

乱流速度場の大スケール変動: 加算過程がもたらす対数正規性

気象研究所 毛利英明 (Hideaki Mouri)
Meteorological Research Institute

1. はじめに

正值をとる確率変数 z を考える. 対数 $\ln z$ が正規分布に従う場合に z 自身が従う分布が対数正規分布である [1]:

$$f(z) = \frac{1}{z\sqrt{2\pi\kappa_2}} \exp\left[-\frac{(\ln z - \kappa_1)^2}{2\kappa_2}\right]. \quad (1)$$

ここで $\kappa_1 = \langle \ln z \rangle$ と $\kappa_2 = \langle (\ln z - \langle \ln z \rangle)^2 \rangle$ は $\ln z$ の平均と分散. とくに $\kappa_2 \gg 1$ なら顕著な裾を右側に有する非対称な分布となる. 対数正規分布は乱流エネルギー散逸率の小スケール間欠性 [2] や大スケール変動 [3], 乱流エネルギーの大スケール変動 [4], 乱流中の光の透過率 [5] など様々な物理量において観測されてきた [6].

対数正規分布は乗算過程つまり確率変数の積 $\prod_{n=1}^N z_n$ で説明するのが通例である. 積の対数は確率変数の和 $\sum_{n=1}^N \ln z_n$. 各変数が同程度の分散を持ち相互の相関が強くない場合, 和が極限 $N \rightarrow \infty$ で正規分布となることを中心極限定理が保証している [1]. この極限で積 $\prod_{n=1}^N z_n$ は対数正規分布となる. 乗算過程の存在は系が何らかの非線形性を有することを意味している.

しかし確率変数の和が正規分布より先に対数正規分布に漸近する場合がある. つまり対数正規分布が非線形な系における乗算過程でなく線形な系における加算過程から生じる場合が存在するのである. 本稿では乱流エネルギーの大スケール変動を理解することを目的として, 加算過程がもたらす対数正規性について議論する.

2. 加算過程から生じる対数正規性の一般論

線形な系における加算過程から生じる対数正規性を議論するため, 正值をとる確率変数 $z_n > 0$ の平均 \bar{z}_N を考える:

$$\bar{z}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n. \quad (2a)$$

議論はモーメント $\langle z^m \rangle$ でなくキュムラント $\langle z^m \rangle_c$ を用いて行う. 具体的には $\langle z^2 \rangle_c = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle$, $\langle z^3 \rangle_c = \langle (z - \langle z \rangle)^3 \rangle$, $\langle z^4 \rangle_c = \langle (z - \langle z \rangle)^4 \rangle - 3\langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle^2$ など. 簡単のため全キュムラントが有限の値を持ち発散しないと仮定する. また各変数は相互に独立かつ同じ統計に従うと仮定する. これらの仮定から変数の平均 \bar{z}_N のキュムラントは

$$\langle \bar{z}_N^m \rangle_c = \frac{1}{N^m} \sum_{n=1}^N \langle z_n^m \rangle_c = \frac{\langle z^m \rangle_c}{N^{m-1}}. \quad (2b)$$

ここで $\langle z_n^m \rangle_c$ の各々を $\langle z^m \rangle_c$ で置換した. 歪度と尖度は

$$\frac{\langle \bar{z}_N^3 \rangle_c}{\langle \bar{z}_N^2 \rangle_c^{1.5}} = \frac{1}{N^{0.5}} \frac{\langle z^3 \rangle_c}{\langle z^2 \rangle_c^{1.5}} \quad \text{and} \quad \frac{\langle \bar{z}_N^4 \rangle_c}{\langle \bar{z}_N^2 \rangle_c^2} = \frac{1}{N} \frac{\langle z^4 \rangle_c}{\langle z^2 \rangle_c^2}. \quad (2c)$$

確率変数の総数 N が増えると変数の平均 \bar{z}_N の歪度と尖度は正規分布における値 0 に漸近する. 高次のキュムラントも同じ傾向を示す. よって極限 $N \rightarrow \infty$ で平均 \bar{z}_N は正規分布となる. これが中心極限定理である [1]. 分布の裾つまり分布の平均 $\langle \bar{z}_N \rangle$ から標準偏差 $\langle \bar{z}_N^2 \rangle_c^{0.5}$ の数倍以上離れた大偏差領域において中心極限定理すなわち正規性は成立しない. しかし観測から分布の形を完全には決められないから, 歪度と尖度が値 0 に充分近ければ正規分布と看做するのが通例である.

加算過程 (2a) は乗算過程として近似できる. 確率変数を $z_n = \langle z_n \rangle (1 + \varepsilon_n)$ と書き換えて $N \gg \langle \varepsilon_n^2 \rangle_c^{0.5} = \langle \varepsilon^2 \rangle_c^{0.5}$ を充たす N を考える. 各変数 z_n に定数を加えると $\langle \varepsilon_n^2 \rangle_c^{0.5}$ が小さくなるため N の範囲が広がることに注意 [第 4 章を参照]. 大偏差領域を無視して $\varepsilon_n \ll N$ の範囲だけ考えれば

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1 + \varepsilon_n = 1 + \frac{\varepsilon_1}{N} + \dots + \frac{\varepsilon_N}{N} \simeq \left(\prod_{n=1}^N 1 + \varepsilon_n \right)^{1/N}. \quad (3a)$$

よって確率変数 z_n の相加平均は相乗平均で近似できる:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n \simeq \left(\prod_{n=1}^N z_n \right)^{1/N}. \quad (3b)$$

定義式 (2a) と比較すれば乗算過程としての近似が得られる:

$$\bar{z}_N \simeq \left(\prod_{n=1}^N z_n \right)^{1/N} \quad \text{or} \quad \ln \bar{z}_N \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln z_n. \quad (4a)$$

大偏差領域を無視することで近似式 (4a) を厳密な式と看做して議論を続ける. 対数 $\ln \bar{z}_N$ のキュムラントは

$$\langle (\ln \bar{z}_N)^m \rangle_c = \frac{1}{N^m} \sum_{n=1}^N \langle (\ln z_n)^m \rangle_c = \frac{\langle (\ln z)^m \rangle_c}{N^{m-1}}. \quad (4b)$$

歪度と尖度は

$$\frac{\langle (\ln \bar{z}_N)^3 \rangle_c}{\langle (\ln \bar{z}_N)^2 \rangle_c^{1.5}} = \frac{1}{N^{0.5}} \frac{\langle (\ln z)^3 \rangle_c}{\langle (\ln z)^2 \rangle_c^{1.5}} \quad \text{and} \quad \frac{\langle (\ln \bar{z}_N)^4 \rangle_c}{\langle (\ln \bar{z}_N)^2 \rangle_c^2} = \frac{1}{N} \frac{\langle (\ln z)^4 \rangle_c}{\langle (\ln z)^2 \rangle_c^2}. \quad (4c)$$

総数 N が増えると $\ln \bar{z}_N$ の歪度と尖度は正規分布における値 0 に漸近する. 大偏差領域を無視すれば, 変数の平均 \bar{z}_N は正規分布に漸近すると同時に対数正規分布にも漸近するのである.

関係式 (2c) と (4c) を比べれば, 変数の平均 \bar{z}_N が正規分布より先に対数正規分布に漸近するため必要で実質的に十分な条件が得られる:

$$\left| \frac{\langle (\ln z)^3 \rangle_c}{\langle (\ln z)^2 \rangle_c^{1.5}} \right| < \left| \frac{\langle z^3 \rangle_c}{\langle z^2 \rangle_c^{1.5}} \right| \quad \text{and} \quad \left| \frac{\langle (\ln z)^4 \rangle_c}{\langle (\ln z)^2 \rangle_c^2} \right| < \left| \frac{\langle z^4 \rangle_c}{\langle z^2 \rangle_c^2} \right|. \quad (5)$$

これらの条件は顕著な右裾を有する非対称分布の多くで成立する筈だから, 様々な加算過程について対数正規分布が期待できる.

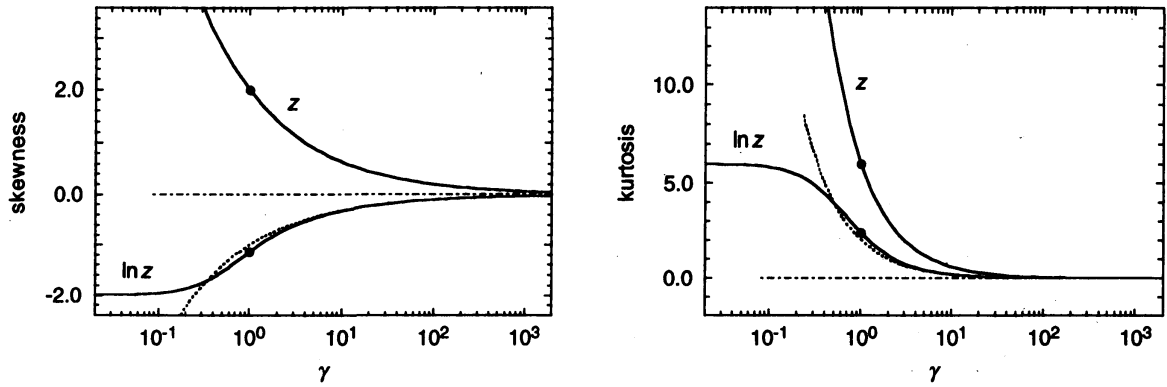


図 1: ガンマ分布 [式 6] における z と $\ln z$ の歪度と尖度. 黒丸は $\gamma = 1$ での値. 点線は漸近式 (8c). 一点鎖線は正規分布での値 0.

3. 加算過程から生じる対数正規性の解析的な例: ガンマ分布

加算過程においても対数正規分布が生じることの解析的な例として, ガンマ分布 [1] を取り上げる:

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} z^{\gamma-1} \exp(-z) \quad \text{at } z > 0. \quad (6)$$

ここで Γ はガンマ関数. パラメータ $\gamma > 0$ の値が小さいほど分布関数の右裾が顕著になる. 確率変数 z のキュムラントは

$$\langle z^m \rangle_c = \gamma(m-1)!. \quad (7a)$$

歪度と尖度は

$$\frac{\langle z^3 \rangle_c}{\langle z^2 \rangle_c^{1.5}} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{and} \quad \frac{\langle z^4 \rangle_c}{\langle z^2 \rangle_c^2} = \frac{6}{\gamma}. \quad (7b)$$

ガンマ分布では対数 $\ln z$ のキュムラントが定義 $\langle (\ln z)^m \rangle_c = d^m \ln \langle \exp(i\xi \ln z) \rangle / d(i\xi)^m |_{\xi=0}$ から解析的に得られる [1, 7],

$$\langle (\ln z)^m \rangle_c = \frac{d^m}{d\gamma^m} \ln \Gamma(\gamma). \quad (8a)$$

右辺は多ガンマ関数. 極限 $\gamma \rightarrow \infty$ での漸近式 [8] を用いると

$$\langle (\ln z)^m \rangle_c \rightarrow (-1)^m \frac{(m-2)!}{\gamma^{m-1}} \quad \text{for } m \geq 2. \quad (8b)$$

よって対数 $\ln z$ の歪度と尖度は

$$\frac{\langle (\ln z)^3 \rangle_c}{\langle (\ln z)^2 \rangle_c^{1.5}} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{and} \quad \frac{\langle (\ln z)^4 \rangle_c}{\langle (\ln z)^2 \rangle_c^2} \rightarrow \frac{2}{\gamma}. \quad (8c)$$

ガンマ分布は無限分解可能である [1]. つまり相互に独立な確率変数 z_n が $\gamma = \gamma_*$ のガンマ分布に従うなら変数の和 $\sum_{n=1}^N z_n$ は $\gamma = N\gamma_*$ のガンマ分布に従う. 変数の平均 $\bar{z}_N = \sum_{n=1}^N z_n / N$ の分布も同じ形を有する. 関係式 (7) と (8) を比べれば明らかのように, 確率変数の総数 N が増えると平

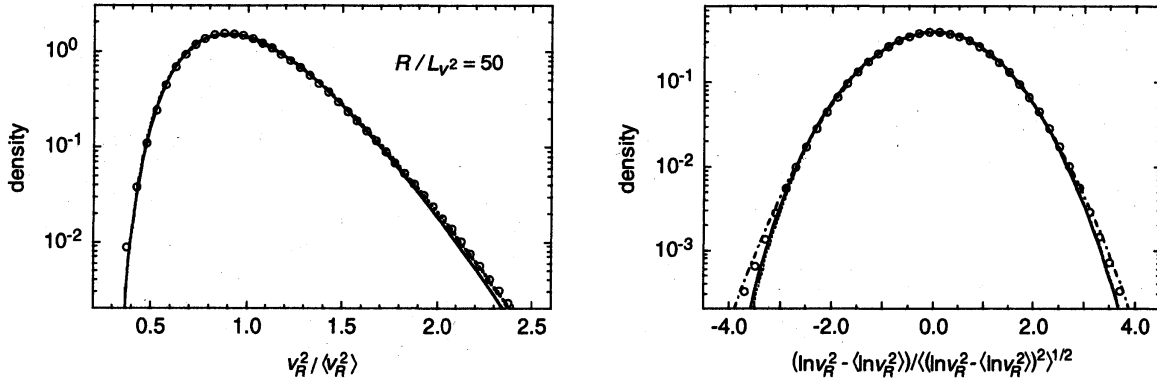


図 2: 理想化した乱流場 [式 (9)] で $R = 50L_{v^2}$ における $v_R^2 / \langle v_R^2 \rangle$ と $(\ln v_R^2 - \langle \ln v_R^2 \rangle) / ((\ln v_R^2 - \langle \ln v_R^2 \rangle)^2)^{0.5}$ の確率密度分布. 実線と点線は理論曲線 [第 4 章と補章を参照]. 一点鎖線は正規分布での関係.

均 \bar{z}_N は正規分布より先に対数正規分布に漸近する. すなわち $\langle (\ln \bar{z}_N)^m \rangle_c / \langle (\ln \bar{z}_N)^2 \rangle_c^{m/2}$ は $m \geq 3$ で $\langle \bar{z}_N^m \rangle_c / \langle \bar{z}_N^2 \rangle_c^{m/2}$ より先に正規分布での値 0 に漸近する. とくに $\ln \bar{z}_N$ の歪度は \bar{z}_N の歪度より単位 N で 4 倍早く値 0 に漸近し, $\ln \bar{z}_N$ の尖度は \bar{z}_N の尖度より 3 倍早く値 0 に漸近する. ここで γ_* の値と無関係に条件式 (5) が成立することにも注意 [図 1 参照].

ガンマ分布は様々な物理過程に対応している. とくに重要なのは指数分布に対応する $\gamma_* = 1$ の場合である [図 1 の黒丸]. 例として統計熱力学における正準集合のエネルギー分布 [9] があり, 補章の議論で用いる. また $\gamma_* = 1/2$ は正規分布に従う変数の 2 乗の分布に対応する. 従来から知られている対数正規分布の中には加算過程から生じたガンマ分布が存在すると期待される.

4. 乱流エネルギーの大スケール変動への応用例

十分に発達した乱流の 1 次元測線 x 上における変動速度の成分 $v(x)$ に伴う運動エネルギー $v^2(x)$ を大スケールで粗視化すると対数正規分布が得られる [4]. この分布は加算過程で説明できる. 対数正規性に議論を集中するため, 乱流場を理想化し, 各点 x における速度 v が平均 0 の正規分布に従う場合を考える. こうした場の統計量は v の 2 点相関だけで決まる. 相関関数として指数型を採用すると

$$\langle v(x+r)v(x) \rangle \propto \exp\left(-\frac{r}{L_v}\right). \quad (9a)$$

運動エネルギー v^2 の 2 点相関は

$$\langle [v^2(x+r) - \langle v^2 \rangle][v^2(x) - \langle v^2 \rangle] \rangle \propto \exp\left(-\frac{r}{L_{v^2}}\right) \quad \text{with} \quad L_{v^2} = \frac{L_v}{2}. \quad (9b)$$

座標 x に代えて時刻 t を考えると場は Brown 運動や Johnson 雑音の模型である Ornstein-Uhlenbeck 過程に対応する [10]. 同過程のエネルギーを大スケールで粗視化すれば対数正規分布が得られることは既に報告がある [11].

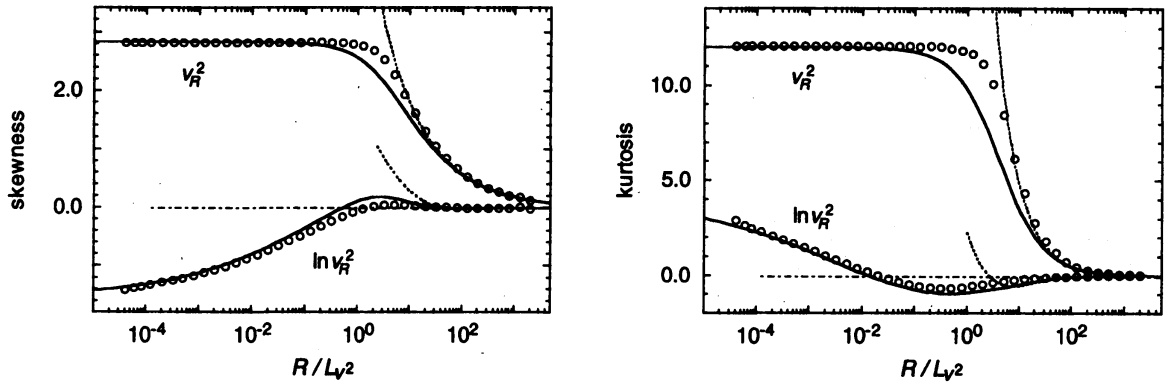


図 3: 理想化した乱流場 [式 (9)] における \bar{v}_R^2 と $\ln \bar{v}_R^2$ の歪度と尖度. 実線と点線は理論曲線 [第 4 章と補章を参照]. 一点鎖線は正規分布での値 0.

粗視化のため測線 x 上のデータを長さ R の区間に分割し, 各区間において運動エネルギー v^2 を平均する [4, 12]:

$$\bar{v}_R^2(x_*) = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{+R/2} v^2(x_* + x) dx. \quad (10)$$

区間の中心座標を x_* とした. 区間長 R が相関長 L_{v^2} に比べて大きい場合, v^2 の相関が無視できるから, 各区間は独立な部分区間に分解できる線形な系と看做せる [12]. 部分区間の各々において v^2 は一定値と考えてよい. ここで v^2 の分布は $\gamma = 1/2$ のガンマ分布となるから条件式 (5) を充たす [第 3 章を参照]. よって \bar{v}_R^2 は対数正規分布に従うと期待できる.

図 2 は $R = 50L_{v^2}$ における \bar{v}_R^2 と $\ln \bar{v}_R^2$ の分布である [白丸]. 対数 $\ln \bar{v}_R^2$ の分布は殆ど対称で正規分布と良く一致する [一点鎖線]. 非常に良い近似で \bar{v}_R^2 は対数正規分布に従うのである [11].

図 3 は \bar{v}_R^2 と $\ln \bar{v}_R^2$ の歪度と尖度である [白丸]. 区間長 R が相関長 L_{v^2} に比べて大きくなると歪度も尖度も正規分布における値 0 に近づく [一点鎖線]. この傾向は $\ln \bar{v}_R^2$ において顕著であり, \bar{v}_R^2 が正規分布より先に対数正規分布に漸近することが解る.

こうした \bar{v}_R^2 と $\ln \bar{v}_R^2$ の振舞は補章で述べる統計熱力学形式で再現できる [図 2 と図 3 の実線]. この理論形式は $R \gg L_{v^2}$ における \bar{v}_R^2 を加算過程つまり長さ $4L_{v^2}$ の部分区間についての平均で説明する. 長さ R の区間あたりの部分区間の総数は

$$N = \frac{R}{4L_{v^2}}. \quad (11a)$$

式 (6) のガンマ分布に従う確率変数 z として

$$z = \frac{N+1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\bar{v}_R^2}{\langle \bar{v}_R^2 \rangle} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \frac{N}{N+1/2} \right) > 0 \quad \text{with} \quad \gamma = \frac{(N+1/\sqrt{2})^2}{2N+1}. \quad (11b)$$

観測量 $\bar{v}_R^2/\langle \bar{v}_R^2 \rangle$ の分布は変数 z の分布と同じ形だが, その対数 $\ln(\bar{v}_R^2/\langle \bar{v}_R^2 \rangle)$ の分布は $\ln z$ の分布と同じ形でない. 定数 $(\sqrt{2}-1)/\sqrt{2} \times N/(N+1/2)$ を加えたため \bar{v}_R^2 について加算過程を乗算過程と看做す近似の精度が高まり, 対数正規性が強まるのである [第 2 章を参照].

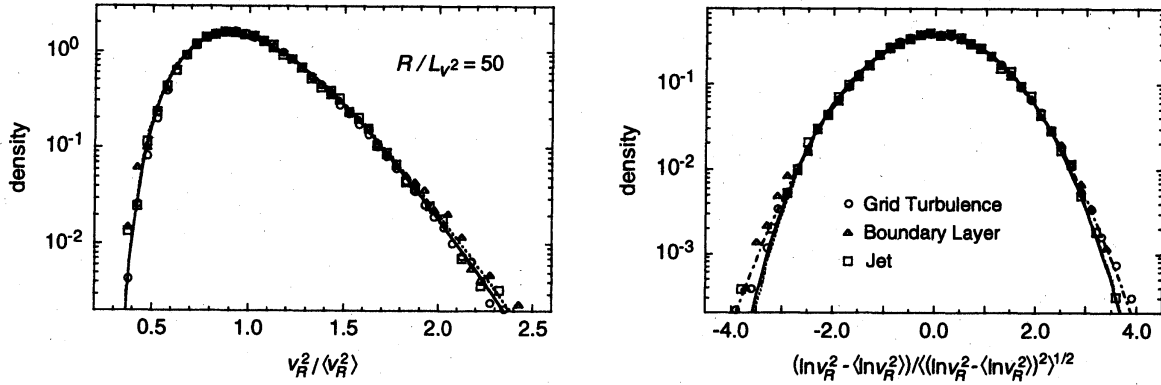


図 4: 気象研究所大型風洞装置を用いて生成した格子乱流, 境界層乱流, 噴流 [12] での $R = 50L_{v^2}$ における $\bar{v}_R^2 / \langle \bar{v}_R^2 \rangle$ と $(\ln \bar{v}_R^2 - \langle \ln \bar{v}_R^2 \rangle) / (\langle \ln \bar{v}_R^2 - \langle \ln \bar{v}_R^2 \rangle \rangle^2)^{0.5}$ の確率密度分布. 実線と点線は理論曲線 [第 4 章と補章を参照]. 一点鎖線は正規分布での関係.

測線上の各点で条件式 (5) が成立し, 相関が大スケールで充分早く減衰するなら, 正值をとる確率変数の任意の場合において粗視化は対数正規分布をもたらしと期待できる. 区間長 R の規格化に用いる相関長 L_{v^2} の一般的な定義は [12]

$$L_{v^2} = \frac{\int_0^\infty \langle [v^2(x+r) - \langle v^2 \rangle][v^2(x) - \langle v^2 \rangle] \rangle dr}{2\langle v^2 \rangle^2}. \quad (12)$$

図 4 に示すように多様な乱流で $R \gg L_{v^2}$ において \bar{v}_R^2 は対数正規分布に従っており [4], 統計熱力学形式で良く再現される [12].

5. まとめに代えて

中心極限定理は確率変数の和 $\sum_{n=1}^N z_n$ が変数の総数 N が増えると正規分布に漸近することを保証する [1]. しかし各変数 z_n が顕著な右裾を有する非対称な分布に従って条件式 (5) を充たす場合, 和は正規分布より先に対数正規分布に漸近する. 対数正規分布は非線形な系における乗算過程すなわち確率変数の積で説明されてきたが, 実際には線形な系における加算過程すなわち確率変数の和からも生じる訳である. 解析的な例として示した式 (6) のガンマ分布は乱流エネルギーの大スケール変動における対数正規性 [4] を良く再現する.

顕著な右裾を有する分布に従う確率変数の和から対数正規性が生じるのと同様に, 顕著な左裾を有する分布に従う確率変数の積からは正規性が生じる. つまり正規分布は線形な加算過程だけから生じる訳ではない.

正規分布あるいは対数正規分布を見出したとしても, 線形な系における加算過程に由来するのか非線形な系における乗算過程に由来するのか判断できないのである. 生成過程を特定するには, 中心極限定理が成立しない大偏差領域まで分布の形を調べるか, あるいは系が線形であるのか非線形であるのかを調べる必要がある.

補章: 乱流エネルギーの大スケール変動に関する統計熱力学形式

理論式 (11) の導出に用いた統計熱力学形式は以前に提案した形式 [12] の拡張である. 乱流は定常かつ測線 x に沿って一様とする. 区間長 R で粗視化した運動エネルギー \bar{v}_R^2 の分散は [13]

$$\langle (\bar{v}_R^2 - \langle \bar{v}_R^2 \rangle)^2 \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R (R-r) \langle [v^2(x+r) - \langle v^2 \rangle][v^2(x) - \langle v^2 \rangle] \rangle dr. \quad (13a)$$

相関が $r \gg L_{v^2}$ で無視できるなら定義式 (12) を用いて

$$\langle (\bar{v}_R^2 - \langle \bar{v}_R^2 \rangle)^2 \rangle \rightarrow \frac{4L_{v^2}}{R} \langle v^2 \rangle^2 \quad \text{for } R \rightarrow +\infty. \quad (13b)$$

また各点 x において速度 v が正規分布に従うなら

$$\langle (\bar{v}_R^2 - \langle \bar{v}_R^2 \rangle)^2 \rangle \rightarrow 2\langle v^2 \rangle^2 \quad \text{for } R \rightarrow 0. \quad (13c)$$

よって任意の R において近似的に

$$\langle (\bar{v}_R^2 - \langle \bar{v}_R^2 \rangle)^2 \rangle = \frac{4L_{v^2}}{R + 2L_{v^2}} \langle v^2 \rangle^2. \quad (13d)$$

式 (13d) に対応する統計熱力学の関係式として, 温度 T の正準集合についてエネルギー E の熱的揺らぎの分散を定める式が考えられる [9]:

$$\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = CT^2 \quad \text{with } C = \frac{d\langle E \rangle}{dT}. \quad (14)$$

関係式 (13d) と (14) の比較から, 式 (11a) で定義した部分区間の数 $N = R/4L_{v^2}$ を用いて対応関係は

$$E = N \left[\bar{v}_R^2 - (1 - \sqrt{\zeta}) \langle v^2 \rangle \right] + \frac{\bar{v}_R^2}{2} \quad \text{and} \quad T = \frac{2N + 1}{2\sqrt{\zeta}N + 1} \langle v^2 \rangle. \quad (15a)$$

よって

$$\langle E \rangle = CT \quad \text{with } C = \frac{(\sqrt{2\zeta}N + 1/\sqrt{2})^2}{2N + 1}. \quad (15b)$$

ここで $\zeta > 0$ は定数. 対応関係 (15a) の右辺第 1 項が加算過程である. 熱力学的極限 $N \gg 1$ において第 1 項は第 2 項に卓越し, 熱力学の諸関係式を再現する [12].

熱容量 C の式 (15b) から, 統計熱力学における一連の関係式を経由して [9], 正準集合におけるエネルギー分布 $f_N(E)$ がガンマ分布として得られる:

$$f_N(E) = \frac{E^{C-1} \exp(-E/T)}{\Gamma(C)T^C}. \quad (16a)$$

とくに $N \gg 1$ の場合は

$$f_N(E) = \frac{E^{\zeta N - 1} \exp(-E/T)}{\Gamma(\zeta N)T^{\zeta N}}. \quad (16b)$$

定数 ζ の値を決めるため $N \gg 1$ における $f_N(E)$ の普遍性を仮定する. 隣接する部分区間の間だけ実効的な相互作用が存在するのだから, エネルギー分布 $f_N(E)$ は部分区間長 $4L_{v^2}$ から区間長

R まで数多くの段階から成るエネルギー輸送で決まる。よって $N = R/4L_{v^2} \gg 1$ なら $f_N(E)$ は部分区間の詳細に依らない。各部分区間のエネルギーが相互に独立かつ正規分布に従う確率変数の2乗に対応する場合 $f_N(E)$ は $\gamma = N/2$ のガンマ分布となり [第3章を参照], 関係式 (16b) との比較から

$$\zeta = \frac{1}{2}. \quad (17)$$

他の一般的な場合も $N \gg 1$ における普遍性から ζ の値は同じである。関係式 (15a), (16a), (17) を用いて式 (11) が得られる。

最後に理論式 (16a) は $N = R/4L_{v^2} \simeq 1$ のスケール領域で精度が低いことを注意しておく [図3参照]. 式 (13d) における近似の精度を上げることで理論式 (16a) の精度を上げることは可能だが, 結果は v^2 の2点相関の函数形に依るから普遍的でない。同スケール領域の一部では $N \gg 1$ に対する理論式 (16b) の方が \bar{v}_R^2 の振舞を良く再現している [図2-4の点線].

参考文献

- [1] M. Kendall and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, 4th ed. (Griffin, 1977), Vol. 1.
- [2] A. N. Kolmogorov, *J. Fluid Mech.* **13**, 82 (1962).
- [3] A. M. Oboukhov, *J. Fluid Mech.* **13**, 77 (1962).
- [4] H. Mouri, A. Hori, and M. Takaoka, *Phys. Fluids* **21**, 065107 (2009).
- [5] V. I. Tatarskii, *The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation* (U. S. Department of Commerce, 1971).
- [6] 國仲寛人, 小林奈央樹, 松下貢, *物理学会誌* **66**, 658 (2011).
- [7] N. L. Johnson, *Biometrika* **36**, 149 (1949).
- [8] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1965).
- [9] 久保亮五, 市村浩, 碓井恒丸, 橋爪夏樹, *大学演習 熱学・統計力学* (裳華房, 1961).
- [10] D. T. Gillespie, *Am. J. Phys.* **64**, 225 (1996).
- [11] T. Matsumoto and M. Takaoka, *Phys. Rev. E* **87**, 013008 (2013).
- [12] H. Mouri, A. Hori, Y. Kawashima, and K. Hashimoto, *Phys. Fluids* **23**, 125110 (2011).
- [13] S. O. Rice, in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, edited by N. Wax (Dover, 1954), p. 133.