数理解析研究所講究録
第 1879 巻 2014 年 1-14

サイクル上の忌避型施設配置ゲームにおける, 3-候補地もしくは 4-候補地の戦略耐性メカニズム

京都大学大学院情報学研究科 数理工学専攻 離散数理分野 井原謙, 永持仁
Ken Ibara and Hiroshi Nagamochi
Graduate school of Information, Kyoto University

1 忌避型施設配置ゲーム

1.1 概略

忌避型施設配置ゲームでは, プレイヤーの報告にもとづき, 空間上に施設の配置地点を一つ決定するメカニズムを考える. 本ゲームでは配置する施設としてゴミ処理場などの住人にとって好ましくない施設 (忌避型施設) を考えており, 各プレイヤーはそれぞれ距離上の最も施設が建って欲しくない地点を報告する. このとき各プレイヤーの利得を施設配置地点と各自の施設が建って欲しくない地点との距離と定義する. メカニズムは報告された情報をもとに一つの施設配置地点を出力する. ただし各プレイヤーは利己的な存在であり, 自分の利得を増加させるためならば, 本来の選好と異なる報告をすることでメカニズムの出力を操作しようとする. そこで本ゲームでは, そのようなプレイヤーの戦略的な報告を防ぎつつ, 総利得を最大化するメカニズム設計を目指す.

配置する施設としてプレイヤーにとって望ましい施設を設定した場合に関しては, N.Alone ら [1] によって一般グラフ上におけるメカニズムの特徴付けおよび性能評価が与えられている. 対して忌避型施設を設定した場合に関しては, Y. Cheng ら [2] によって初めて直線および木上のメカニズムが考案された. また井原ら [3] によって, 直線上におけるメカニズムの完全な特徴付けおよび性能評価が与えられている.

1.2 問題定義

プレイヤー集合を $N=\{1,2,\ldots,n\}$ とし, 施設配置を考える距離空間を (Ω,d) とする. ここで Ω は点集合, $d:\Omega\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}_{+}$ は対称な距離関数である. つまり任意の二点 x, y に関して $d(x,y)=d(y,x)$ が成立し, また任意の三点 x, y, および z に関して $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ が成立する. 地点 $x_{i}\in\Omega$ を住人 $i\in N$ の報告地点と定義し, $X=\{x_{1},x_{2},\ldots,x_{n}\}\in\Omega^{n}$ を位置情報と呼ぶ. また施設配置地点を $y\in\Omega$ としたとき, 住人 i の利得とは住人 i の居住地点から施設配置地点までの距離, つまり,

$$\beta(y,x_{i})=d(y,x_{i})$$

で定義される．この定義から，このゲームにおいて Ω は有界集合であると仮定する (非有界ならば無限大に離れた地点に施設を建設すれば利得も無限大となるため)．

忌避型施設配置ゲームのメカニズムは関数 $f : \Omega^n \to \Omega$ として定義され，位置情報に基づいて施設配置地点を出力する．このとき二つの位置情報 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ および $X' = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\}$ に関して，すべての $i \in N$ について $x_i = x_{\sigma(i)}$ を満たすような全単射 $\sigma : N \to N$ が存在するならば，$X = X'$ と表記し，メカニズムはそれらの位置情報を区別しない．つまり，$X = X'$ なる二つの位置情報に対してメカニズム f は $f(X) = f(X')$ を満たす．

ここでメカニズムの性質である戦略耐性および結託戦略耐性について定義する．位置情報 $X \in \Omega^n$ と住人の集合 $S \subseteq N$ に対して，X から $i \in N - S$ なる住人の報告地点 x_i を除くことで得られる S の位置情報を X_S と定義する．X_{N-S} に関しては簡単のために X_{-S} と表記する．特に $S = \{i\}$ であるとき，X_{-S} を $X_{-i} = \{x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$ と定義する．このとき位置情報 X は，$X = \langle x_i, X_{-i} \rangle = \langle X_S, X_{-S} \rangle$ と表すことができる．簡単のために，$f(x_i, X_{-i}) = f(\langle x_i, X_{-i} \rangle)$ および $f(X_S, X_{-S}) = f(\langle X_S, X_{-S} \rangle)$ と表記する．

定義 1 (戦略耐性)**.** ある一人の住人が誤った地点を報告したとしても利益を得ることがないとき，そのメカニズムは戦略耐性 (strategy-proof) であるという (以下，SP と表記)．つまり，住人 i，位置情報 $\langle x_i, X_{-i} \rangle$，そして誤った報告位置 $x'_i \in \Omega$ が与えられたとき，次の式が成立するときメカニズムは SP である．

$$\beta(f(x_i, X_{-i}), x_i) \geq \beta(f(x'_i, X_{-i}), x_i).$$

定義 2 (結託戦略耐性)**.** どのような住人の集合が同時に誤った地点を報告したとしても，その中の少なくとも一人は利益を得ることがないとき，そのメカニズムは結託戦略耐性 (group strategy-proof) であるという (以下，GSP と表記)．つまり，空でない住人の集合 $S \subseteq N$，位置情報 $\langle X_S, X_{-S} \rangle$，そして S の誤った位置情報 $X'_S \in \Omega^{|S|}$ が与えられたとき，次の式を満たす $i \in S$ が存在するときメカニズムは GSP である．

$$\beta(f(X_S, X_{-S}), x_i) \geq \beta(f(X'_S, X_{-S}), x_i).$$

上の定義から分かるように GSP は SP よりも強い制約であり，メカニズムが GSP であるときそのメカニズムは SP でもある．

またメカニズムの性能評価のため，近似比を定義する．まず位置情報 X に対する施設配置地点 $y \in \Omega$ の総利得とは住人全員の利得の総和

$$\mathrm{SB}(y, X) = \sum_{i=1}^{n} \beta(y, x_i)$$

で定義される．このとき位置情報 X に対して取りうる最大の総利得を

$$\mathrm{OPT}(X) = \max_{y \in \Omega} \mathrm{SB}(y, X)$$

と定義する．ここで，

$$\gamma = \max_{X \in \Omega^n} \frac{\mathrm{OPT}(X)}{\mathrm{SB}(f(X), X)}$$

をメカニズム f の近似比と呼ぶ．

最後に, メカニズムの出力に関して分類を考える. メカニズム $f : \Omega^n \to \Omega$ に対して, $f(X) = y$ を満たすような位置情報 X が存在する地点 $y \in \Omega$ を f の候補地と呼ぶ. また, メカニズム f のすべての候補地の集合を C_f と定義する. $|C_f| = p$ であるとき, このようなメカニズムを p-候補地メカニズムと呼ぶ. 任意の 1-候補地メカニズムは住人達がどのように投票したとしてもメカニズムの出力が不変であるため常に GSP である. しかしそのようなメカニズムは近似比 γ が無限大に大きくなるため, 以下ではそのようなメカニズムを考慮しない.

1.3 これまでの成果および本文の概要

現在, 任意の距離空間上において 2-候補地の GSP メカニズムとしての必要十分条件を満たすメカニズムの一般形が得られている. これに対する近似比の評価により, 任意の空間で近似比高々 4 のメカニズムが設計できることが示されている. メカニズムの候補地数を増やすことは, 近似比を小さくするに繋がると言えるが, 空間によっては任意の p-候補地 GSP メカニズムが設計できない事が分かっている. たとえば, 直線上においては, $p \geq 3$ なる p-候補地 GSP メカニズムは設計できない事が示されている. よって, 忌避型施設配置ゲームにおいては, 対象となる空間において p-候補地 GSP メカニズムが設計可能か否かを考察することが重要と言える.

本文では, サイクル上のゲームを考え, 3-候補地および 4-候補地の GSP メカニズムについての設計可能性を考える. まず次の 1.4 節において, 一般距離空間上で成立する定理を与え, それらの結果をもとに 2 章ではサイクル上における 3-候補地メカニズムを, さらに 3 章ではサイクル上における 4-候補地メカニズムを考える.

1.4 GSP メカニズムの基本的性質

まず一般距離空間 (Ω, d) 上で成立する GSP メカニズムの基本的な補題を与える. ただし証明は誌面の都合により割愛する.

補題 1. f は GSP メカニズムであるとし, $\{a, b\}$ をメカニズム f の候補地の内の二つ, つまり $\{a, b\} \subseteq C_f$ であるとする. ここで, プレーヤー集合 $S \subseteq N$ に対して二つの位置情報 $X = \langle X_S, X_{-S} \rangle$ および $X' = \langle X'_S, X'_{-S} \rangle$ を考える. ただし, $X_{-S} = X'_{-S}$ および $\forall i \in S$ については $x_i \neq x'_i$ であるとする. このとき以下の結果が得られる.
(1) $f(X) = a$ かつ $\forall i \in S$ に対して $d(b, x_i) > d(a, x_i)$ が成立する場合, $f(X') \neq b$ が成立する.
(2) $f(X) = a$ かつ $\forall i \in S$ に対して $d(a, x'_i) > d(b, x'_i)$ が成立する場合, $f(X') \neq b$ が成立する.

補題 1 より, 以下の系も導かれる.

系 1. f は GSP メカニズムであるとし, $\{a, b\}$ をメカニズム f の候補地の内の二つとする. 位置情報 X において, もし $\forall i \in N$ に対して $d(b, x_i) > d(a, x_i)$ が成立するならば, $f(X) \neq a$ が成立する.

2 サイクル上の 3-候補地メカニズム

2.1 3-候補地メカニズムの GSP 性

2 章および 3 章では, 距離空間 (C, d) 上におけるメカニズムを考える. C をサイクル状の点集合とし, 距離関数 $d(x, y)$ は x, y 間の最短パスの長さと定義される. サイクルの円周長を L で定義する.

サイクル上のメカニズムとして, 三つの候補地 $C_f = \{c_1, c_2, c_3\}$ を持つ 3-候補地メカニズムを考える. このとき次の定理が成立する.

定理 1. サイクル上において, 3-候補地メカニズムは GSP メカニズムにならない.

定理 *1* の証明. ここで証明のために, C 上の部分空間に関して新たな定義を導入する. $\{i, j, k\} := \{1, 2, 3\}$ として,

$$R^{i,j,k} := \{x \in C \mid d(c_i, x) > d(c_j, x) > d(c_k, x)\}$$

このとき, 3-候補地メカニズムにおいては, 次の六つの部分空間 $R^{1,2,3}$, $R^{1,3,2}$, $R^{2,1,3}$, $R^{2,3,1}$, $R^{3,1,2}$ および $R^{3,2,1}$ が必ず存在することに注意する (図 1 参照).

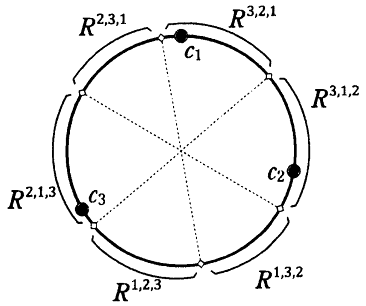


図 1 六つの部分空間 $R^{i,j,k}$

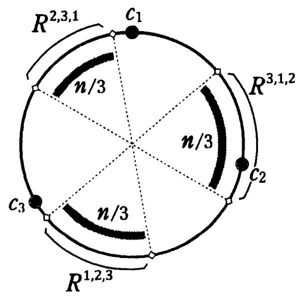


図 2 位置情報 X_0 におけるプレイヤー報告の分布

3-候補地メカニズム f が GSP メカニズムであると仮定し, 矛盾を導く.

簡単のために n を 3 で割り切れる値とする. 位置情報 X_0 として, $x_i \in R^{1,2,3}$, $x_i \in R^{2,3,1}$ および $x_i \in R^{3,1,2}$ を満たすプレイヤーがそれぞれ $\frac{n}{3}$ 人ずつ存在する位置情報を定義する (図 2 参照). このような X_0 に対して, $f(X_0) \neq c_1$ が成立することを背理法によって示す.

今 $f(X_0) = c_1$ であるという仮定のもとで, X_0 から新たな位置情報 X_1 への推移を考える. ここで X_1 は, $x_i \in R^{2,1,3}$ を満たすプレイヤーが $\frac{n}{3}$ 人, $x_i \in R^{3,1,2}$ を満たすプレイヤーが $\frac{2n}{3}$ 人ずつ存在する位置情報として定義する.

X_0 において, $x_i \in R^{2,3,1}$ および $x_i \in R^{1,2,3}$ であるプレイヤー集合をそれぞれ S_1 および S_2 と定める. ここで位置情報の推移 $X_0 \to X_1$ を考える上で, 以下の二通りの推移を考える.

(i-i) まず X_0 から, $i \in S_1$ なるプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{2,3,1}$ から $x'_i \in R^{3,1,2}$ へと変更する. このときの位置情報を X'_0 とする. 次に X'_0 から, $i \in S_2$ なるプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{1,2,3}$ から $x'_i \in R^{2,1,3}$ へと変更する (図 3-(a) 参照).

(i-ii) まず X_0 から, $i \in S_1$ なるプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{2,3,1}$ から $x'_i \in R^{2,1,3}$ へと変更する. このときの位置情報を X''_0 とする. 次に X''_0 から, $i \in S_2$ なるプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{1,2,3}$ から $x'_i \in R^{3,1,2}$ へと変更する (図 3-(b) 参照). まず場合 (i-i), つまり推移 $X_0 \to X'_0 \to X_1$ を考

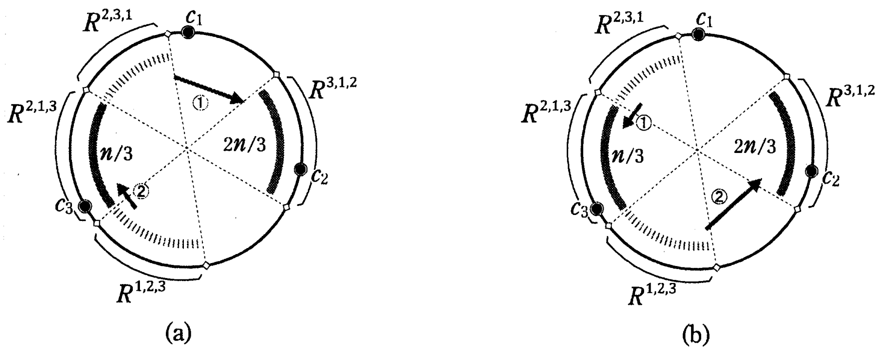


図 3　(a) 定理の証明における場合 (i-i), (b) 定理の証明における場合 (i-ii)

える. 推移 $X_0 \to X'_0$ において, $f(X_0) = c_1$ および $\forall i \in S_1$ に対して $x_i \in R^{2,3,1} \to x'_i \in R^{3,1,2}$, つまり $d(c_2, x_i) > d(c_3, x_i) > d(c_1, x_i)$ が成り立つことから, 補題 1 - (1) より $f(X'_0) \neq c_2$ かつ $f(X'_0) \neq c_3$, つまり $f(X'_0) = c_1$ を得る. さらに, 推移 $X'_0 \to X_1$ において, $f(X'_0) = c_1$ および $\forall i \in S_2$ に対して $x_i \in R^{1,2,3} \to x'_i \in R^{2,1,3}$, つまり $d(c_1, x'_i) > d(c_3, x'_i)$ が成り立つことから, 補題 1 - (2) より $f(X_1) \neq c_3$ を得る.

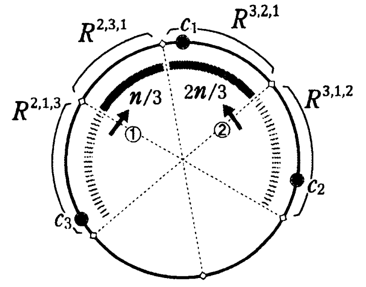
次に場合 (i-ii), つまり推移 $X_0 \to X''_0 \to X_1$ を考える. すると場合 (i-i) の場合と同様の議論により, $f(X''_0) = c_1$ および $f(X_1) \neq c_2$ を得る. $f(X_1) \neq c_3$ および $f(X_1) \neq c_2$ より, $f(X_1) = c_1$ を得る. つまり $f(X_0) = c_1$ という仮定のもとでは, $f(X_1) = c_1$ が成立する.

さらに $f(X_1) = c_1$ という結果のもと, X_1 から新たな位置情報 X_2 への推移を考える. ここで X_2 は, $x_i \in R^{2,3,1}$ を満たすプレイヤーが $\frac{n}{3}$ 人, $x_i \in R^{3,2,1}$ を満たすプレイヤーが $\frac{2n}{3}$ 人ずつ存在する位置情報として定義する.

X_1 において, $x_i \in R^{2,1,3}$ および $x_i \in R^{3,1,2}$ であるプレイヤー集合をそれぞれ S_1 および S_2 と定める. ここで位置情報の推移 $X_1 \to X_2$ を考える上で, 以下の二通りの推移を考える.

(ii-i) まず X_1 から, $i \in S_1$ なるプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{2,1,3}$ から $x'_i \in R^{2,3,1}$ へと変更する. このときの位置情報を X'_1 とする. 次に X'_1 から, $i \in S_2$ なるプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{3,1,2}$ から $x'_i \in R^{3,2,1}$ へと変更する (図 4-(a) 参照).

(ii-ii) まず X_1 から, $i \in S_2$ なるプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{3,1,2}$ から $x'_i \in R^{3,2,1}$ へと変更する. このときの位置情報を X''_1 とする. 次に X''_1 から, $i \in S_1$ なるプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{2,1,3}$ から $x'_i \in R^{2,3,1}$ へと変更する (図 4-(b) 参照). まず場合 (ii-i), つまり推移 $X_1 \to X'_1 \to X_2$ を考える. X'_1 において, 全てのプレイヤー i が $x_i \in R^{2,3,1} \cup R^{3,1,2}$ を報告することから, $d(c_3, x_i) > d(c_1, x_i)$ が成立し, 系 1 より, $f(X'_1) \neq c_1$ を得る. また推移 $X_1 \to X'_1$ において, $f(X_1) = c_1$ および $\forall i \in S_1$ に対して $x_i \in R^{2,1,3} \to x'_i \in R^{2,3,1}$, つまり $d(c_2, x_i) > d(c_1, x_i)$ が成り立つことから, 補題 1 - (1) より $f(X'_1) \neq c_2$ を得る. つまり $f(X'_1) \neq c_1$ および $f(X'_1) \neq c_2$ より, $f(X'_1) = c_3$ を得る. さらに, 推移 $X'_1 \to X_1$ において, $f(X'_1) = c_3$ および $\forall i \in S_2$ に対して $x_i \in R^{3,1,2} \to x'_i \in R^{3,2,1}$,



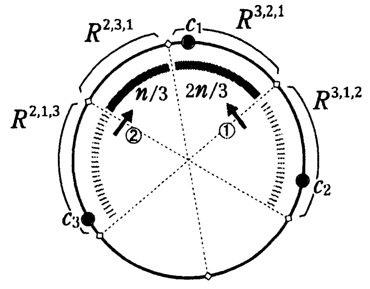


図 4　(a) 定理の証明における場合 (ii-i), (b) 定理の証明における場合 (ii-ii)

つまり $d(c_3, x_i') > d(c_2, x_i') > d(c_1, x_i')$ が成り立つことから, 補題 1 - (2) より $f(X_2) \neq c_2$ かつ $f(X_2) \neq c_1$, つまり $f(X_2) = c_3$ を得る.

次に場合 (ii-ii), つまり推移 $X_1 \to X_1'' \to X_2$ を考える. すると場合 (ii-i) の場合と同様の議論により, $f(X_1'') = c_2$ および $f(X_2) = c_2$ を得る. これは場合 (ii-i) の場合の $f(X_2) = c_3$ という結果に矛盾する.

つまり f が GSP メカニズムであるとき, $f(X_0) \neq c_1$ という結果が得られた. また, 対称的な議論により同様にして $f(X_0) \neq c_2$ および $f(X_0) \neq c_3$ も示される. つまり f が GSP メカニズムであるという仮定のもとでは $f(X_0) \notin C_f$ となり, メカニズムの出力に矛盾が生じる. □

2.2　一般空間上の広義 3-候補地メカニズム

ここではサイクル上の 3-候補地メカニズムと似た性質を持つ p-候補地メカニズムの例として, **広義 3-候補地メカニズム**を定義する. ただし広義 3-候補地メカニズムはサイクル上に限らず, 一般空間 (Ω, d) 上のメカニズムとする. まず一般空間上の p-候補地メカニズム f の候補地集合 $C_f = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$ に関して, ある分割 $C_f^\alpha, C_f^\beta, C_f^\gamma \subset C_f$ が与えられているとする. つまりこれら三つの部分集合はそれぞれ空ではなく, 互いに素であり, また $C_f^\alpha \cup C_f^\beta \cup C_f^\gamma = C_f$ を満たす (図 5 参照). そのような分割 $C_f^\alpha, C_f^\beta, C_f^\gamma \subset C_f$ に対して, $R^{\alpha,\beta,\gamma} \subseteq \Omega$ を以下のように定義する.

$$R^{\alpha,\beta,\gamma} = \{x \in \Omega \mid \min_{c_j \in C_f^\alpha} d(c_j, x) > \max_{c_k \in C_f^\beta} d(c_k, x) \text{ and } \min_{c_k \in C_f^\beta} d(c_k, x) > \max_{c_\ell \in C_f^\gamma} d(c_\ell, x)\}$$

図 5 における地点 x は, $x \in R^{\alpha,\beta,\gamma}$ を満たす地点の一つである. また同様にして, $R^{\alpha,\gamma,\beta}$, $R^{\gamma,\alpha,\beta}$, $R^{\gamma,\beta,\alpha}$, $R^{\beta,\gamma,\alpha}$ および $R^{\beta,\alpha,\gamma}$ を定義する (図 6 参照).

定義 3 (広義 3-候補地メカニズム). f を p-候補地メカニズムとする. このとき, 適当な候補地数号の分割 $C_f^\alpha, C_f^\beta, C_f^\gamma \subset C_f$ を定めたとき, 空間 Ω の六つの部分空間 $R^{\alpha,\beta,\gamma}$, $R^{\alpha,\gamma,\beta}$, $R^{\gamma,\alpha,\beta}$, $R^{\gamma,\beta,\alpha}$, $R^{\beta,\gamma,\alpha}$ および $R^{\beta,\alpha,\gamma}$ がすべて存在する (空でない) とき, そのようなメカニズムを広義 3-候補地メカニズムと呼ぶ.

p-候補地メカニズムの GSP 性に関して, 次の定理が成立する. ただし証明は, 定理 1 の証明を拡張

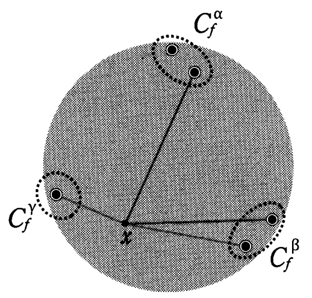


図 5　三つの候補地集合 $C_f^\alpha, C_f^\beta, C_f^\gamma \subset C_f$ および $x \in R^{\alpha,\beta,\gamma}$

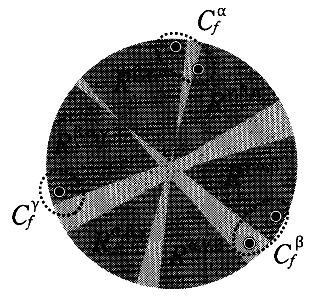


図 6　定義 3 で扱う六つの部分空間

することで得られるため, ここでは割愛する.

定理 2. f を p-候補地メカニズムとする. f が広義 3-候補地メカニズムの場合, そのような f は GSP メカニズムにならない.

3　サイクル上の 4-候補地メカニズム

3.1　特別な表記

4-候補地メカニズムを考える上で, サイクル上の距離を表す関数として以下を定義する

時計方向距離関数 $d_{\prec}(\cdot,\cdot) : C \times C \to \mathbb{R}$

サイクル上の二点 $x, y \in C$ に対して, x から時計方向へ向かって y へ向かうパスの長さを $d_{\prec}(x,y)$ で定義する (図 7 参照).

またこのとき, 二点 $x, y \in C$ の距離は $d(x,y) = \min\{d_{\prec}(x,y), d_{\prec}(y,x)\}$ と表すことができる. ここで円周長 L に対して, $d_{\prec}(x,y) + d_{\prec}(y,x) = L$ であることから, $d_{\prec}(x,y) \leq \frac{1}{2}L$ の場合, $d(x,y) = d_{\prec}(x,y)$ が成立する.

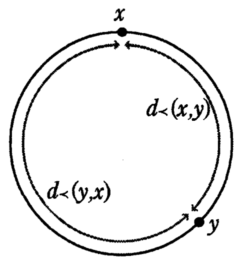


図 7　$d_{\prec}(x,y)$ および $d_{\prec}(y,x)$

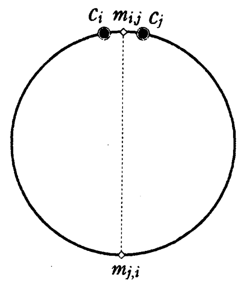


図 8　中点 $m_{i,j}$ および $m_{j,i}$

さらにメカニズムの持つ候補地に関して, その中点を以下のように定義する.

候補地の中点：メカニズムの持つ二つの候補地 $c_i, c_j \in C_f$ に対して, サイクル上には二つの中点が存在する. これらに対して, c_i から時計方向へ向かって c_j へ向かうパス上に存在する中点を $m_{i,j}$, c_j から時計方向へ向かって c_i へ向かうパス上に存在する中点を $m_{j,i}$ と定義する (図 8 参照).

4-候補地メカニズムの場合分け: サイクル上の 4-候補地メカニズムを考える. まず四つの候補地に対して時計回り方向に向かって c_1, c_2, c_3 そして c_4 の順となるようにラベリングを行い, 以下のように距離の表記を定義する (図 9 参照).

$$r_i := d_{\prec}(c_i, c_j)\ (i = 1, 2, 3, 4,\ j - 1 \equiv i \bmod 4)$$

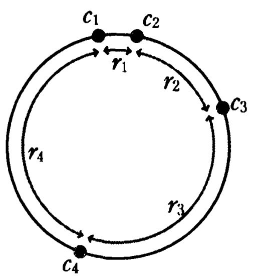


図 9　r_1, r_2, r_3 および r_4

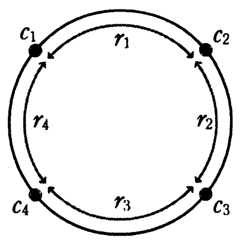


図 10　Case1 : $r_1 = r_3$ かつ $r_2 = r_4$ が成立

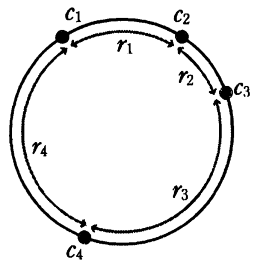


図 11　Case2 : $r_1 \neq r_3$ もしくは $r_2 \neq r_4$ の少なくとも一方が成立

このとき, r_1 と r_3 の関係および r_2 と r_4 の関係によって 4-候補地メカニズムを場合分けする.

· Case1 : $r_1 = r_3$ かつ $r_2 = r_4$ が成立 (図 10 参照)

· Case2 : $r_1 \neq r_3$ もしくは $r_2 \neq r_4$ の少なくとも一方が成立 (図 11 参照)

3.2　4-候補地メカニズムの GSP 性

このような 4-候補地メカニズムに関する場合分けに対して, それぞれの場合におけるメカニズムの GSP 性を考察すると以下の定理を得る.

補題 2. サイクル上において, Case1 の 4-候補地メカニズムは GSP メカニズムにならない.

補題 3. サイクル上において, Case2 の 4-候補地メカニズムは広義 3-候補地である.

定理 2 および上記の二つの定理により, 以下の定理が得られる.

定理 3. サイクル上において, 4-候補地メカニズムは GSP メカニズムにならない.

3.2.1　Case1 に関する補題 2 の証明

以下では, $r_1 = r_3$ および $r_2 = r_4$ を満たすようなサイクル上の 4-候補地メカニズムに関して, メカニズムの GSP 性について考察する.

ここで, C 上の部分空間に関して, 新たな定義を導入する. $\{i,j,k,\ell\} := \{1,2,3,4\}$ として,

$$R^{i,j,k,\ell} := \{x \in C \mid d(c_i,x) > d(c_j,x) > d(c_k,x) > d(c_\ell,x)\}$$

このとき, Case1 のメカニズムにおいては, 次の八つの部分空間 $R^{4,3,1,2}$, $R^{4,1,3,2}$, $R^{1,4,2,3}$, $R^{1,2,4,3}$, $R^{2,1,3,4}$, $R^{2,3,1,4}$, $R^{3,2,4,1}$ および $R^{3,4,2,1}$ が必ず存在することに注意する (図 12 参照).

また, インデクスを表す関数として $\ell : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ を導入する. ただし, $\ell(1) \in \{1,2,3,4\}$ に対して残りの $\ell(2)$, $\ell(3)$ および $\ell(4)$ の値は, $\ell(2) - 1 \equiv \ell(1) \bmod 4$, $\ell(3) - 1 \equiv \ell(2) \bmod 4$ および $\ell(4) - 1 \equiv \ell(3) \bmod 4$ で定義する. このように定めた ℓ に対して, 候補地 $c_{\ell(1)}$, $c_{\ell(2)}$, $c_{\ell(3)}$ および $c_{\ell(4)}$ はサイクル上において時計回り方向に現れることに注意する.

さらに, 特別な位置情報として Z_1, Z_2, Z_3, $Z_4 \in \Omega^n$ を定義しておく.

$Z_{\ell(1)}$: $\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが $R^{\ell(4),\ell(1),\ell(3),\ell(2)}$ 上の地点, 残りの $\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが $R^{\ell(2),\ell(1),\ell(3),\ell(4)}$ 上の地点を報告した位置情報 (図 13 参照). ここでは簡単のため, n を 2 で割り切れる値としている

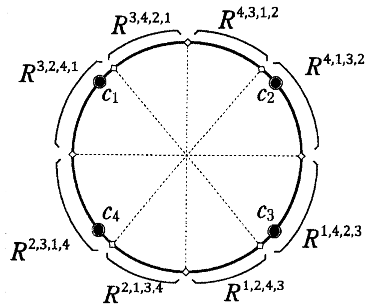


図 12　八つの部分空間 $R^{i,j,k,\ell}$

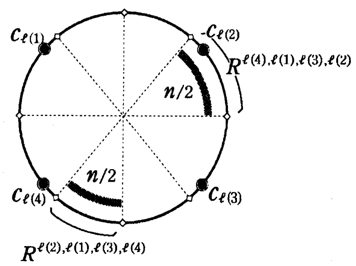


図 13　位置情報 $Z_{\ell(1)}$ におけるプレイヤー報告の分布

補題 2 を導くために, まず次の補題 4 を示す.

補題 4. f をサイクル上の Case1 の 4 候補地メカニズムとする. f が GSP メカニズムならば, $\ell(1) \in \{1,2,3,4\}$ に対して, $f(Z_{\ell(1)}) \neq c_{\ell(2)}$ かつ $f(Z_{\ell(1)}) \neq c_{\ell(4)}$ が成立する.

証明. f が GSP メカニズムのとき, $\ell(1) \in \{1,2,3,4\}$ について $f(Z_{\ell(1)}) \neq c_{\ell(2)}$ が成立することを背理法によって示す (もう一方は対称的な議論により得られる). まず, $f(Z_{\ell(1)}) = c_{\ell(2)}$ が成立すると仮定したとき, $f(Z_{\ell(4)}) = c_{\ell(1)}$ もまた成立することを示す. $f(Z_{\ell(4)}) = c_{\ell(1)}$ を示すために, $f(Z_{\ell(1)}) = c_{\ell(2)}$ という仮定の下で, $Z_{\ell(1)}$ から $Z_{\ell(4)}$ への四段階の推移を考える.

$X_0 := Z_{\ell(1)}$ と定めると, $Z_{\ell(1)}$ に関する定義と仮定より, 位置情報 X_0 において, $\frac{n}{2}$ 人ずつのプレイヤーがそれぞれ $R^{\ell(4),\ell(1),\ell(3),\ell(2)}$ および $R^{\ell(2),\ell(1),\ell(3),\ell(4)}$ 上の地点を報告しており, また $f(X_0) = c_{\ell(2)}$ が成立している.

まず第一段階として X_0 から新たな位置情報 X_1 への推移を考える (図 14-(a) 参照). ここで X_1 は, X_0 から $R^{\ell(4),\ell(1),\ell(3),\ell(2)}$ 上の $\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{\ell(4),\ell(1),\ell(3),\ell(2)}$ から $x'_i \in R^{\ell(4),\ell(3),\ell(1),\ell(2)}$ へと変更した位置情報と定義する. 推移 $X_0 \to X_1$ において, $f(X_0) = c_{\ell(2)}$ であり, また報告先の異なる全てのプレイヤー i に関して $d(x_i, c_{\ell(2)}) < d(x_i, c)$ $(c \in C_f \setminus \{c_{\ell(2)}\})$ が成立することから, 補題 1-(1) より, $f(X_1) \neq c$ $(c \in C_f \setminus \{c_{\ell(2)}\})$ を得る. つまり, X_1 においては, $\frac{n}{2}$

人ずつのプレイヤーがそれぞれ $R^{\ell(4),\ell(3),\ell(1),\ell(2)}$ および $R^{\ell(2),\ell(1),\ell(3),\ell(4)}$ 上の地点を報告しており，また $f(X_1)=c_{\ell(2)}$ が成立している．

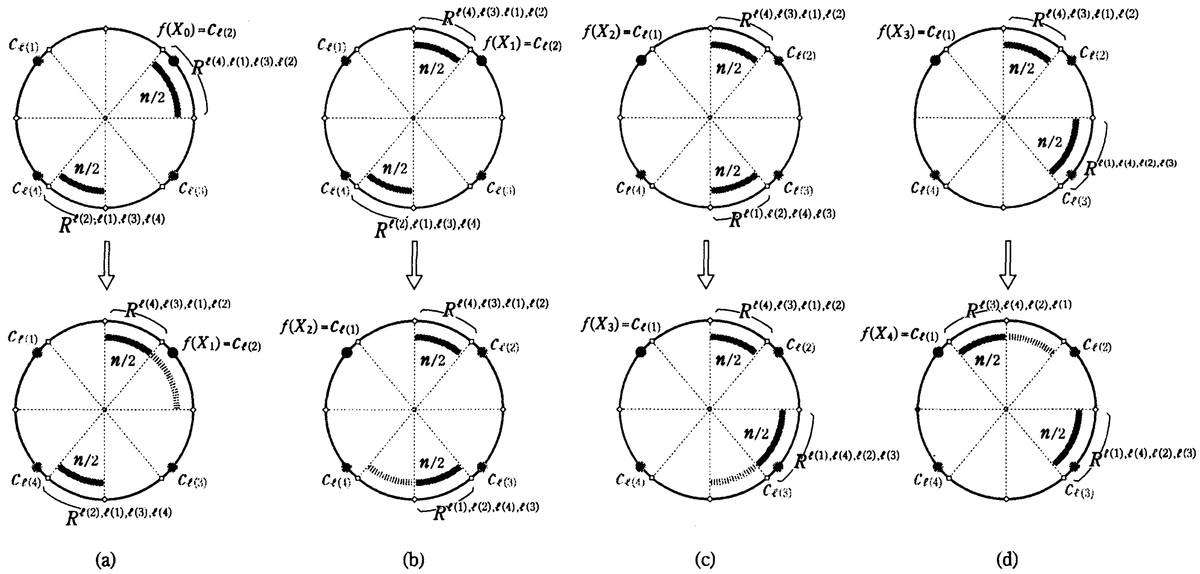


図 14 (a) 位置情報の推移 $(Z_{\ell(1)}=)X_0 \to X_1$ と出力の関係，(b) 位置情報の推移 $X_1 \to X_2$ と出力の関係，(c) 位置情報の推移 $X_2 \to X_3$ と出力の関係，(d) 位置情報の推移 $X_3 \to X_4(=Z_{\ell(4)})$ と出力の関係

次に第二段階として X_1 から新たな位置情報 X_2 への推移を考える (図 14-(b) 参照)．ここで X_2 は，X_1 から $R^{\ell(2),\ell(1),\ell(3),\ell(4)}$ 上の $\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{\ell(2),\ell(1),\ell(3),\ell(4)}$ から $x_i' \in R^{\ell(1),\ell(2),\ell(4),\ell(3)}$ へと変更した位置情報と定義する．X_2 において，全てのプレイヤー i が $R^{\ell(4),\ell(3),\ell(1),\ell(2)} \cup R^{\ell(1),\ell(2),\ell(4),\ell(3)}$ 上の地点を報告することから，系 1 より，$f(X_2) \neq c_{\ell(2)}, c_{\ell(3)}$ を得る．さらに推移 $X_1 \to X_2$ において，$f(X_1)=c_{\ell(2)}$ であり，また報告先の異なる全てのプレイヤー i に関して $d(x_i', c_{\ell(2)}) > d(x_i', c_{\ell(4)})$ が成立することから，補題 1-(2) より，$f(X_2) \neq c_\ell(4)$ を得る．つまり，X_2 においては，$\frac{n}{2}$ 人ずつのプレイヤーがそれぞれ $R^{\ell(4),\ell(3),\ell(1),\ell(2)}$ および $R^{\ell(1),\ell(2),\ell(4),\ell(3)}$ 上の地点を報告しており，また $f(X_2)=c_{\ell(1)}$ が成立している．

次に第三段階として X_2 から新たな位置情報 X_3 への推移を考える (図 14-(c) 参照)．ここで X_3 は，X_2 から $R^{\ell(1),\ell(2),\ell(4),\ell(3)}$ 上の $\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{\ell(1),\ell(2),\ell(4),\ell(3)}$ から $x_i' \in R^{\ell(1),\ell(4),\ell(2),\ell(3)}$ へと変更した位置情報と定義する．推移 $X_2 \to X_3$ において，$f(X_2)=c_{\ell(1)}$ であり，また報告先の異なる全てのプレイヤー i に関して $d(x_i', c_{\ell(1)}) > d(x_i', c)$ $(c \in C_f \setminus \{c_{\ell(1)}\})$ が成立することから，補題 1-(2) より，$f(X_3) \neq c$ $(c \in C_f \setminus \{c_{\ell(1)}\})$ を得る．つまり，X_3 においては，$\frac{n}{2}$ 人ずつのプレイヤーがそれぞれ $R^{\ell(4),\ell(3),\ell(1),\ell(2)}$ および $R^{\ell(1),\ell(4),\ell(2),\ell(3)}$ 上の地点を報告しており，また $f(X_2)=c_{\ell(1)}$ が成立している．

最後に第四段階として X_3 から新たな位置情報 X_4 への推移を考える (図 14-(d) 参照)．ここで X_4，X_3 から $R^{\ell(4),\ell(3),\ell(1),\ell(2)}$ 上の $\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{\ell(4),\ell(3),\ell(1),\ell(2)}$ から $x_i' \in R^{\ell(3),\ell(4),\ell(2),\ell(1)}$ へと変更した位置情報と定義する．X_4 において，全てのプレイヤー i が $R^{\ell(3),\ell(4),\ell(2),\ell(1)} \cup R^{\ell(1),\ell(4),\ell(2),\ell(3)}$ 上の地点を報告することから，系 1 より，$f(X_4) \neq c_{\ell(2)}$

を得る．さらに推移 $X_3 \to X_4$ において，$f(X_3) = c_{\ell(1)}$ であり，また報告先の異なる全てのプレイヤー i に関して $d(x_i, c_{\ell(1)}) < d(x_i, c_{\ell(3)}) < d(x_i, c_{\ell(4)})$ が成立することから，補題 1-(1) より，$f(X_4) \neq c_{\ell(3)}, c_{\ell(4)}$ を得る．つまり，X_4 においては，$\frac{n}{2}$ 人ずつのプレイヤーがそれぞれ $R^{\ell(3),\ell(4),\ell(2),\ell(1)}$ および $R^{\ell(1),\ell(4),\ell(2),\ell(3)}$ 上の地点を報告しており，また $f(X_4) = c_{\ell(1)}$ が成立している．

$Z_{\ell(4)}$ の定義より $Z_{\ell(4)} = X_4$ となることから，$f(Z_{\ell(4)}) = c_{\ell(1)}$ を得る．今，$f(Z_{\ell(1)}) = c_{\ell(2)}$ という仮定のもとで $f(Z_{\ell(4)}) = c_{\ell(1)}$ という結果を得たが，同様の議論により，$f(Z_{\ell(4)}) = c_{\ell(1)}$ のとき $f(Z_{\ell(3)}) = c_{\ell(4)}$ が成立する．つまり，$f(Z_{\ell(1)}) = c_{\ell(2)}$ および $f(Z_{\ell(3)}) = c_{\ell(4)}$ が成立している．

ここで Z' を新たな位置情報として，$\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが $R^{\ell(4),\ell(3),\ell(1),\ell(2)}$ 上の地点を，そして $\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが $R^{\ell(2),\ell(1),\ell(3),\ell(4)}$ 上の地点を報告した位置情報と定める．このような位置情報 Z' は，$Z_{\ell(1)}$ から $R^{\ell(4),\ell(1),\ell(3),\ell(2)}$ 上の $\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが $R^{\ell(4),\ell(3),\ell(1),\ell(2)}$ 上の地点に報告先を変更する (図 15-(a) 参照)，もしくは $Z_{\ell(3)}$ から $R^{\ell(2),\ell(3),\ell(1),\ell(4)}$ 上の $\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが $R^{\ell(2),\ell(1),\ell(3),\ell(4)}$ 上の地点に報告先を変更する (図 15-(b) 参照) ことで得られることに注意する．推

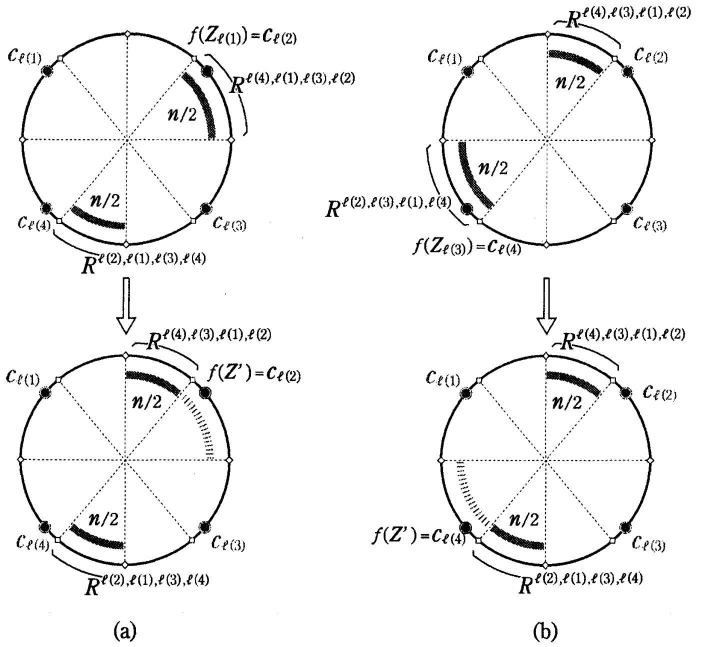


図 15　(a) 位置情報の推移 $Z_{\ell(1)} \to Z'$ と出力の関係，(b) 位置情報の推移 $Z_{\ell(3)} \to Z'$ と出力の関係

移 $Z_1 \to Z'$ において，$f(Z_{\ell(1)}) = c_{\ell(2)}$ であり，また報告先の異なる全てのプレイヤー i に関して $d(x_i, c_{\ell(2)}) < d(x_i, c)$ $(c \in C_f \setminus \{c_{\ell(2)}\})$ が成立することから，補題 1-(1) より，$f(Z') = c_{\ell(2)}$ を得る．一方，推移 $Z_{\ell(3)} \to Z'$ において，$f(Z_{\ell(3)}) = c_{\ell(4)}$ であり，また報告先の異なる全てのプレイヤー i に関して $d(x_i, c_{\ell(4)}) < d(x_i, c)$ $(c \in C_f \setminus \{c_{\ell(4)}\})$ が成立することから，補題 1-(1) より，$f(Z') = c_{\ell(4)}$ を得る．つまり $f(Z_{\ell(1)}) = c_{\ell(2)}$ という仮定のもとで Z' に関する出力に矛盾が生じるため，$f(Z_{\ell(1)}) \neq c_{\ell(2)}$ を得る．　□

これより補題 2 を示す．

補題 *2* の証明. サイクル上の Case3 の 4-候補地メカニズム f を考える. f が GSP メカニズムであると仮定したとき, $f(Z_1) \notin C_f$ となることを示すことで矛盾を導く. そこで Z_1 についての出力を考えるが, まず全てのプレイヤー i が $d(x_i, c_3) < d(x_i, c_1)$ を満たすことから, 系 1 より, $f(Z_1) \neq c_3$ が得られる. また補題 4 より, $f(Z_1) \neq c_2$ および $f(Z_1) \neq c_4$ を得る. よって $f(Z_1) \neq c_1$ を示すことで, $f(Z_1) \notin C_f$ が示される. ここでは, $f(Z_1) = c_1$ を仮定すると, $f(Z_2) = c_1$ もまた得られることから, 補題 4 に矛盾することを示す. そこで $f(Z_1) = c_1$ を仮定し, Z_1 から Z_2 へと三段階の推移を考える.

$X_0 := Z_1$ と定めると, Z_1 に関する定義と仮定より, 位置情報 X_0 において, $\frac{n}{2}$ 人ずつのプレイヤーがそれぞれ $R^{4,1,3,2}$ および $R^{2,1,3,4}$ 上の地点を報告しており, また $f(X_0) = c_1$ が成立している.

まず第一段階として X_0 から新たな位置情報 X_1 への推移を考える (図 16-(a) 参照). ここで X_1, X_0 から $R^{4,1,3,2}$ 上の $\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{4,1,3,2}$ から $x'_i \in R^{1,2,4,3}$ へと変更した位置情報と定義する. 推移 $X_0 \to X_1$ において, $f(X_0) = c_1$ であり, また報告先の異なる全てのプレイヤー i に関して $d(x'_i, c_1) > d(x'_i, c)$ $(c \in C_f \setminus \{c_1\})$ が成立することから, 補題 1-(2) より, $f(X_1) \neq c$ $(c \in C_f \setminus \{c_1\})$ を得る. つまり, X_1 においては, $\frac{n}{2}$ 人ずつのプレイヤーがそれぞれ $R^{1,2,4,3}$ および $R^{2,1,3,4}$ 上の地点を報告しており, また $f(X_1) = c_1$ が成立している. 次に第二段階と

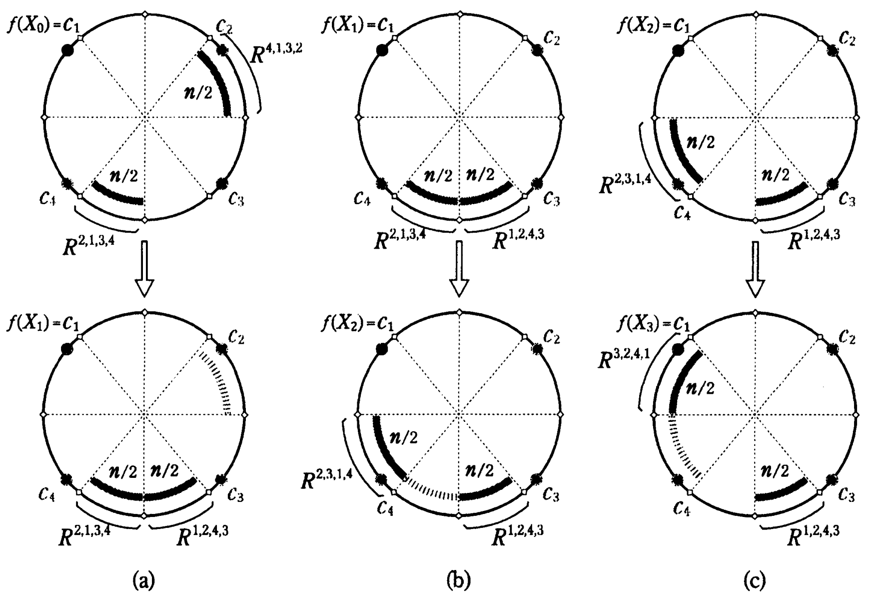


図 16 (a) 位置情報の推移 $(Z_1 =)X_0 \to X_1$ と出力の関係, (b) 位置情報の推移 $X_1 \to X_2$ と出力の関係, (c) 位置情報の推移 $X_2 \to X_3(= Z_2)$ と出力の関係

して X_1 から新たな位置情報 X_2 への推移を考える (図 16-(b) 参照). ここで X_2 は, X_1 から $R^{2,1,3,4}$ 上の $\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{2,1,3,4}$ から $x'_i \in R^{2,3,1,4}$ へと変更した位置情報と定義する. X_2 において, 全てのプレイヤー i が $R^{1,2,4,3} \cup R^{2,3,1,4}$ 上の地点を報告することから, 系 1 より, $f(X_2) \neq c_3, c_4$ を得る. さらに, 推移 $X_1 \to X_2$ において, $f(X_1) = c_1$ であり, また報告先の異なる全てのプレイヤー i に関して $d(x_i, c_1) < d(x_i, c_2)$ が成立することから, 補題 1-(1) より, $f(X_2) \neq c_2$ を得る. つまり, X_2 においては, $\frac{n}{2}$ 人ずつのプレイヤーがそれぞれ $R^{1,2,4,3}$ および $R^{2,3,1,4}$ 上の地点

を報告しており, また $f(X_2)=c_1$ が成立している.

最後に第三段階として X_2 から新たな位置情報 X_3 への推移を考える (図 16-(c) 参照) ここで X_3 は, X_2 から $R^{2,3,1,4}$ 上の $\frac{n}{2}$ 人のプレイヤーが報告先を $x_i \in R^{2,3,1,4}$ から $x'_i \in R^{3,2,4,1}$ へと変更した位置情報と定義する. X_3 において, 全てのプレイヤー i が $R^{1,2,4,3} \cup R^{3,2,4,1}$ 上の地点を報告することから, 系 1 より, $f(X_3) \neq c_4$ を得る. さらに, 推移 $X_2 \to X_3$ において, $f(X_2)=c_1$ であり, また報告先の異なる全てのプレイヤー i に関して $d(x_i,c_1) < d(x_i,c_3) < d(x_i,c_2)$ が成立することから, 補題 1-(1) より, $f(X_3) \neq c_2, c_3$ を得る. つまり, X_3 においては, $\frac{n}{2}$ 人ずつのプレイヤーがそれぞれ $R^{1,2,4,3}$ および $R^{3,2,4,1}$ 上の地点を報告しており, また $f(X_3)=c_1$ が成立している.

Z_2 の定義より $Z_2 = X_3$ となることから, $f(Z_2)=c_1$ を得る. これは補題 4 に矛盾することから, $f(Z_1) \neq c_1$ を得る. □

3.2.2 Case2 に関する補題 3 の証明

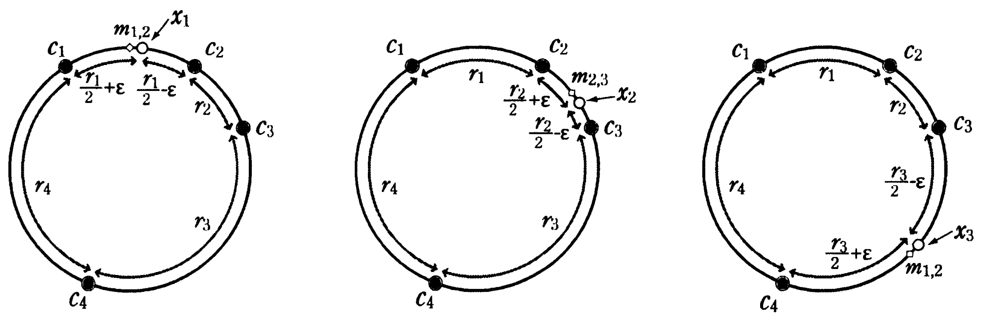
本文ではサイクル上の 4-候補地メカニズムの場合分けのため, 候補地を時計回り方向に向かって c_1, c_2, c_3 そして c_4 の順となるようにラベリングを考えている. ここで Case2 ($r_1 \neq r_3$ もしくは $r_2 \neq r_4$ の少なくとも一方は成立) に対して一般性を失うことなくラベリングの定義として, $r_1 < r_3$ かつ $r_2 \leq r_4$, という条件を追加する.

補題 *3* の証明. $\alpha = \{c_1, c_2\}$, $\beta = \{c_3\}$ および $\gamma = \{c_4\}$ と定める.

まず, $x_1 \in R^{\gamma,\beta,\alpha}$ を満たす $x_1 \in C$ の存在を示す. 十分小さな ϵ (>0) に対して, x_1 を $d_{\prec}(m_{1,2}, x_1) = \epsilon$ を満たす x_1 を考える (図 17-(a) 参照). このとき x_1 と c_1 および c_2 の位置関係を考えると, $d_{\prec}(c_1,x_1) = \frac{1}{2}r_1 + \epsilon$ および $d_{\prec}(x_1,c_2) = \frac{1}{2}r_1 - \epsilon$ が得られる. 円周長が L であることから, $\frac{1}{2}(r_1+r_2+r_3+r_4) \leq \frac{L}{2}$ であることに注意すると, 明らかに両者とも $\frac{1}{2}L$ 以下であるため, $d(x_1,c_1) = \frac{1}{2}r_1 + \epsilon$ および $d(x_1,c_2) = \frac{1}{2}r_1 - \epsilon$ となる. また x_1 と c_3 の位置関係を考えると, $d_{\prec}(x_1,c_3) = \frac{1}{2}r_1 + r_2 - \epsilon$ が得られるが, $r_2 \leq r_4$ より, $d_{\prec}(x_1,c_3) \leq \frac{1}{2}(r_1+r_2+r_4) - \epsilon < \frac{1}{2}L$ が成立する. つまり, $d(x_1,c_3) = \frac{1}{2}r_1 + r_2 - \epsilon$ を得る. 最後に x_1 と c_4 の位置関係だが, $d_{\prec}(x_1,c_4) = \frac{1}{2}r_1 + r_2 + r_3 - \epsilon$ および $d_{\prec}(c_4,x_1) = \frac{1}{2}r_1 + r_4 + \epsilon$ より, $d(x_1,c_4) = \min\{\frac{1}{2}r_1+r_2+r_3-\epsilon, \frac{1}{2}r_1+r_4+\epsilon\}$ を得る. 以上の結果に基づき x_1 と各候補間の距離を比較すると, $d(x_1,c_2) < d(x_1,c_1) < d(x_1,c_3) < d(x_1,c_4)$ が成立する. つまり $x_1 \in R^{\gamma,\beta,\alpha}$ であると言える.

次に, $x_2 \in R^{\gamma,\alpha,\beta}$ を満たす $x_2 \in C$ の存在を示す. 十分小さな ϵ (>0) に対して, x_2 を $d_{\prec}(m_{2,3}, x_2) = \epsilon$ を満たす x_2 を考える (図 17-(b) 参照). このとき x_2 と c_1 の位置関係を考えると, $d_{\prec}(c_1,x_2) = r_1 + \frac{1}{2}r_2 + \epsilon$ が得られ, $r_1 < r_3$ より十分小さな ϵ に対して, $d_{\prec}(c_1,x_2) < \frac{1}{2}(r_1+r_2+r_3) + \epsilon < \frac{1}{2}L$ が成立する. つまり, $d(x_2,c_1) = r_1 + \frac{1}{2}r_2 + \epsilon$ を得る. また x_2 と c_2 および c_3 の位置関係を考えると, $d_{\prec}(c_2,x_2) = \frac{1}{2}r_2 + \epsilon$ ($< \frac{1}{2}L$) および $d_{\prec}(x_2,c_3) = \frac{1}{2}r_2 - \epsilon$ ($< \frac{1}{2}L$) より, $d(x_2,c_2) = \frac{1}{2}r_2 + \epsilon$ および $d(x_2,c_3) = \frac{1}{2}r_2 - \epsilon$ を得る. 最後に x_2 と c_4 の位置関係だが, $d_{\prec}(x_2,c_4) = \frac{1}{2}r_2 + r_3 - \epsilon$ および $d_{\prec}(c_4,x_2) = r_1 + \frac{1}{2}r_2 + r_4 + \epsilon$ より, $d(x_2,c_4) = \min\{\frac{1}{2}r_2 + r_3 - \epsilon, r_1 + \frac{1}{2}r_2 + r_4 + \epsilon\}$ を得る. 以上の結果に基づき x_2 と各候補間の距離を比較すると, $d(x_2,c_3) < d(x_2,c_2) < d(x_2,c_1) < d(x_2,c_4)$ が成立する. つまり $x_2 \in R^{\gamma,\alpha,\beta}$ であると言える.

次に $x_3 \in R^{\alpha,\gamma,\beta}$ を満たす $x_3 \in C$ の存在を示す. 十分小さな ϵ (>0) に対して, x_3 を $d_{\prec}(x_3, m_{3,4}) = \epsilon$ を満たす x_3 を考える (図 17-(c) 参照). まず x_3 と c_1 の位置関係だが, $d_{\prec}(c_1,x_3) =$



(a) (b) (c)

図 17 (a)$x_1 \in R^{\gamma,\beta,\alpha}$ を満たす x_1 の存在性, (b)$x_2 \in R^{\gamma,\alpha,\beta}$ を満たす x_2 の存在性, (c)$x_1 \in R^{\alpha,\gamma,\beta}$ を満たす x_3 の存在性

$r_1+r_2+\frac{1}{2}r_3-\epsilon$ および $d_{\prec}(x_3,c_1)=\frac{1}{2}r_3+r_4+\epsilon$ より, $d(x_3,c_1)=\min\{r_1+r_2+\frac{1}{2}r_3-\epsilon, \frac{1}{2}r_3+r_4+\epsilon\}$ を得る. また x_3 と c_2 の位置関係を考えると, $d_{\prec}(c_2,x_3)=r_2+\frac{1}{2}r_3-\epsilon$ が得られ, $r_2 \leq r_4$ より十分小さな ϵ に対して, $d_{\prec}(c_2,x_3) \leq \frac{1}{2}(r_2+r_3+r_4)-\epsilon < \frac{1}{2}L$ が成立する. つまり, $d(x_3,c_2)=r_2+\frac{1}{2}r_3-\epsilon$ を得る. 最後に x_3 と c_3 および c_4 の位置関係を考えると, $d_{\prec}(c_3,x_3)=\frac{1}{2}r_3-\epsilon$ $(<\frac{1}{2}L)$ および $d_{\prec}(x_3,c_4)=\frac{1}{2}r_3+\epsilon$ $(<\frac{1}{2}L)$ より, $d(x_3,c_3)=\frac{1}{2}r_3-\epsilon$ および $d(x_3,c_4)=\frac{1}{2}r_3+\epsilon$ を得る. 以上の結果に基づき x_3 と各候補間の距離を比較すると, $d(x_3,c_3)<d(x_3,c_4)<d(x_3,c_2)<d(x_3,c_1)$ が成立する. つまり $x_3 \in R^{\alpha,\gamma,\beta}$ であると言える.

ここで, サイクル上の地点 $x \in C$ に対して, $d(x,\bar{x})=\frac{L}{2}$ を満たす地点 $\bar{x} \in C$ を x の対角点と呼ぶ. このとき距離の定義より二点 $x,y \in C$ に対して $d(\bar{x},y)=\frac{1}{2}L-d(x,y)$ が成立することに注意する. つまり二つの候補地 $c_i,c_j \in C_f$ に対して $d(x,c_i)<d(x,c_j)$ を満たす $x \in C$ について, その対角点 $\bar{x}$ は $d(\bar{x},c_i)>d(\bar{x},c_j)$ を満たす. よって, 三点 $x_1 \in R^{\gamma,\beta,\alpha}$, $x_2 \in R^{\gamma,\alpha,\beta}$ および $x_3 \in R^{\alpha,\gamma,\beta}$ に対して対角点 $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ および $\bar{x}_3$ を考えると, $\bar{x}_1 \in R^{\alpha,\beta,\gamma}$, $\bar{x}_2 \in R^{\beta,\alpha,\gamma}$ および $\bar{x}_3 \in R^{\beta,\gamma,\alpha}$ を得る.

以上の結果より, $\alpha=\{c_1,c_2\}$, $\beta=\{c_3\}$ および $\gamma=\{c_4\}$ としたとき, 空間 C の六つの部分空間 $R^{\alpha,\beta,\gamma}$, $R^{\alpha,\gamma,\beta}$, $R^{\gamma,\alpha,\beta}$, $R^{\gamma,\beta,\alpha}$, $R^{\beta,\gamma,\alpha}$ および $R^{\beta,\alpha,\gamma}$ がそれぞれ少なくとも一つ要素を持つ (空でない) ため, このような候補地配置を持つメカニズムは広義 3-候補地メカニズムと言える. □

参考文献

[1] N. Alon, M. Feldman, A. D. Procaccia, and M. Tennenholtz, Strategyproof approximation mechanisms for location on networks, CoRR, abs/0907.2049, 2009.

[2] Y. Cheng, W. Yu, and G. Zhang, Mechanisms for obnoxious facility game on a path, in: Proceedings of the 5th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications (COCOA 2011), LNCS vol. 6831, pp. 262-271, 2011.

[3] K. Ibara and H. Nagamochi, Charactewrizing mechanisms in obnoxious facility game, in: Proceedings of the 6th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications (COCOA 2012), LNCS vol. 7402, pp. 301-311, 2012.