数理解析研究所講究録
第 1884 巻 2014 年 13-17

C_0 coarse structures on uniform spaces

東京大学 大学院数理科学研究科　嶺幸太郎
Kotaro Mine
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

千葉工業大学 工学部　山下 温
Atsushi Yamashita
Faculty of Engineering, Chiba Institute of Technology

島根大学 総合理工学研究科　山内貴光
Takamitsu Yamauchi
Faculty of Science and Engineering, Shimane University

本稿において, 空間はすべて完全正則かつハウスドルフであるとする.

Weil [5] によって導入された一様構造 (uniformity) は, 距離の持つ "近さを測るための尺度" を一般化した概念であるといえる. 一方, 幾何学的群論や coarse 幾何学では, 離れ方が有限である対象は同じとみなすため, 距離のもつ "遠さを測るための尺度" が重要となる. Higson, Pedersen, Roe [2] は, C^* 環の K 群の計算を統一的に行うため, 距離のもつ "遠さを測るための尺度" の一般化として, 粗構造 (coarse strucure) を導入した.

本稿では, よく知られた 3 つの粗構造 (有界粗構造, 位相的粗構造, C_0 粗構造) の関係について述べる. その中で, Wright [6] によって導入された距離空間上の C_0 粗構造の概念を一様空間上へ自然に拡張することにより, 全ての位相的粗構造が, (ある一様構造から定まる) C_0 粗構造として表せることを報告する.

1. Coarse structures

集合 X に対して, 直積集合 $X \times X$ における対角集合 $\{(x,x) : x \in X\}$ を Δ_X で表し, $E, F \subset X \times X$ に対して

$$E^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in E\},$$
$$E \circ F = \{(x,y) : \exists z \in X \text{ s.t. } (x,z) \in E \text{ and } (z,y) \in F\}$$

とする.

定義 1. 集合 X の直積 $X \times X$ の部分集合族 $\mathcal{E}$ が次の 5 つの条件を満たすとき, $\mathcal{E}$ を X 上の**粗構造 (coarse structure)** といい, $(X, \mathcal{E})$ を**粗空間 (coarse space)** という.

(1) $\Delta_X \in \mathcal{E}$,
(2) $E \in \mathcal{E}$, $F \subset E$ ならば $F \in \mathcal{E}$,
(3) $E \in \mathcal{E}$ ならば $E^{-1} \in \mathcal{E}$,

(4) $E, F \in \mathcal{E}$ ならば $E \circ F \in \mathcal{E}$,
(5) $E, F \in \mathcal{E}$ ならば $E \cup F \in \mathcal{E}$.

注意 2. 上の粗構造の定義は, 近域 (entourage) を用いた一様構造の定義と似ている. 実際, 集合 X の直積 $X \times X$ の部分集合からなる空でない族 $\mathcal{U}$ が次の 5 つのを満たすとき, $\mathcal{U}$ を X 上の**一様構造 (uniformity)** といい, $(X, \mathcal{U})$ を**一様空間 (uniform space)** という.

(1) 任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して $\Delta_X \subset U$,
(2) $U \in \mathcal{U}$, $U \subset V \subset X \times X$ ならば $V \in \mathcal{U}$,
(3) $U \in \mathcal{U}$ ならば $U^{-1} \in \mathcal{U}$,
(4) 任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して, $V \circ V \subset U$ をみたす $V \in \mathcal{U}$ が存在する,
(5) $U, V \in \mathcal{U}$ ならば $U \cap V \in \mathcal{U}$.

序文で述べた 3 つの粗構造は, 次で定められる.

例 3 ([2]). 距離空間 (X, d) に対して, $X \times X$ の部分集合族

$$\mathcal{E}_d = \{E \subset X \times X : \sup\{d(x, y) : (x, y) \in E\} < \infty\}$$

は X 上の粗構造である. $\mathcal{E}_d$ を距離 d によって定まる**有界粗構造 (bounded coarse structure)** という.

例 4 ([2]). 局所コンパクト空間 X とそのコンパクト化 $\overline{X}$ に対して, $X \times X$ の部分集合族

$$\mathcal{E}_{\overline{X}} = \{E \subset X \times X : \overline{E}^{\overline{X} \times \overline{X}} \setminus X \times X \subset \Delta_{\overline{X}}\}$$

は X 上の粗構造である. $\mathcal{E}_{\overline{X}}$ をコンパクト化 $\overline{X}$ によって定まる**位相的粗構造 (topological coarse structure)** または**連続制御粗構造 (continuously controlled coarse structure)** という.

例 5 ([6]). 局所コンパクトな距離空間 (X, d) に対して, 次の条件を満たす $E \subset X \times X$ 全体の集合を $\mathcal{E}_d^0$ で表す.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次を満たすコンパクト集合 $K \subset X$ がある:
任意の $(x, y) \in E \setminus (K \times K)$ に対して $d(x, y) < \varepsilon$.

このとき, $\mathcal{E}_d^0$ は X 上の粗構造である ([3, Proposition 2.1] 参照). $\mathcal{E}_d^0$ を距離 d によって定まる C_0 **粗構造 (C_0 coarse structure)** という.

有界粗構造と位相的粗構造の関係は, Higson コンパクト化を用いて述べられる. 距離空間 (X, d) が**固有 (proper)** であるとは, 任意の X の有界閉部分集合がコンパクトであるときをいう. 固有距離空間 (X, d) 上の関数 $h : X \to \mathbb{R}$ が **Higson 関数**であるとは, 任意の $R > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対して, 次を満たすコンパクト集合 $K \subset X$ があるときをいう: $d(x, y) < R$, $x \notin K$ を満たす任意の $x, y \in X$ に対して $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (X, d) 上の有界で連続な Higson 関数全体を $C_d(X)$ で表す.

X の有界な実数値連続関数全体のなす Banach 環を $C^*(X)$ で表すとき, $C_d(X)$ は, 定値関数を全て含む $C^*(X)$ の閉部分環であり, X の点と閉集合を分離する. よって, X のコンパクト化 h_dX で, 全ての有界で連続な Higson 関数が h_dX 上の連続関数に拡張されるものが, (コンパクト化の同値を除いて一意的に) 存在する ([1, 3.12.22 (e)] 参照). このコンパクト化 h_dX を距離空間 (X,d) の **Higoson コンパクト化**という.

定理 6 ([4, Proposition 2.47]). 固有距離空間 (X,d) の距離 d によって定まる有界粗構造 $\mathcal{E}_d$ は, (X,d) の Higson コンパクト化 h_dX によって定まる位相的粗構造 $\mathcal{E}_{h_dX}$ と等しい.

一方, C_0 粗構造と位相的粗構造の関係は, Smirnov コンパクト化を用いて説明される. 距離空間 (X,d) 上の有界な実数値一様連続関数全体に対して, 上と同様な議論を行う. このとき, X のコンパクト化 u_dX で, 全ての有界な一様連続実数値関数が u_dX 上の連続関数に拡張されるものが, (コンパクト化の同値を除いて一意的に) 存在する. この u_dX を距離空間 (X,d) の **Smirnov コンパクト化**という.

定理 7 ([3, Theorem 3.5 and Proposition 4.1]). 局所コンパクト距離空間 (X,d) の距離 d によって定まる C_0 粗構造 $\mathcal{E}_d^0$ は, (X,d) の Smirnov コンパクト化 u_dX によって定まる位相的粗構造 $\mathcal{E}_{u_dX}$ と等しい.

更に, 次が成り立つ.

定理 8 ([3, Corollary 4.3]). $\overline{X}$ を局所コンパクト空間 X の距離化可能なコンパクト化とする. このとき, $\overline{X}$ によって定まる位相的粗構造 $\mathcal{E}_{\overline{X}}$ は, $\overline{X}$ の位相を生成する距離の X への制限 d によって定まる C_0 粗構造 $\mathcal{E}_d^0$ と等しい.

2. C_0 COARSE STRUCTURES ON UNIFORM SPACES

一様空間 $(X,\mathcal{U})$ には $\{U[x] : x \in X,\ U \in \mathcal{U}\}$ (ただし, $U[x] = \{y \in X : (y,x) \in U\}$) によって生成される位相が与えられているとする. C_0 粗構造の概念は, 一様空間上へ自然に拡張できる.

定義 9. 局所コンパクトな一様空間 $(X,\mathcal{U})$ に対して, 次の条件を満たす $E \subset X \times X$ 全体の集合を $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}^0$ で表す.

> 任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して, $E \setminus (K \times K) \subset U$ を満たすコンパクト集合 $K \subset X$ がある.

このとき, [3, Proposition 2.1] と同様な議論により, $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}^0$ は X 上の粗構造であることが確かめられる. $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}^0$ を一様構造 $\mathcal{U}$ によって定まる C_0 **粗構造** (C_0 **coarse structure**) という.

上と同様な議論により, X のコンパクト化 $u_{\mathcal{U}}X$ で, 全ての有界な一様連続実数値関数が $u_{\mathcal{U}}X$ 上の連続関数に拡張されるものが, (コンパクト化の同値を除いて一意的に) 存在する. この $u_{\mathcal{U}}X$ を一様空間 $(X,\mathcal{U})$ の **Samuel コンパクト化**という. 定理 7 は次のように拡張される.

定理 10. 局所コンパクトな一様空間 $(X,\mathcal{U})$ の一様構造 $\mathcal{U}$ によって定まる C_0 粗構造 $\mathcal{E}^0_{\mathcal{U}}$ は, $(X,\mathcal{U})$ の Samuel コンパクト化 $u_{\mathcal{U}}X$ によって定まる位相的粗構造 $\mathcal{E}_{u_{\mathcal{U}}X}$ と等しい.

証明の概略. 一様空間 $(X,\mathcal{U})$ 上の有界な実数値一様連続関数全体から生成される一様構造を $\mathcal{U}_0$ とする. このとき, $\mathcal{U}_0$ は $\mathcal{U}$ より粗い全有界な一様構造の中で, 最も細かい一様構造である. このとき, $\mathcal{E}^0_{\mathcal{U}} = \mathcal{E}^0_{\mathcal{U}_0}$ が成り立つ.

一方, $(X,\mathcal{U})$ の Samuel コンパクト化 $u_{\mathcal{U}}X$ に関して, $u_{\mathcal{U}}X \times u_{\mathcal{U}}X$ における $\Delta_{u_{\mathcal{U}}X}$ の近傍全体 $\mathcal{U}'$ は, $u_{\mathcal{U}}X$ 上の唯一の一様構造である. いま, $u_{\mathcal{U}}X$ は $\mathcal{U}_0$ に関する X の完備化なので ([1, 8.5.7] 参照), X における $\mathcal{U}'$ の部分一様構造は $\mathcal{U}_0$ と等しい. この事実を用いて $\mathcal{E}^0_{\mathcal{U}_0} = \mathcal{E}_{u_{\mathcal{U}}X}$ が示され, $\mathcal{E}^0_{\mathcal{U}} = \mathcal{E}_{u_{\mathcal{U}}X}$ を得る. □

空間 X の任意のコンパクト化 $\overline{X}$ は, (その位相を生成する) ただ 1 つの一様構造 $\overline{\mathcal{U}}$ をもつ ([1, Theorem 8.3.13] 参照). このとき, X における $\overline{\mathcal{U}}$ の部分一様構造を $\mathcal{U}$ とすると, $(X,\mathcal{U})$ 上の (有界な) 一様連続実数値関数は, $\overline{X}$ 上の (一様) 連続関数へ拡張される ([1, Theorem 8.3.10] 参照). よって, $\overline{X}$ は $(X,\mathcal{U})$ の Samuel コンパクト化である. 従って, 次を得る.

系 11. $\overline{X}$ を局所コンパクト空間 X のコンパクト化とする. このとき, $\overline{X}$ によって定まる位相的粗構造 $\mathcal{E}_{\overline{X}}$ は, $\overline{X}$ の位相を生成する一様構造の X への制限 $\mathcal{U}$ によって定まる C_0 粗構造 $\mathcal{E}^0_{\mathcal{U}}$ と等しい.

注意 12. 固有距離空間 (X,d) の距離 d によって定まる有界粗構造 $\mathcal{E}_d$ は, (X,d) の Higson コンパクト化による位相的粗構造と等しいので, 系 11 より, X 上のある一様構造によって定まる C_0 粗構造と等しい. 実際, $\mathcal{U}$ を次の条件を満たす $U \subset X \times X$ 全体とする:

> U の内部は Δ_X を含み, 任意の $R > 0$ に対して, 次を満たすコンパクト集合 $K \subset X$ がある: $d(x,y) < R$ を満たす任意の $(x,y) \in (X \times X) \setminus (K \times K)$ に対して $(x,y) \in U$.

このとき, $\mathcal{U}$ は X の位相を生成する X 上の一様構造で, $\mathcal{E}_d = \mathcal{E}^0_{\mathcal{U}}$ が成り立つ.

References

[1] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[2] N. Higson, E. K. Pedersen and J. Roe, *C^*-algebras and controlled topology*, K-Theory **11** (1997), 209–239.

[3] K. Mine and A. Yamashita, *Metric compactifications and coarse structures*, preprint, available at `http://arxiv.org/abs/1106.1672`

[4] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[5] A. Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Paris, 1938.

[6] N. Wright, C_0 *coarse geometry and scalar curvature*, J. Funct. Anal. **197** (2003), 469–488.