数理解析研究所講究録
第 1884 巻 2014 年 1-6

point-countable baseをもつ空間における extentのsup=max問題

神奈川大学 工学部　平田 康史 (Yasushi Hirata)
Faculty of Engineering, Kanagawa University

概 要

G_δ-diagonal をもつ空間の Lindelöf degree と, point-countable base をもつ空間の extent に関する sup=max 問題について論じる.

空間はすべて T_1 空間とする.

1 sup=max 問題

空間 X の **spread** $s(X)$, **extent** $e(X)$, および, **Lindelöf degree** $L(X)$ は次のように定義される. [6]

$$s(X) = \sup\{|D| : D \text{ は } X \text{ の疎な部分集合 }\} + \omega,$$

$$e(X) = \sup\{|D| : D \text{ は } X \text{ の疎な閉部分集合 }\} + \omega,$$

$$L(X) = \min\{\kappa : X \text{ の任意の開被覆は濃度 } \kappa \text{ 以下の部分被覆をもつ }\} + \omega.$$

一般に, $e(X) \leq L(X), s(X) \leq |X|$ となる. また, 空間 X の部分集合族 $\mathcal{U}$ の Lindelöf degree $L(\mathcal{U})$ は次のように定義される.

$$L(\mathcal{U}) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \subset \mathcal{U},\ \bigcup\mathcal{V} = \bigcup\mathcal{U}\} + \omega.$$

そうすると, $L(X) = \sup\{L(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ は } X \text{ の開被覆 }\}$ が成り立つ. $s(X)$, $e(X)$, $L(X)$ に関する以下の問いは sup=max 問題とよばれる.

(1) $\kappa = s(X)$ について, X は濃度 κ の疎な部分集合をもつか?

(2) $\kappa = e(X)$ について, X は濃度 κ の疎な閉部分集合をもつか?

(3) $\kappa = L(X)$ について, X は $L(\mathcal{U}) = \kappa$ となるような開被覆 $\mathcal{U}$ をもつか?

κ が successor cardinal の場合は, sup=max 条件は常に成り立つ.

$s(X)$ の sup=max 問題については, 次のことが知られている.

定理 1 ([3, 4]). X は空間で $\kappa = s(X)$ は特異基数とする.

(1) X が *Hausdorff* 空間で κ が強極限基数ならば, X は濃度 κ の疎な部分集合をもつ.

(2) X が正則空間で $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ ならば, X は濃度 κ の疎な部分集合をもつ.

定理 2 ([9]). $\aleph_{\omega_1} \leq 2^\omega$, かつ, 第一可算な *Luzin* 空間が存在すると仮定する. そのとき, 0 次元の完全正則空間 X で, $s(X) = |X| = \aleph_{\omega_1}$ だが, 濃度 $\aleph_{\omega_1}$ の疎な部分集合をもたないようなものが存在する.

距離付け可能空間 M の $e(M)$ や $L(M)$ に関する sup=max 問題については, cofinality が非可算か可算かで次のようになる.

命題 1 (folklore). M は距離付け可能空間とする.

(1) $e(M) = L(M) = s(M) = w(M)$ が成り立つ.

(2) $\kappa = e(M)$ で $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ ならば, M は濃度 κ の疎な閉部分集合をもつ.

例 1 (folklore, [5]). κ は極限基数とする. $\kappa + 1$ の部分空間として,

$$X_\kappa = \{\alpha + 1 : \alpha \in \kappa\} \cup \{\kappa\}$$

とせよ. X_κ は遺伝的にパラコンパクトで,

- $e(X_\kappa) = L(X_\kappa) = w(X_\kappa) = s(X_\kappa) = |X_\kappa| = \kappa$,
- X_κ は濃度 κ の疎な閉部分集合をもたない,
- $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ の場合は, X_κ は距離付け可能である.

generalized metric space X の $\kappa = e(X)$ か $\kappa = L(X)$ について, $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ であるとき, sup=max 問題はどうなるかを調べたい. (generalized metric space については [2] を参照されたい.) 尚, そのような状況下で, ある弱い covering property を仮定すれば, $e(X)$ と $L(X)$ の間で sup=max 問題に差異はない.

事実 1 ([1, 5]). X は *submetalindelöf* な空間とする.

(1) $e(X) = L(X)$ が成り立つ.

(2) $e(X) = L(X) = \kappa$ で $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ ならば, X が濃度 κ の疎な閉部分集合をもつことと, X が $L(\mathcal{U}) = \kappa$ となる開被覆 $\mathcal{U}$ をもつこととは同値である.

空間 X が **metalindelöf** であるとは, 任意の開被覆が point-countable な開細分をもつことである. X が **submetalindelöf** であるとは, 任意の開被覆に対して, その開細分の列 $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ があって, 各 $x \in X$ について, その点において $\mathcal{V}_{n_x}$ が点有限になるような $n_x \in \omega$ が存在することである.

$$\text{paracompact} \rightarrow \text{metacompact} \rightarrow \text{metalindelöf} \rightarrow \text{submetalindelöf}$$

generalized metric space X の $e(X)$, $L(X)$ の sup=max 問題については, すでに次のことがわかっている.

定理 3 ([5]). κ は基数で $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ とする.

(1) X が p-空間で $L(X) = \kappa$ ならば, X は $L(\mathcal{U}) = \kappa$ となる開被覆 $\mathcal{U}$ をもつ.

(2) X が Σ-空間で $e(X) = \kappa$ ならば, X は濃度 κ の疎な閉部分集合をもつ.

(3) X が *semi-stratifiable* な空間で $e(X) = \kappa$, かつ, 次のどれかしらの条件を満たせば, X は濃度 κ の疎な閉部分集合をもつ.

(3-1) X は *metalindelöf.*

(3-2) X は *collectionwise Hausdorff.*

(3-3) X は正規で $\{2^\tau : \tau は基数で \tau < \kappa\}$ が最大元をもたない.

2 G_δ-diagonal をもつ空間の Lindelöf degree

空間 X が G_δ**-diagonal** をもつとは, 対角線集合 $\Delta = \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ が X^2 において G_δ-集合になってることであり, これは, X の開被覆の列 $\{\mathcal{G}_n : n \in \omega\}$ で, 各 $x \in X$ について $\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{St}(x, \mathcal{G}_n) = \{x\}$ となるものが存在することと同値である. ここで, $\mathrm{St}(x, \mathcal{G}_n) = \bigcup\{G \in \mathcal{G}_n : x \in G\}$ である.

$$\text{metrizable} \rightarrow \text{semi-stratifiable} \rightarrow G_\delta\text{-diagonal をもつ}$$

G_δ-diagonal をもつ空間の $L(X)$ の sup=max 問題について, 次の結果を得た.

定理 4. κ は極限基数で $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ とする.

(1) 任意の基数 $\tau < \kappa$ に対して $\tau^\omega < \kappa$ である場合: 空間 X が G_δ*-diagonal* をもち, $L(X) = \kappa$ ならば, X は $L(\mathcal{U}) = \kappa$ となる開被覆 $\mathcal{U}$ をもつ.

(2) ある基数 $\tau < \mathrm{cf}(\kappa)$ について $\kappa \leq \tau^\omega$ である場合: G_δ*-diagonal* をもつ *Hausdorff* 空間 X で, $L(X) = \kappa$ だが, $L(\mathcal{U}) = \kappa$ となる開被覆 $\mathcal{U}$ をもたないものが存在する.

(3) ある基数 $\tau < \mathrm{cf}(\kappa)$ について $\kappa \leq \tau^\omega$ であり, また, $\mathrm{cf}(\kappa)$-*Suslin line* が存在する場合: G_δ-*diagonal* をもつ 0 次元完全正則空間 X で, $L(X) = \kappa$ だが, $L(\mathcal{U}) = \kappa$ となる開被覆 $\mathcal{U}$ をもたないものが存在する.

(κ が強極限基数の場合の (1) は Yajima の指摘によるものである [10]).

GCH の下では, G_δ-diagonal をもつ空間 X の $e(X) = \kappa$ の sup=max 条件は, $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ ならば常に成り立つことが (1) よりわかる. GCH が成り立たないモデルにおける特異基数 κ についてどうなるだろうか?

問題 1. κ は極限順序数で, $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ とする. また,

- 任意の基数 $\tau < \mathrm{cf}(\kappa)$ に対して $\tau^\omega < \kappa$ であるが,
- $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \tau_0 < \kappa$ の範囲には $\kappa \leq \tau_0{}^\omega$ となる基数 τ_0 が存在するものとする.

このとき, G_δ-*diagonal* をもつ空間 X で, $L(X) = \kappa$ だが, $L(\mathcal{U}) = \kappa$ となる開被覆 $\mathcal{U}$ をもたないようなものは存在するか?

第一可算な Luzin 空間が存在すれば, Suslin line が存在することが知られている. Roitman の作った定理 2 の空間をもとにして, $\kappa = \aleph_{\omega_1}$ の場合の定理 4 (3) の例を作ることができる. 他の基数の場合もほぼ同様の方法で作ることができる.

3 point-countable base をもつ空間の extent

Nagata-Smirnov の定理より,

$$\text{距離付け可能} = \text{正則} + \sigma\text{-局所有限な base をもつ}$$

$$\to \text{point-countable base をもつ}$$

$$\to \text{metalindelöf} + \text{第一可算}.$$

前述の例 1 からわかるように, どんな極限基数 κ に対しても, $e(X_\kappa) = \kappa$ となるパラコンパクト Hausdorff 空間 X_κ で, $e(X_\kappa)$ の sup=max 条件が成り立たないものが存在する. また, 空間 X が第一可算であることも, $e(X)$ の sup=max 条件を導くには不十分である.

例 2. κ は極限基数で $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ とする. κ の部分空間として,

$$X'_\kappa = \{\alpha + 1 : \alpha \in \kappa\} \cup \{\theta \in \kappa : \theta \text{は基数}, \ \mathrm{cf}(\theta) = \omega\}$$

とせよ. X'_κ は第一可算な空間で $e(X'_\kappa) = |X'_\kappa| = \kappa$ であるが, 濃度 κ の疎な閉部分集合をもたない.

問題 2. κ は極限基数で $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ とする. *metalindelöf,* かつ, 第一可算な空間 X で, $e(X) = \kappa$ だが, 濃度 κ の疎な閉部分集合をもたないものは存在するか?

尚, 順序数の部分空間が metalindelöf, かつ, 第一可算ならば, 距離付け可能なので, 上の問題の例にはなりえない.

空間が point-countble base を持つ空間については, 極限順序数 κ であっても, $e(X) = \kappa$ で sup=max 条件が成り立たないものが常に存在するわけではない. Δ-system Lemma [8] を使って, 次の定理が得られる.

定理 5. X は *point-countable base* をもつ空間で, $\kappa = e(X)$ は次の条件を満たす基数とする.

(i) 任意の基数 $\tau < \kappa$ について, $\tau^\omega < \kappa$.

(ii) 任意の基数 $\tau < \mathrm{cf}(\kappa)$ について, $\tau^\omega < \mathrm{cf}(\kappa)$.

そうすると, X は濃度 κ の疎な閉部分集合をもつ.

この定理の仮定 (ii) に $\tau = 2$ を適用すると, $\omega_1 \leq 2^\omega < \mathrm{cf}(\kappa)$ となるので, $e(X) = \aleph_{\omega_1}$ の場合の sup=max 問題についての情報はこの定理からは得られない.

問題 3. *point-countable base* をもつ空間で, $e(X) = \aleph_{\omega_1}$ だが, 濃度 $\aleph_{\omega_1}$ の疎な閉部分集合をもたないような空間 X の存在は, ZFC と無矛盾か?

$\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ となる基数 κ に対して, $e(X) = \kappa$ となるような point-countable base をもつ空間 X で, $e(X)$ の sup=max 条件が成り立たないような例を筆者は知らない.

問題 4. κ は極限基数で, $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ とする. 定理 5 の仮定 *(i)* と *(ii)* は除去できるか?

参考文献

[1] C. E. Aull, *A generalization of a theorem of Aquaro*, Bull. Austral. Math. Soc. **9** (1973), 105–108.

[2] G. Gruenhage, *Generalized metric spaces*, Handbook of Set-theoretic Topology (K. Kunen and J.E. Vaughan, eds), North-Holland, Amsterdam 423–501 (1984).

[3] A. Hajnal and I. Juhász, *Discrete subspaces of topological spaces II*, Indag. Math. **31** (1969), 18–30.

[4] A. Hajnal and I. Juhász, *Some remarks on a property of topological cardinal functions*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar., **20** (1969), 25–37.

[5] Y. Hirata and Y. Yajima, *The sup = max problem for the extent of generalized metric spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **54**, 2, The special issue devoted to Čech. (2013), 245–257.

[6] R. E. Hodel, *Cardinal functions I*, Handbook of Set-theoretic Topology (K. Kunen and J.E. Vaughan, eds), North-Holland, Amsterdam 1–61 (1984).

[7] K. Kunen, *Luzin spaces*, Topology Proc., **1** (1976), 191–199.

[8] K. Kunen, *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, Amsterdam (1980).

[9] J. Roitman, *The spread of regular spaces*, General Topology and Appl. **8** (1978), 85–91.

[10] Y. Yajima, private communication.