

# Coassociative 部分多様体の具体的構成

東北大学大学院理学研究科数学専攻 河井 公大朗

Kotaro Kawai

Mathematical Institute, Tohoku University \*

実 7 次元のリーマン多様体  $(Y, g)$  のホロノミー群が例外型 Lie 群  $G_2$  に含まれるとき、 $(Y, g)$  は  $G_2$  多様体であるという。 $G_2$  多様体は  $Y$  上の 3 次微分形式  $\varphi$  により特徴づけられる。 $\varphi$  の制限が常に 0 になるような 4 次元部分多様体を coassociative 部分多様体という。特に  $SU(3) \subset G_2$  より、(3 次元カラビ・ヤウ多様体)  $\times \mathbb{R}$  は  $G_2$  多様体であり、(phase  $-i$  の特殊ラグランジュ部分多様体)  $\times \mathbb{R}$  はその中の coassociative 部分多様体になる。近年はミラー対称性の観点 [3] から注目を集めており、今回はその具体的構成を考える。

## 1 準備

### 1.1 Calibrated Geometry

ケーラー多様体のコンパクト複素部分多様体が、そのホモロジー類の中で体積を最小にすることは、Wirtinger の不等式として知られている。この概念を一般化し、Harvey と Lawson [4] は calibration の概念を導入した。

**定義 1.**  $(Y, g)$  を  $m$  次元リーマン多様体とし、 $\varphi$  を  $Y$  上の  $k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) 次微分形式とする。任意の向きづけられた  $k$  次元部分空間  $V \subset T_p M$ ,  $p \in M$  に対して、

$$\varphi|_V \leq \text{vol}_V$$

を満たすとき、 $\varphi$  は  $Y$  上の **calibration** と呼ばれる。

$N \subset M$  を向きづけられた  $k$  次元部分多様体とする。 $N$  は

$$\varphi|_N = \text{vol}_N$$

をみたすとき、 $Y$  の **calibrated submanifold** ( $\varphi$ -submanifold) と呼ばれる。

---

\* 日本学術振興会特別研究員 PD (課題番号:24-3603)  
e-mail: sb1d07@math.tohoku.ac.jp

リーマン多様体のホロノミー群を用いると、自然な calibration、calibrated submanifold が定義される。以下にいくつか例を示す。

Hol( $g$ ) ( $\subset$ )	$U(m)$	$SU(m)$	$G_2$
$(M, g)$	ケーラー	カラビ・ヤウ	$G_2$
$\varphi$	$\omega^k/k!$ ( $\omega$ : ケーラー形式)	$\text{Re}(e^{\sqrt{-1}\theta}\Omega)$ ( $\Omega$ : 正則体積要素)	$\varphi \in \Omega^3$ ( $*\varphi \in \Omega^4$ ) ( $\varphi$ : $G_2$ 構造)
$\varphi$ -submanifolds	$k$ 次元複素 部分多様体	特殊ラグランジュ 部分多様体	(co)associative 部分多様体

これらの部分多様体は、ミラー対称性の観点など様々な方面から注目を集めている。一方、これらは非線形偏微分方程式で定義され、具体的な構成は非常に難しい。以下ではこの具体的構成法について述べる。

## 1.2 $G_2$ 幾何学

**定義 2.**  $\mathbb{R}^7$  上の 3-form  $\varphi_0$  を次で定義する。

$$\varphi_0 = e^{125} - e^{345} + e^{136} - e^{426} + e^{147} - e^{237} + e^{567},$$

ここで  $(e^1, \dots, e^7)$  は  $\mathbb{R}^7$  の標準双対基底であり、外積の記号は省略してある。 $\varphi_0$  の固定部分群は例外型 Lie 群  $G_2$  となる。

$$G_2 = \{g \in GL(7, \mathbb{R}); g^*\varphi_0 = \varphi_0\}$$

Lie 群  $G_2$  は、 $\mathbb{R}^7$  上の向き、標準計量  $g_0 = \sum_{i=1}^7 (e^i)^2$ 、および  $\varphi$  の Hodge 双対

$$*\varphi_0 = e^{3467} - e^{1267} + e^{2457} + e^{1357} + e^{2356} - e^{1456} + e^{1234},$$

も固定する。これらは次の関係式より  $\varphi_0$  から一意的に定まる。

$$-6g_0(v_1, v_2)\text{vol}_{g_0} = i(v_1)\varphi_0 \wedge i(v_2)\varphi_0 \wedge \varphi_0,$$

ここで  $\text{vol}_{g_0}$  は  $g_0$  の体積要素、 $i(\cdot)$  は内部積を表し、 $v_i \in T(\mathbb{R}^7)$  である。

**定義 3.**  $Y$  を向きづけられた 7次元多様体とし、 $\varphi$  を  $Y$  上の 3-form とする。各  $y \in Y$  に対し、 $T_y Y$  と  $\mathbb{R}^7$  の間に向きを保つ同型があり、それによって  $\varphi_y$  と  $\varphi_0$  が同一視されるとき、3-form  $\varphi$  は  $Y$  上の  $G_2$  構造と呼ばれる。(1.1) より  $\varphi$  から、 $Y$  上のリーマン計量  $g$ 、体積要素、 $*\varphi \in \Omega^4(Y)$  が誘導される。 $\varphi \in \Omega^3(Y)$  が  $Y$  上の  $G_2$ -構造であり、 $g$  がそれから誘導される計量であるとき、 $(Y, \varphi, g)$  は  $G_2$  多様体と呼ばれる。更に  $d\varphi = d*\varphi = 0$  を満たすとき、 $G_2$  多様体  $(Y, \varphi, g)$  は **torsion-free** と呼ばれる。

**補題 4.** [2]  $(Y, \varphi, g)$  を  $G_2$  多様体とする。このとき  $\text{Hol}(g) \subset G_2$  であることと、 $d\varphi = d*\varphi = 0$  であることは同値である。

**補題 5.** [4]  $(Y, \varphi, g)$  が *torsion-free*  $G_2$ -多様体のとき、 $G_2$  構造  $\varphi$  とその *Hodge* 双対  $*\varphi$  は  $Y$  上の *calibration* を定める。

**定義 6.** [4]  $\varphi$ -submanifold を **associative 部分多様体** といい、 $*\varphi$ -submanifold を **coassociative 部分多様体** という。

coassociative 部分多様体は、次のようにより扱いやすい定義がある。

**補題 7.** [4]  $L \subset Y$  を向きづけられた 4次元部分多様体とする。このとき  $L$  が *coassociative* であることと、 $\varphi|_L = 0$  であることは同値である。

## 2 各種構成方法

先行研究のうち、代表的なものについて述べる。

### 2.1 Lie 群の対称性を用いた例の構成

この手法は、極小部分多様体に対して Hsiang, Lawson [6] により提唱された。今回はこの手法を用いて構成する。次節においてその手法を詳細に述べる。

この手法で、特殊ラグランジュ部分多様体の例も構成されている ([5], [8])。

### 2.2 発展方程式による手法

この構成は次の事実に基づく。

**事実 8.** [4]  $P^3 \subset \mathbb{R}^7$  を実解析的な 3次元部分多様体で  $\varphi|_P = 0$  とする。このとき  $P$  を含む *coassociative* 部分多様体  $N$  が存在する。

$\iota: P \hookrightarrow \mathbb{R}^7$  をはめ込みとする。はめ込みの族  $\{\iota_t: P \hookrightarrow \mathbb{R}^7\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$  で、 $\cup_{t \in (-\epsilon, \epsilon)} \text{Im}(\iota_t)$  が *coassociative* となるものを探す。一般の  $P$  に対してこれを行うのは難しいが、 $P$  が  $G_2 \times \mathbb{R}^7$  の 3次元部分群の軌道である場合に、Lotay [11] は具体例を構成した。

### 2.3 束の構造を用いた構成

$M^4 = \mathbb{R}^4, S^4$  or  $\mathbb{C}P^2$  とすると、 $\Lambda^2 M^4$  は  $G_2$  多様体になることが知られている。 $\Sigma^2 \subset M^4$  を 2次元極小部分多様体とし、その上のある階数 2 のベクトル束が *coassociative* となる条件を考える。

$M = \mathbb{R}^4$  の場合は、Ionel, Karigiannis, Min-Oo [7] によって、 $M = S^4, \mathbb{C}P^2$  の場合は Karigiannis, Min-Oo [9] により構成された。

## 2.4 Isometric involution を用いた構成

$\sigma : Y \rightarrow Y$  を微分同相で、 $\sigma^*g = g, \sigma^*\varphi = -\varphi, \sigma \neq id, \sigma^2 = id$  となるものとする。このとき、 $\sigma$  の固定点集合は coassociative となる。

この手法は Joyce [10] により  $\text{Hol}(g) = G_2$  となるコンパクト  $G_2$  多様体  $(Y, \varphi, g)$  上での構成に用いられた。(Hol( $g$ ) =  $G_2$  となるコンパクト  $G_2$  多様体の構成は非常に難しく、Joyce は最初の例を与えた。)

## 3 Lie 群の対称性を用いた例の構成

coassociative 部分多様体  $L$  の構成のために、 $L$  がある Lie 群  $G$  の作用によって保たれると仮定する。よく知られているように、 $G$  が  $L$  に余等質性 1 に作用しているとき、coassociative となる条件の偏微分方程式は、軌道空間上の 1 階の常微分方程式に帰着される。この手法は次のようにまとめられる。

**命題 9.**  $(Y, \varphi, g)$  を  $G_2$  多様体とする。Lie 群  $G$  が  $Y$  に作用しており、その作用は  $\varphi$  を定数倍を除いて保ち、かつ  $G$  の主軌道の次元は 3 とする。

1. 以下のような部分集合  $\Sigma \subset Y$  を見つける。(  $\Sigma$  は軌道空間 “ $Y/G$ ” と思える。)

- $G \cdot \Sigma = \{g \cdot x \in Y; g \in G, x \in \Sigma\} = Y,$
- $T_x \Sigma \cap T_x(G\text{-orbit}) = \{0\} \ (\forall x \in \Sigma),$

ここで  $T_x(G\text{-orbit})$  は、点  $x$  における  $G\text{-orbit}$  方向の接空間。

2. 以下の条件を満たす  $\text{path } c : I \rightarrow \Sigma$  ( $I \subset \mathbb{R}$ : 開区間) を探す。

$$\varphi(v_1^*, v_2^*, v_3^*)|_c = 0, \quad \varphi(v_i^*, v_j^*, \dot{c})|_c = 0 \quad (\forall v_i \in \mathfrak{g} = \text{Lie}(G)),$$

ここで  $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$ 、 $v^*$  は  $v \in \mathfrak{g}$  で生成される  $Y$  上のベクトル場。

3. このとき  $L := G \cdot \text{Image}(c)$  は  $G$  不変な部分多様体となる。

この手法の利点として、構成された部分多様体内の特異軌道がわかりやすく、位相を解析しやすい点が挙げられる。

## 4 $\mathbb{R}^7$ 上での構成

### 4.1 $\mathbb{R}^7$ 上の $G_2$ 構造

$\mathbb{R}^7$  を  $\Lambda^2 \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^3$  と同一視し、 $(y^1, y^2, y^3, y^4)$  を  $\mathbb{R}^4$  の標準的な座標とする。2-form  $\omega_i$  と 1-form  $b^j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) を

$$\omega^1 = dy^{12} - dy^{34}, \omega^2 = dy^{13} - dy^{42}, \omega^3 = dy^{14} - dy^{23}, b^j = da^j,$$

と定める。ここで  $(a^1, a^2, a^3)$  は  $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$  に関するファイバー座標である。このとき  $\mathbb{R}^7$  上の  $G_2$  構造  $\varphi$  は次のようにかける。

$$\varphi = \sum_{i=1}^3 b^i \wedge \omega^i + b^{123}.$$

## 4.2 $G = \text{SU}(2)$ の場合

$\text{SU}(2)$  の  $\mathbb{R}^7$  への作用として、 $\text{SU}(2)$  の  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$  への標準的な作用から  $\Lambda^2 \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^7$  に誘導されるものを考える。このとき“軌道空間” $\Sigma$  は次のようにかける。

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3, \\ \Sigma_1 &= \{(y^1, 0, 0, 0, a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^7; y^1 > 0, a^i \in \mathbb{R}\}, \\ \Sigma_2 &= \{(0, 0, 0, 0, a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^7; \sum_{i=1}^3 |a^i|^2 > 0\}, \Sigma_3 = \{0\}, \end{aligned}$$

このとき  $\text{SU}(2) \cdot \Sigma = \mathbb{R}^7$  となり、軌道の位相は次のようになる。

$$\text{SU}(2) \cdot x \cong \begin{cases} S^3 & (x \in \Sigma_1), \\ S^2 & (x \in \Sigma_2), \\ * & (x \in \Sigma_3). \end{cases}$$

$\text{SU}(2)$  の Lie 環  $\mathfrak{su}(2)$  の基底  $\{X_1, X_2, X_3\}$  を次で定める。

$$X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, X_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

これは  $[X_j, X_{j+1}] = X_{j+2} (j \in \mathbb{Z}/3)$  を満たす。このとき path  $c: I \rightarrow \Sigma$  で、

$$\begin{aligned} \varphi(X_1^*, X_2^*, X_3^*)|_c &= 0, \\ \varphi(X_i^*, X_j^*, \dot{c})|_c &= 0 \quad (1 \leq i, j \leq 3). \end{aligned}$$

を満たすものを探せばよい。これを解くと、 $c$  は次の形になる。

$$\{(y^1, 0, 0, 0), r\vec{v}\} \in \mathbb{R}^7; r(4r^2 - 5(y^1)^2)^2 = C, r \geq 0\}$$

( $\vec{v} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3, C \geq 0$ ) そして次の Harvey, Lawson による例を再構成できる。

**定理 10** (Harvey and Lawson [4]). 任意の  $\vec{v} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3, C \geq 0$  に対して、

$$M_C := \text{SU}(2) \cdot \{(y^1, 0, 0, 0), r\vec{v}\} \in \mathbb{R}^7; r(4r^2 - 5(y^1)^2)^2 = C, r \geq 0\}$$

は  $\mathbb{R}^7$  の  $\text{SU}(2)$  不変 *coassociative* 部分多様体である。更に、この  $\text{SU}(2)$  作用で不変な *coassociative* 部分多様体はすべてこの形にかける。

$C > 0$  のとき、 $M_C$  は次の 2 つの連結成分  $M_C^\pm$  を持つ。

$$M_C^\pm := M_C \cap \text{SU}(2) \cdot \{((y^1, 0, 0, 0), r\vec{v}) \in \mathbb{R}^7; \pm(4r^2 - 5(y^1)^2) > 0\}$$

$M_C^+$  (resp.  $M_C^-$ ) は  $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$  上の自然束  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(-1)$  (resp.  $S^3 \times \mathbb{R}$ ) と同型である。  $C = 0$  のとき

$$\begin{aligned} M_0 &= M_0^0 \sqcup M_0', \quad M_0^0 = \text{SU}(2) \cdot \{(y^1, 0, 0, 0, 0, 0, 0); y^1 \geq 0\}, \\ M_0' &= \text{SU}(2) \cdot \left\{ y^1 \cdot \left( (1, 0, 0, 0), \frac{\sqrt{5}}{2} \vec{v} \right) \in \mathbb{R}^7; y^1 > 0 \right\}, \end{aligned}$$

となり、 $M_0^0$  は平坦な  $\mathbb{R}^4$ 、 $M_0'$  は Hopf fibration  $S^3 \rightarrow S^2$  のグラフ上の錐で、 $S^3 \times \mathbb{R}$  に同型である。

### 4.3 $G = T^2 \times \mathbb{R}_{>0}$ の場合

$T^2 \times \mathbb{R}_{>0}$  の  $\mathbb{R}^7$  への作用を次で定める。

$$(e^{i\theta}, e^{i\psi}, R) \cdot (z^1, z^2, a^1, w) = (Re^{i\theta}z^1, Re^{i\psi}z^2, Ra^1, Re^{i(\psi-\theta)}w),$$

ここで  $(e^{i\theta}, e^{i\psi}, R) \in T^2 \times \mathbb{R}_{>0}$ 、 $(z^1, z^2, a^1, w) \in \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{R}^7$  である。このとき“軌道空間” $\Sigma$  は次のようにかける。

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3 \sqcup \Sigma_4 \sqcup \Sigma_5 \sqcup \Sigma_6, \\ \Sigma_1 &= \{(y^1, 0, y^3, 0, a^1, a^2, a^3) \in S^6; y^1, y^3 \geq 0, |y^1|^2 + |y^3|^2 > 0\}, \\ \Sigma_2 &= \{(y^1, 0, y^3, 0, a^1, a^2, 0) \in S^6; \#\{x=0; x \in \{y^1, y^3, a^2\}\} = 2\}, \\ \Sigma_3 &= \{(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\}, \quad \Sigma_4 = \{0\}. \end{aligned}$$

このとき  $T^2 \times \mathbb{R}_{>0} \cdot \Sigma = \mathbb{R}^7$  となり、軌道の位相は次のようになる。

$$T^2 \times \mathbb{R}_{>0} \cdot x \cong \begin{cases} T^2 \times \mathbb{R}_{>0} & (x \in \Sigma_1), \\ S^1 \times \mathbb{R}_{>0} & (x \in \Sigma_2), \\ \mathbb{R}_{>0} & (x \in \Sigma_3), \\ * & (x \in \Sigma_4). \end{cases}$$

$T^2$  の Lie 環  $\mathfrak{t}^2$  の基底を  $X_1 = (1, 0), X_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathfrak{t}^2$  とする。このとき path  $c: I \rightarrow \Sigma$  で、

$$\begin{aligned} \varphi(X_1^*, X_2^*, r \frac{\partial}{\partial r})|_c &= 0, \\ \varphi(X_1^*, X_2^*, \dot{c})|_c &= 0, \\ \varphi(X_1^*, r \frac{\partial}{\partial r}, \dot{c})|_c &= 0, \\ \varphi(X_2^*, r \frac{\partial}{\partial r}, \dot{c})|_c &= 0. \end{aligned}$$

を満たすものを探せばよい。これより、次の定理を得る。

**定理 11.**  $\alpha, \gamma : I \rightarrow (0, \pi/2)$ ,  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  を、開区間  $I \subset \mathbb{R}$  上の滑らかな関数で、

$$\frac{d}{dt} \log(\sin \gamma) = -\frac{2 \tan \beta \cdot \tan(2\alpha - \beta) \cdot \dot{\beta}}{\tan(2\alpha - \beta) + 3 \tan \beta},$$

$$\frac{d}{dt} \log(\tan \gamma) = -\tan(2\alpha - \beta) \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta})$$

を満たすとする。このとき、次の部分集合  $M \subset \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^7$

$$M = \left\{ (Re^{i\theta} \cos \gamma(t) \cdot \cos \alpha(t), Re^{i\psi} \cos \gamma(t) \cdot \sin \alpha(t), \right. \\ \left. R \sin \gamma(t) \cdot \cos \beta(t), Re^{i(\psi-\theta)} \sin \gamma(t) \cdot \sin \beta(t) \right\}; R > 0, \theta, \psi \in \mathbb{R}, t \in I$$

は  $T^2$  不変 *coassociative cone* で、十分小さい  $I \subset \mathbb{R}$  に対して  $M \cong T^2 \times \mathbb{R}_{>0} \times I$  となる。

## 5 $\Lambda^2 S^4$ 上での構成

### 5.1 $\Lambda^2 S^4$ 上の $G_2$ 構造

$S^4$  の反自己双対束  $\Lambda^2 S^4$  には、[1] により完備な  $G_2$  計量  $g_\lambda (\lambda > 0)$  が入ることが知られている。 $\Lambda^2 S^4$  は  $S^4$  の Levi-Civita 接続から誘導される接続を持つから、接空間は水平、垂直方向への自然な分解  $T_\omega(\Lambda^2 S^4) \cong \mathcal{H}_\omega \oplus \mathcal{V}_\omega$  ( $\omega \in \Lambda^2 S^4$ ) を持つ。

**命題 12** (Bryant and Salamon [1], [9]). 各  $\lambda > 0$  に対して、 $\Lambda^2 S^4$  上の 3-form  $\varphi_\lambda \in \Omega^3(\Lambda^2 S^4)$  と計量  $g_\lambda$  を次のように定める。

$$\varphi_\lambda = 2s_\lambda d\tau + \frac{1}{s_\lambda^3} \text{vol}_\nu, \quad g_\lambda = 2s_\lambda^2 g_\mathcal{H} + \frac{1}{s_\lambda^2} g_\nu$$

ここで  $s_\lambda = (\lambda + r^2)^{1/4}$ ,  $r$  は  $S^4$  からの誘導計量で測った零切断からの距離。 $\tau$  は *tautological 2-form* で、 $\text{vol}_\nu$  はファイバー上の計量  $g_\nu$  に関する体積要素である。

このとき各  $\lambda > 0$  に対して、 $(\Lambda^2 S^4, \varphi_\lambda, g_\lambda)$  は *torsion-free*  $G_2$  多様体となり、 $g_\lambda$  は完備で  $\text{Hol}(g_\lambda) = G_2$  を満たす。

**注意 13.**  $\Lambda^2 S^4 - \{0\text{-section}\} \cong \mathbb{C}P^3 \times \mathbb{R}_{>0}$  であり、 $\lambda = 0$  のとき、計量  $g_0$  は  $\mathbb{C}P^3$  上の錐計量になる。 $\mathbb{C}P^3$  上の計量  $g_{\mathbb{C}P^3}$  は標準的な計量ではなく、3-symmetric Einstein の非ケーラー計量になる。 $g_0$  は完備ではないが、 $\text{Hol}(g_0) = G_2$  を満たす。

### 5.2 $G = \text{SU}(2)$ の場合

$\text{SU}(2)$  の  $\Lambda^2 S^4$  への作用として、 $\text{SU}(2)$  の  $S^4 \subset \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{R}$  への標準的な作用から誘導されるものを考える。 $S^4$  の局所座標

$$\begin{array}{ccc} S^4 - \{x^5 = 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \Psi & & \Psi \\ (x^1, \dots, x^5) & \longmapsto & \left( \frac{x^1}{1-x^5}, \dots, \frac{x^4}{1-x^5} \right) =: (y^1, \dots, y^4). \end{array}$$

をとり、それに随伴する  $\Lambda^2 S^4$  のファイバー座標  $(a^1, a^2, a^3)$  を取る。このとき、 $\mathbb{R}^7$  の場合同様 “軌道空間”  $\Sigma$  は次のようにかける。

$$\begin{aligned}\Sigma &= \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3, \\ \Sigma_1 &= \{(y^1, 0, 0, 0, a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^7; y^1 > 0, a^i \in \mathbb{R}\}, \\ \Sigma_2 &= \Lambda^2 S^4|_{x^5=-1} - \{0\} \sqcup \Lambda^2 S^4|_{x^5=1} - \{0\}, \Sigma_3 = \{x^5 = \pm 1\} \subset S^4,\end{aligned}$$

このとき  $SU(2) \cdot \Sigma = \mathbb{R}^7$  となり、軌道の位相は次のようになる。

$$SU(2) \cdot x \cong \begin{cases} S^3 & (x \in \Sigma_1), \\ S^2 & (x \in \Sigma_2), \\ * & (x \in \Sigma_3). \end{cases}$$

$SU(2)$  の Lie 環  $\mathfrak{su}(2)$  の基底  $\{X_1, X_2, X_3\}$  を (4.1) のように定める。このとき path  $c: I \rightarrow \Sigma$  で、

$$\begin{aligned}\varphi(X_1^*, X_2^*, X_3^*)|_c &= 0, \\ \varphi(X_i^*, X_j^*, \dot{c})|_c &= 0 \quad (1 \leq i, j \leq 3).\end{aligned}$$

を満たすものを探せばよい。これを解くと、 $c$  は次の形になる。

**定理 14.**  $\forall C \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  に対して、部分集合

$$M_C := SU(2) \cdot \left\{ ((y^1, 0, 0, 0), r\vec{v}); \begin{aligned} -\int_0^{\sqrt{r}} (\lambda + a^4)^{1/8} da + \frac{(\lambda+r^2)^{1/8} \sqrt{r}}{1+(y^1)^2} = C, \\ r \geq 0, y^1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \end{aligned} \right\},$$

は  $\Lambda^2 S^4$  内の  $SU(2)$  不変 *coassociative* 部分多様体であり、次の位相を持つ。

$$M_C \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(-1) \quad (C \neq 0), \quad S^4 \sqcup S^3 \times \mathbb{R} \quad (C = 0).$$

更に、すべての  $SU(2)$  不変部分多様体は上の形で与えられる。

これは定理 10 の一般化とも捉えられる。同様に  $\Lambda^2 S^4 - \{0\}$  - section  $\cong \mathbb{C}P^3 \times \mathbb{R}_{>0}$  上にも  $T^2$  不変 *coassociative cone* を構成でき、 $T^*S^2$  ( $S^2 \subset S^4$ : 全測地的)、 $S^4$  内の小円上の階数 1 のベクトル束等が得られる。

## 参考文献

- [1] R. L. Bryant and S. M. Salamon, On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy, *Duke Math. J.* 58 (1989), 829-850.
- [2] M. Fernández and A. Gray, Riemannian manifolds with structure group  $G_2$ , *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 32 (1982), 19-45.

- [3] S. Gukov, S.-T. Yau, and E. Zaslow, Duality and fibrations on  $G_2$ -manifolds, *Turkish J. Math.* 27 (2003), 61-97.
- [4] R. Harvey and H. B. Lawson, Calibrated geometries, *Acta Math.* 148 (1982), 47-157.
- [5] K. Hashimoto and T. Sakai, Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere, *Tohoku Math. J.*, 64 (2012), no. 1, 141-169.
- [6] W. Y. Hsiang and H. B. Lawson, Minimal Submanifolds of Low Cohomogeneity, *J. Differential Geom.* 5, (1971), 1-38.
- [7] M. Ionel, S. Karigiannis, and M. Min-Oo, Bundle constructions of calibrated submanifolds in  $\mathbb{R}^7$  and  $\mathbb{R}^8$ , *Math. Res. Lett.* 12 (2005), no. 4, 493-512.
- [8] M. Ionel and M. Min-Oo, Cohomogeneity one special Lagrangian 3-folds in the deformed and the resolved conifolds. *Illinois J. Math.* 52 (2008), no. 3, 839-865.
- [9] S. Karigiannis and M. Min-Oo, Calibrated subbundles in noncompact manifolds of special holonomy, *Ann. Global Anal. Geom.*, 28 (2005), 371-394.
- [10] D.D. Joyce, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [11] J. D. Lotay, Calibrated Submanifolds of  $\mathbb{R}^7$  and  $\mathbb{R}^8$  with Symmetries, *Q. J. Math.* 58, (2007), 53-70.