Univ. St. Paul. **40** (1991), no. 1, 61–82. .

[22] M. Sato, Theory of prehomogeneous vector spaces (notes by T.Shintani in Japanese), *Sugaku no Ayumi* **15** (1970), 85-157.

[23] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their invariants, *Nagoya Math. J.* **65** (1977), 1-155.

[24] M.Sato and T.Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous spaces, *Ann. of Math.* **100**(1974), 131–170.

[25] A. Weil, Sur certaines groupes d'opérateurs unitaires, *Acta. Math.* **111**(1964), 143–211; *Collected Papers* III, 1-69.