数理解析研究所講究録
第 1884 巻 2014 年 18-39

Higson 境界上の不動点の存在条件

千葉工業大学・工学部　山下　温 (Atsushi Yamashita)
Faculty of Engineering,
Chiba Institute of Technology

1 序

有限生成群 G には，特定の有限生成系 S を固定したときに「語の長さ」で距離を導入することができる．すなわち，$x, y \in G$ に対して $x^{-1}y$ を S の語で表したときの最小の長さを $d_S(x, y)$ とおくことで，G 上の距離 d_S が定まる．この距離は S の取り方に依存し，かつ整数値である．しかし，二つの有限生成系 S, S' に対しては，d_S と $d_{S'}$ は擬等長な距離となる．すなわち，適当な $A \geqq 1$ および $B > 0$ に対して

$$Ad_S(x, y) - B \leqq d_{S'}(x, y) \leqq Ad_S(x, y) + B \quad (x, y \in G)$$

という関係がある．この意味で G 上の距離 d_S は「S に依存しない」ものになっている．

幾何学的群論においては，この距離を用いて群 G の性質を調べる．一般に，擬等長を除いてきまる距離からその距離空間の「大域的」性質を論じようとするのが粗幾何 (coarse geometry) である（粗構造の概念を用いれば，粗幾何の対象は更に拡張することができる）．さて，群 G 上の距離 d_S は整数値であり，したがって，G の位相的性質は自明（離散位相）である．しかしながら，G の「無限遠境界」と呼ばれる空間を考えることで，自明でない位相空間を得ることができる．無限遠境界の概念は，さまざまな距離空間に対して，いくつかの方法で定義できるが，いずれにしても，距離空間から粗幾何的な情報をもった位相空間を抽出する働きをもっている．

そのような無限遠境界の一種に，Higson 境界，あるいは Higson コロナと呼ばれるものがある．これは任意の距離空間 X（より一般に，粗空間）に対して定義される．距離空間 X の Higson コロナは νX と書かれ，コンパクト Hausdorff 空間となる． 特に，X が固有距離空間（すなわち，任意の有界閉集合がコンパクトであるような距離空間）の場合が重要であり，このときのコロナ νX は，X の Higson コンパクト化と呼ばれるコンパクト化 hX における剰余 $hX \setminus X$ として定義される．

Higson コロナは，きわめて大雑把には，円板に対する円周のように，X を無限遠から取り巻いている対象であるが，多くの場合可算離散空間の Stone-Čech コンパクト化 $\beta\omega$ を含む非常にワイルドな空間である．このような空間が，どれだけ無限遠境界に期待されるような幾何的ふるまいをするのかは，興味深いところであろう．そこで最近の嶺幸太郎氏（東大数理）との共同研究においては，自己擬等長写像 $X \to X$ に対して，それが誘導する連続写像 $\nu X \to \nu X$ の不動点の存在や，不動点集合の性質について調べている．

本稿の目的は，講演で紹介した次の定理の証明を与えることである．

定理 1.1. 固有距離空間 X が large-scale doubling であるとする．このとき，擬等長同型 $f\colon X \to X$ に対して，$\nu f\colon \nu X \to \nu X$ が不動点を持たないためには，

$$\lim_{x\to\infty} d(x, f(x)) = \infty \tag{$\sharp$}$$

となることが必要かつ十分である．

ここで，主張 ($\sharp$) は任意の $R > 0$ に対してあるコンパクト集合 $K \subset X$ が存在し，$x \in X \setminus K$ のとき常に $d(x, f(x)) \geqq R$ であることを意味する．また，X に課された条件である large-scale doubling は，「粗幾何的な有限次元性」を含意するある性質であり（定義は §2 を参照），$\mathbb{R}^n$ はこの性質を満たす一方，双曲空間 $\mathbb{H}^n$ はこの性質を満たさない．なお，上での νf は νX の自己同相写像である（系 2.3）．

この定理は，Stone-Čech コンパクト化の境界に関する van Douwen [2] による次の結果の粗幾何版であると考えられる（今回の文脈に合わせた形で引用する）．

定理 1.2 (van Douwen). X を有限次元のパラコンパクト Hausdorff 空間とするとき，同相写像 $f\colon X \to X$ に対して，$\beta f|_{\beta X\setminus X}\colon \beta X \setminus X \to \beta X \setminus X$ が不動点を持たないためには、f の不動点集合がコンパクトになることが必要かつ十分である。

上の van Douwen の定理の証明においては，写像の coloring の概念が重要である．一般に，不動点のない連続写像 $f\colon X \to X$ の **coloring** とは，X の有限閉被覆 $\{F_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ であって，任意の $i \in I$ に対して $f(F_i) \cap F_i = \emptyset$ となるようなものをいう．次は定義から容易に証明できる．

命題 1.3. コンパクト Hausdorff 空間 X に対して，任意の不動点のない連続写像 $f\colon X \to X$ は coloring をもつ． □

Stone-Čech コンパクト化との関係では次が重要である．

命題 1.4. 正規空間 X の不動点のない連続閉写像 $f\colon X \to X$ に対して，f が coloring をもてば，Stone-Čech コンパクト化への拡張 $\beta f\colon \beta X \to \beta X$ にも不動点はない．

証明. $\{F_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ を f の coloring とすると，

$$\beta X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{\beta X} F_i$$

である．$\xi \in \beta X \setminus X$ を任意に取り，ξ が βf の不動点でないことを示そう．上の式より，ある i に対して $\xi \in \mathrm{cl}_{\beta X} F_i$ である．f は閉写像なので F_i と $f(F_i)$ は交わらない閉集合である．よって X の正規性より，連続写像 $\gamma\colon X \to [0, 1]$ を $\gamma|_{F_i} = 0$, $\gamma|_{f(F_i)} = 1$ となるように取れる．γ は $\beta\gamma\colon \beta X \to [0, 1]$ に連続に拡張できる．すると $\beta\gamma(\xi) = 0$, $\beta\gamma(\beta f(\xi)) \in \beta\gamma(\mathrm{cl}_{\beta X} f(F_i)) = \{1\}$ であるから，$\xi \neq \beta f(\xi)$ でなければならない． □

van Douwen の実際に証明したことは，パラコンパクト Hausdorff 空間 X の不動点のない同相写像 $f\colon X \to X$ が coloring をもつということである．今回の主定理 1.1 の証明の主要部分も，結局のところは「粗幾何的な」coloring を構成することであり，本稿の大部分はこれに費やされる．

ところで，coloring の構成には有限次元性の仮定が本質的である．van Douwen の定理 1.2 も無限次元の空間 X については成立しない．反例としては，可分ヒルベルト空間 ℓ^2 の中で，原点を中心とする半径 n の n 次元球面の和集合 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nS^n \subset \ell^2$ を考え，$f\colon X \to X$ として各球面 nS^n 上で対蹠写像 $x \mapsto -x$ で定義される写像をとればよい．このとき，確かに X は有限次元ではない．もし定理 1.2 の主張が成立し，$\beta f\colon \beta X \to \beta X$ に不動点がないとすれば，命題 1.3 によって βf には coloring $\{F_i \mid i = 1, 2, \ldots, N\}$ が存在する．これを $nS^n \subset X$ の上に制限すると，n 次元球面の対蹠写像の N 個の閉集合による coloring が得られる．しかし，Borsuk-Ulam の定理の簡単な応用により n 次元球面の対蹠写像の coloring には，$n+2$ 個以上の閉集合が必要とわかる*1．したがって $N < n+2$ となるように n を大きくとると矛盾する．

このように，有限次元性は van Douwen の定理 1.2 の成立に不可欠なのであるが，今回の文脈でこれに相当する条件と思われるのは，linearly controlled asymptotic dimension $\ell\text{-asdim}\, X$ が有限であるというものである（$\ell\text{-asdim}\, X$ については §2 で定義を与える）．

今回の主定理 1.1 も，$\ell\text{-asdim}\, X$ の有限な固有距離空間について証明できることが期待されていたが，以下での「粗幾何的な」coloring の構成は，より強い large-scale doubling の仮定のもとで行うことしかできなかった．Large-scale doubling なものには $\mathbb{R}^n$ という非常に重要な空間が含まれているから，これはさほど無理な仮定ではないであろうが，以下の問題は未解決のままである．

問題 1.5. 定理 1.1 において，X が large-scale doubling であるという仮定を $\ell\text{-asdim}\, X < \infty$ に弱めることはできるか？

今回の結果は嶺幸太郎氏（東大数理）との共同研究によるものである．

2 定義

本稿においては，$\mathbb{N}$ は正の整数全体の集合を表す：

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

距離空間 X の点 x と $r \geqq 0$ に対して，$B(x, r)$ は x を中心とする半径 r の閉球体を表す：

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) \leqq r\}.$$

---

*1 それには $\{F_0, F_1, \ldots, F_n\}$ を $n+1$ 個の閉集合による S^n の被覆としたとき，ある i と $x \in S^n$ について $x, -x \in F_i$ であることを示せばよい．連続写像 $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ を $f(x) = (d(x, F_1), \ldots, d(x, F_n))$ で定めると，Borsuk-Ulam の定理から $f(x) = f(-x) = y$ となる x が存在する．y の第 i 座標が 0 ならば $x, -x \in F_i$，y のすべての座標が $\neq 0$ ならば $x, -x \in F_0$ である．

特に，$B(x,0)=\{x\}$ である．

距離空間 X が**固有**であるとは，任意の閉球体がコンパクトであることを意味する．これは，任意の有界閉集合がコンパクトであることと言ってもよい．以下では距離空間の中でも固有距離空間だけを取り扱う．固有距離空間は，明らかに局所コンパクトである．

2.1 擬等長同型と Higson コロナ

固有距離空間の間の（連続とは限らない）写像 $f\colon X\to Y$ が**擬等長同型** (quasi-isometry) であるとは，定数 $A\geqq 1$ が存在して，次の二条件が成り立つことをいう．

(1) 任意の $x,x'\in X$ に対して $A^{-1}d(x,x')-A\leqq d(f(x),f(x'))\leqq Ad(x,x')+A$.
(2) 任意の $y\in Y$ に対して，$x\in X$ が存在して $d(y,f(x))\leqq A$.

擬等長同型の典型的な例は，包含写像 $\mathbb{Z}^n\to\mathbb{R}^n$ である．また，有限生成群 G の任意の二つの有限生成系 S,S' に対して，それらの語距離を $d_S,d_{S'}$ とすると，冒頭に述べたとおり，$\mathrm{id}\colon(G,d_S)\to(G,d_{S'})$ は擬等長同型となる．

擬等長同型には，群の同型写像や同相写像のように「適切な逆写像」が存在するという形の定義もできる．まず，固有距離空間の間の写像 $f\colon X\to Y$ は，上の条件 (1) を満たすとき**擬等長写像**（あるいは**擬等長埋め込み**）であるという．また，集合 S から距離空間 X への二つの写像 $h,k\colon S\to X$ が**近い** (close) とは，ある定数 $M>0$ が存在して，任意の $s\in S$ に対して $d(h(s),k(s))<M$ が成立することをいい，このことを $h\sim k$ で表す．このとき，次が成り立つことが簡単に示される．

命題 2.1. 固有距離空間の間の写像 $f\colon X\to Y$ が擬等長同型であるための必要十分条件は，f が擬等長写像であり，かつ擬等長写像 $g\colon Y\to X$ が存在して，$g\circ f\sim\mathrm{id}_X$, $f\circ g\sim\mathrm{id}_Y$ が成立することである． □

上での g は f の正確な逆写像ではない．ホモトピー同値に対するホモトピー逆写像に例えられるものである．例えば，$f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ を包含写像とすると，f は擬等長写像であるが，これに対して $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ を $g(x)=[x]$（x の整数部分）とすると g は上の命題の条件をみたす擬等長写像であり，したがって f は，擬等長同型となる．

固有距離空間 X に対して，$h\colon X\to\mathbb{R}$ が **Higson 関数** であるとは，任意の $R>0$ に対して条件

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{diam}(h(B(x,R)))=0$$

が成立することである．正確に述べれば，任意の $R>0$ および $\varepsilon>0$ に対して，あるコンパクト集合 K が存在して，$x\in X\setminus K$ かつ $d(y,x)<R$ のとき常に $d(h(x),h(y))<\varepsilon$ が成立することである．X 上の有界な Higson 関数全体は実 Banach 環をなすことが容易に確かめられ，これを $C_h(X)$ と書く．この $C_h(X)$ に対応する X のコンパクト化が Higson コンパクト化である．すなわち，X の **Higson コンパクト化** hX は，X 上の有界連続関数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ に対して

$$f\text{ が }hX\text{ 上の連続関数に拡張する}\iff f\in C_h(X)$$

が成立することで特徴づけられる X のコンパクト化である．同様にして複素数値の有界な Higson 関数（すなわち，その実部・虚部が有界 Higson であるような関数）全体は可換な C^* 環をなすが，この C^* 環に Gelfand-Naimark の定理により対応するコンパクト化が Higson コンパクト化であると言ってもよい．そして，このコンパクト化の剰余，すなわち $hX \setminus X$ を X の Higson 境界あるいは **Higson コロナ**といい，νX で表す．X の局所コンパクト性から，νX はコンパクト Hausdorff 空間になることがわかる．しかし，νX は多くの場合距離付け可能とはならない．

擬等長同型，あるいは一般に擬等長写像 $f\colon X \to Y$ は，Higson コロナの間の連続写像 $\nu f\colon \nu X \to \nu Y$ を誘導する．この事実と次の命題については [8, Section 2.3] を参照されたい．

命題 2.2. ν は関手性をもつ．すなわち，$f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ が擬等長写像のとき $\nu(g \circ f) = \nu g \circ \nu f$ と $\nu(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\nu X}$ が成り立つ．また，二つの擬等長写像 $h, k\colon X \to Y$ に対して $h \sim k$ ならば $\nu h = \nu k$ である．

これと命題 2.1 を合わせると直ちに次を得る．

系 2.3. 固有距離空間の間の擬等長同型 $f\colon X \to Y$ に対して，$\nu f\colon \nu X \to \nu Y$ は同相写像である． □

この連続写像 νf を実際に扱う際には，次が重要である [6, Proposition 2.5]．

命題 2.4. 連続写像 νf を $f\colon X \to Y$ と貼りあわせた写像 $f \cup \nu f\colon X \cup \nu X = hX \to hY = Y \cup \nu Y$ を考える．この $f \cup \nu f$ は νX の各点において連続である．また，写像 $\nu f\colon \nu X \to \nu X$ はこの性質で特徴づけられる．

2.2 Large scale doubling な距離空間

さて，主定理 1.1 に現れている距離空間についての large-scale doubling という性質を定義しよう．

定義 2.5. 距離空間 X が **large-scale doubling** であるとは，$N \in \mathbb{N}$ と $r_0 \geqq 0$ が存在して，任意の $r \geqq r_0$ に対して，X における半径 $2r$ の任意の球体が高々 N 個の半径 r の球体によって被覆されることをいう．すなわち，任意の $r \geqq r_0$ と $x \in X$ に対して，

$$B(x, 2r) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(y_i, r)$$

を満たすような $y_1, y_2, \ldots, y_N \in X$ が存在することをいう．

なお球体とは閉球体を意味するものとするが，ここに限らず本稿全体において，開球体を用いるか閉球体を用いるかは本質的ではない（これはトポロジーの議論と粗幾何の議論の大きく相違する点である）．上の定義で $r_0 = 0$ と取れるとき，距離空間 X は **doubling** であるという． もちろん，doubling であれば，large-scale doubling である．

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は doubling である（したがって large-scale doubling でもある）．実際，$\mathbb{R}^n$ の半径 2 の（閉）球体は，コンパクト性から有限個（それを N 個とする）の半径 1 の球体で覆うことができる．これに r 倍の相似拡大を施せば，半径 $2r$ の球体が常に N 個の半径 r の球体で覆われると分かる．これに対し，双曲空間 $\mathbb{H}^n$ $(n \geqq 2)$ は large-scale doubling ではない．これは双曲空間の球体の体積が半径の指数関数のオーダーで増大することの帰結である．

Doubling であるという性質は擬等長同型では不変ではないが，容易に分かる通り large-scale doubling の方は擬等長同型で不変である．これが，主定理の主張において後者の概念を用いた理由である．

Large-scale doubling な距離空間について，次が成り立つ．正数 r に対して，距離空間 X の部分集合 S が r **離散** (r-discrete) であるとは，任意の異なる二点 $x, y \in S$ に対して $d(x,y) > r$ が成立することとする．

補題 2.6. X を large-scale doubling な距離空間とし，N および $r_0 > 0$ をその定義に現れる定数とする．このとき任意の $c \geqq 1$ に対して，次のような（N と c から定まる）$M \in \mathbb{N}$ が存在する：任意の $r \geqq 2r_0$ に対して，半径 cr の任意の球体の r 離散部分集合の元の個数は，常に M 個以下である．

証明. 任意の $r \geqq 2r_0$, $x \in X$ および球体 $B = B(x, cr)$ の任意の r 離散部分集合 S を取る．非負整数 q を $c \leqq 2^q$ となるように選び $M = N^{q+1}$ とすると，large-scale doubling の定義を $q+1$ 回繰り返し適用することで，B は M 個の $r/2$ 球体 $B_i = B(x_i, r/2)\,(i = 1, 2, \ldots, M)$ により覆われると分かる．このとき各 $s \in S$ に対して適当な $i = f(s)$ を選ぶと $s \in B_i$ である．この写像 $f\colon S \to \{1, 2, \ldots, M\}$ は単射である．実際，$f(s) = f(t) = i$ とすれば，$d(s,t) \leqq d(s, x_i) + d(x_i, t) \leqq r/2 + r/2 = r$ であるから，S の r 離散性から $s = t$ である．したがって S の元の個数は M 以下である． □

2.3 漸近次元

次に，距離空間の粗幾何的な次元に関係した用語を導入しよう．まず，今回では直接は用いないが，被覆次元の粗幾何版として知られた，漸近次元 (asymptotic dimension) の定義を振り返っておく．

定義 2.7 (asdim). 固有距離空間 X に対して，X の漸近次元 $\operatorname{asdim} X$ を次で定義する．非負整数 n に対して $\operatorname{asdim} X \leqq n$ であるとは，ある R_0 が存在し，任意の $R \geqq R_0$ に対して，X の $n+1$ 個の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ が存在して次が成立することである．

- 和集合 $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 \cup \cdots \mathcal{U}_n$ は X の被覆である．
- 各 i に対して，$\mathcal{U}_i$ の異なる二つの元は，距離 R 以上離れている．すなわち，$U, V \in \mathcal{U}_i$ かつ $U \neq V$ ならば $d(U, V) \geqq R$ である．
- 各 i に対して，$\mathcal{U}_i$ に属する集合の直径は一様な定数で抑えられる．すなわち，ある $M > 0$ が存在して，すべての $U \in \mathcal{U}_i$ に対して $\operatorname{diam} U \leqq M$ が成り立つ．

このとき，$\operatorname{asdim} X \leqq n$ となる n が存在するときは，そのような n で最小のものを X の**漸近次元** といい $\operatorname{asdim} X$ と書く．asdim $\leqq n$ となる n が存在しないときは，$\operatorname{asdim} X = \infty$ とする．

上の漸近次元 asdim について $\operatorname{asdim} \mathbb{R}^n = n$ である．また，漸近次元は擬等長同型について不変である．包含写像 $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n$ は擬等長同型であるから，$\operatorname{asdim} \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n = n$ である．また，有限生成群には擬等長同型を除いて一意的な語距離が決まるから，有限生成群の漸近次元という概念が意味を持ち，例えば n 元生成自由群 F_n について常に $\operatorname{asdim} F_n = 1$ である．

漸近次元は，実際には擬等長同型よりも弱い**粗同値** (coarse equivalence) について不変な量である．ここで $f\colon X \to Y$ が粗同値であるとは，$\rho_1 \leqq \rho_2$ と $\lim_{t\to\infty} \rho_1(t) = \infty$ を満たす関数 $\rho_1, \rho_2\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，および定数 $A > 0$ が存在して，次の条件が成り立つことをいう．

- 任意の $x, x' \in X$ に対して $\rho_1(d(x,x')) \leqq d(f(x), f(x')) \leqq \rho_2(d(x,x'))$.
- 任意の $y \in Y$ に対して，$x \in X$ が存在して $d(y, f(x)) \leqq A$.

ここでの ρ_1, ρ_2 が一次関数に取れる場合が擬等長同型にほかならない[*2]．

さて，漸近次元の定義 2.7 において，$\mathcal{U}_i$ の元の直径の上界 M は，R とまったく無関係に取れることに注意しよう．ここで M を R の一様な定数倍という条件を付加することで，次の線型制御漸近次元 (linearly controlled asymptotic dimension) ℓ-$\operatorname{asdim} X$ の定義が得られる．

定義 2.8 (ℓ-asdim). 固有距離空間 X に対して，X の線型制御漸近次元 ℓ-$\operatorname{asdim} X$ を次で定義する．非負整数 n に対して，ℓ-$\operatorname{asdim} X \leqq n$ であるとは，二つの定数 $R_0 > 0, C_0 > 0$ が存在して，任意の $R \geqq R_0$ に対して，X の $n+1$ 個の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ を次を満たすように取れることである．

- 和集合 $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 \cup \cdots \mathcal{U}_n$ は X の被覆である．
- 各 i に対して，$\mathcal{U}_i$ の異なる二つの元は，距離 R 以上離れている．すなわち，$U, V \in \mathcal{U}_i$ かつ $U \neq V$ ならば $d(U,V) \geqq R$ である．
- 各 i に対して，$\mathcal{U}_i$ に属する集合の直径は $C_0 R$ で抑えられる．すなわち，すべての $U \in \mathcal{U}_i$ に対して $\operatorname{diam} U \leqq C_0 R$ が成り立つ．

このとき，ℓ-$\operatorname{asdim} X \leqq n$ となる n が存在するときは，そのような n で最小のものを X の**線型制御漸近次元** といい ℓ-$\operatorname{asdim} X$ と書く．ℓ-asdim $\leqq n$ となる n が存在しないときは，ℓ-$\operatorname{asdim} X = \infty$ とする．

定義から，ℓ-$\operatorname{asdim} X \leqq n$ ならば $\operatorname{asdim} X \leqq n$ である．したがって，$\operatorname{asdim} X \leqq \ell$-

[*2] 擬等長同型のかわりに粗同値を考える理由の一つは次のようなものである．有限生成群 G がより大きな有限生成群 G' の部分群であるとき，G 上の任意の二つの語距離は互いに擬等長同型なのであるが，G' 上の語距離を G 上に制限したものはそれと擬等長同型でないことがありうる．その場合でも，この両者は粗同値となる．

asdim X が常に成り立ち，特に

$$\ell\text{-}\operatorname{asdim} X < \infty \text{ ならば } \operatorname{asdim} X < \infty$$

である．この二つの次元 asdim と ℓ-asdim は実際に異なる．例えば $k \geqq 2$ のとき，$\operatorname{asdim} G_k = k$, $\ell\text{-}\operatorname{asdim} G_k = \infty$ となるような有限表示群 G_k が存在する (Nowak [7])．また，任意の $n \geqq 1, k > 0$ に対して，$\operatorname{asdim} G_{n,k} = n$, $\ell\text{-}\operatorname{asdim} G_{n,k} = n + k$ となる可算群 $G_{n,k}$（に左不変固有距離を入れたもの）の例も知られている (Higes [4])．

さて，large-scale doubling である固有距離空間 X は，ℓ-asdim が有限である．この事実の以下の証明は，実質的には Lang-Schlichenmaier [5] による．

命題 2.9. 固有距離空間 X が large-scale doubling であれば，$\ell\text{-}\operatorname{asdim} X < \infty$ である．

証明. $r_0 > 0$ を large-scale doubling の定義の通りに取り，$R_0 = 2r_0$, $C_0 = 2$ とする．$R \geqq R_0$ とし，X の極大な R 離散部分集合 S を取る．X が固有距離空間であることから，S は可算集合である．そこで $S = \{p_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ 番号づける．$R \geqq R_0 = 2r_0$ であるから補題 2.6 により，$M \in \mathbb{N}$ が存在して，各 k に対して $|S \cap B(p_k, 3R)| \leqq M$ である．このことから写像 $\chi\colon \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, \ldots, M-1\}$ を，$d(p_k, p_l) \leqq 3R$, $k \neq l$ ならば $\chi(k) \neq \chi(l)$ となるように構成できる（$\chi(1)$ から順に帰納的に定義していけばよい）．そこで $i = 0, 1, \ldots, M-1$ に対して

$$\mathcal{U}_i = \{B(p_k, R) \,|\, \chi(k) = i\}$$

とおくと，S の極大性から $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{M-1}$ は X の被覆であり，任意の異なる二つの元の距離は R 以上であり，しかも $\mathcal{U}_i$ の各元の直径は $2R = C_0 R$ 以下である．したがって，X は $\ell\text{-}\operatorname{asdim} X \leqq M < \infty$ を満たす． □

なお，上の命題の逆は成立しない．実際，双曲空間 $\mathbb{H}^n$ は $\ell\text{-}\operatorname{asdim} \mathbb{H}^n = n < \infty$ をみたす ([1, Theorem 12.3.3]) が，large-scale doubling ではない．

3 主定理の証明の概略

本稿の主定理 1.1 のうち，必要性の部分は比較的容易であり，固有距離空間 X が large-scale doubling であるという仮定さえ証明には必要ない．まず，この部分を確かめておこう．

定理 1.1 のうち，必要性の証明. 対偶を証明する．$f\colon X \to X$ を固有距離空間 X の擬等長同型とし，主張 ($\sharp$) すなわち $\lim_{x\to\infty} d(x, f(x)) = \infty$ が成立しないとする．すると X 内の非有界集合（言い換えると X での閉包がコンパクトでない集合）A と定数 $M > 0$ であって，

$$d(a, f(a)) \leqq M \tag{$\natural$}$$

が各 $a \in A$ に対して成立するようなものを取ることができる．このとき Higson コンパクト化 $hX = X \cup \nu X$ における閉包 $\mathrm{cl}_{hX} A$ に対して，$\mathrm{cl}_{hX} A \cap \nu X \neq \emptyset$ となる．

そこで $\xi \in \mathrm{cl}_{hX} A \cap \nu X$ を一つ取ると，これが νf の不動点となる．それを示すため，$\xi \neq \nu f(\xi)$ であったとしよう．hX はコンパクト Hausdorff だから，連続関数 $\bar{h}\colon hX \to \mathbb{R}$ であって $\bar{h}(\xi) \neq \bar{h}(\nu f(\xi))$ となるものが存在する．$\bar{h}$ の X への制限 $h\colon X \to \mathbb{R}$ は，hX の定義により，Higson 関数である．

$a_\lambda \to \xi \in \mathrm{cl}_{hX} A$ となる A 内の有向点列 (a_λ) を選ぶ．このとき命題 2.4 より $f(a_\lambda) \to \nu f(\xi)$ である．すると ($\natural$) と h が Higson 関数であることより，$|h(a_\lambda) - h(f(a_\lambda))| \to 0$ である．したがって，$\bar{h}$ の連続性より $\bar{h}(\xi) = \bar{h}(\nu f(\xi))$ となり，$\bar{h}$ の取り方に矛盾する．よって，ξ は νf の不動点である． □

さて，問題となるのはこの逆，すなわち十分性の証明である．そのために基本となるのは次の事実である．距離空間 X の部分集合 S および $r \geqq 0$ に対して，$N_r(S)$ によって S の r 近傍

$$N_r(S) = \{x \in X \mid d(x, S) \leqq r\}$$

を表す．

命題 3.1 (粗幾何的 coloring と不動点の非存在)．X を固有距離空間とし，$f\colon X \to X$ を擬等長写像とする．次の条件 (1)(2) を満たす X の有限個の部分集合 $F_1, F_2, \ldots, F_N$ が存在すれば，$\nu f\colon \nu X \to \nu X$ は不動点をもたない．

(1) $X \setminus \bigcup_{i=1}^N F_i$ は有界である．
(2) 任意の $i = 1, 2, \ldots, N$ と $R > 0$ に対して，$N_R(F_i) \cap N_R(f(F_i))$ は有界である．

上の命題は，Stone-Čech コンパクト化についての命題 1.4 の粗幾何版であると考えることができ，条件 (1)(2) を満たす $F_1, F_2, \ldots, F_N$ は，粗幾何的な意味での f の coloring と思うことができる． (1) の条件は F_i たちが X を「粗幾何的な意味で被覆している」ことを表し，(2) の条件は F_i と $f(F_i)$ が「粗幾何的な意味で交わらない」ことを表している．

命題 3.1 の証明． $\xi \in \nu X$ として，ξ が νX の不動点ではないことを示そう．まず，$K = \mathrm{cl}_X(X \setminus \bigcup_{i=1}^N F_i)$ とおくと，条件 (1) より K は X の有界閉集合，したがって，X が固有距離空間であることより K はコンパクトである．よって Higson コンパクト化 hX について

$$hX = \mathrm{cl}_{hX}(X) = \mathrm{cl}_{hX}\left(\bigcup_{i=1}^N F_i \cup K\right) = \bigcup_{i=1}^N \mathrm{cl}_{hX} F_i \cup \mathrm{cl}_{hX} K = \bigcup_{i=1}^N \mathrm{cl}_{hX} F_i \cup K$$

よって $\nu X = hX \setminus X = \left(\bigcup_{i=1}^N \mathrm{cl}_{hX} F_i\right) \setminus X$ であるから，ある i に対して，$\xi \in \mathrm{cl}_{hX} F_i$ である．

この i に対して，(2) で $R = 1$ としたものより，$N_1(F_i) \cap N_1(f(F_i))$ は有界で，したがってあるコンパクト集合 K' に含まれる．$A = F_i \setminus K'$, $B = f(F_i) \setminus K'$ とおけば，すべての $x \in X$ に対して $d(x, A) > 0$ または $d(x, B) > 0$ となるので，$F(x) = d(x, A) + d(x, B)$ とするとき

$$h(x) = \frac{d(x, A)}{F(x)}$$

によって連続関数 $h\colon X \to [0,1]$ を定義できる．このとき，条件 (2) により，$x \to \infty$ のとき $F(x) \to \infty$ が成り立つことに注意しておく．

主張 3.1. この h は Higson 関数である．

主張 *3.1* の証明．$R > 0$ を任意に取る．$\lim_{x\to\infty} \operatorname{diam} h(B(x,R)) = 0$ を証明しよう．そのため，$x, y \in X$, $d(x,y) \leqq R$ とする．$|d(x,A) - d(y,A)| \leqq d(x,y)$ および $|F(y) - F(x)| \leqq 2d(x,y)$ に注意すると，

$$\begin{aligned}|h(x) - h(y)| &= \left|\frac{d(x,A)}{F(x)} - \frac{d(y,A)}{F(y)}\right| \\ &= \left|\frac{d(x,A) - d(y,A)}{F(x)} + \frac{d(y,A)}{F(y)}\frac{F(y) - F(x)}{F(x)}\right| \\ &\leqq \frac{d(x,y)}{F(x)} + \frac{2d(x,y)}{F(x)} \leqq \frac{R}{F(x)}\end{aligned}$$

さきに注意したとおり $x \to \infty$ のとき $F(x) \to \infty$ であるから，上の評価式から求める結論を得る． □

いま証明された主張より，h は Higson コンパクト化 hX 上の連続関数 $\bar{h}\colon hX \to [0,1]$ に拡張できる．$\xi \in \mathrm{cl}_{hX} F_i$ であったが，これと命題 2.4 より，$\nu f(\xi) \in \mathrm{cl}_{hX} f(F_i)$ である．ところが $A = F_i \setminus K'$, $B = f(F_i) \setminus K'$ であったから K' のコンパクト性より $\mathrm{cl}_{hX} F_i \cap \nu X = \mathrm{cl}_{hX} A \cap \nu X$, $\mathrm{cl}_{hX} f(F_i) \cap \nu X = \mathrm{cl}_{hX} B \cap \nu X$ である．よって

$$\xi \in \mathrm{cl}_{hX} A, \quad \nu f(\xi) \in \mathrm{cl}_{hX} B$$

である．一方，h の定義より $A \subset h^{-1}(1)$, $B \subset h^{-1}(0)$ であるので，$\xi \in \mathrm{cl}_{hX} A \subset \bar{h}^{-1}(1)$, $\nu f(\xi) \in \mathrm{cl}_{hX} B \subset \bar{h}^{-1}(0)$ である．よって $\bar{h}(\xi) = 1 \neq 0 = \bar{h}(\nu f(\xi))$ であるから $\xi \neq \nu f(\xi)$ である．命題 3.1 が証明された． □

こうして，主定理の証明のためには，large-scale doubling な固有距離空間 X と $\lim_{x\to\infty} d(x, f(x)) = \infty$ なる擬等長同型 $f\colon X \to X$ に対して命題 3.1 の条件 (1) (2) を満たす $F_1, \ldots, F_N$ を構成すればよいことがわかった．しかし，ここでの擬等長同型 $f\colon X \to X$ は全単射であると仮定しても一般性を失わない．それは次が成り立つからである．

命題 3.2. 固有距離空間 X の任意の擬等長同型 $f\colon X \to X$ に対して，ある固有距離空間 X' および擬等長同型 $\varphi\colon X \to X'$ および全単射である擬等長同型 $f'\colon X' \to X'$ が存在して，

$$f \sim \psi \circ f' \circ \varphi$$

である．但し，$\psi\colon X' \to X$ は命題 2.1 の意味で φ の逆である．すなわち ψ は $\psi \circ \varphi \sim \mathrm{id}_X$, $\varphi \circ \psi \sim \mathrm{id}_{X'}$ を満たす擬等長写像である．

証明. C を無限個の点をもつコンパクト距離空間，たとえば $\mathbb{R}$ の部分距離空間

$$C = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$$

としよう．Y を X の極大な 1 離散部分集合の一つとし，$X' = Y \times C$ に距離 $d((y,c),(y',c')) = d(y,y') + |c - c'|$ を入れると，X' は固有距離空間である．また，各 $x \in X$ に対して x との距離が最も近い Y の点の一つ $\varphi'(x)$ を選べば，$\varphi' \colon X \to Y$ と包含写像 $i \colon Y \to X$ は互いに逆の擬等長同型である．また，$j \colon Y \to X'$, $p \colon X' \to Y$ をそれぞれ $j(y) = (y, 0)$, $p(y,c) = y$ で定義すると，これらは互いに逆の擬等長同型である．

以上を用いて擬等長同型 $\varphi \colon X \to X'$ を $\varphi(x) = j \circ \varphi'$ で定義すると，その逆 $\psi \colon X' \to X$ が $\psi = i \circ p$ で与えられる．このとき，擬等長同型 $\tilde{f} = \varphi' \circ f \circ i \colon Y \to Y$ を考えよう．すると，擬等長同型の定義から，$C > 0$ を適当に選ぶと，任意の $y \in Y$ に対して $x \in Y$ であって $d(y, \tilde{f}(x)) < C$ となるようなものが存在する（以下では，Y の点を表す文字として，Y を $\tilde{f}$ の定義域と考えるときは x を，Y を $\tilde{f}$ の値域と考えるときは y を用いる）．

この C を選んで，各 $x \in Y$ に対して $F_x = B_Y(\tilde{f}(x), C)$ とおく．但し，B_Y は Y における閉球体を表す．この F_x は空でない有限集合である．次に各 $y \in Y$ に対して $F^y = \tilde{f}^{-1}(B_Y(y, C))$ とおく．F^y も空でない有限集合である．各 $x \in Y$ に対して，集合としての分割 $C = \coprod_{y \in F_x} D_x(y)$ を，各 $D_x(y)$ が（可算）無限集合となるように固定する．同様に，各 $y \in Y$ に対して，集合としての分割 $C = \coprod_{x \in F^y} E^y(x)$ を，各 $E^y(x)$ が無限集合となるように固定する．こうして，集合 X' の二通りの直和分割

$$X' = \coprod_{x \in Y} \coprod_{y \in F_x} D_x(y) = \coprod_{y \in Y} \coprod_{x \in F^y} E^y(x)$$

が得られる．すると $x \in Y$, $y \in F_x$ に対して $d(\tilde{f}(x), y) \leqq C$，すなわち $x \in F^y$ であるから $D_x(y)$, $E^y(x)$ がともに定義され，したがって全単射

$$f'_{x,y} \colon D_x(y) \to E^y(x)$$

がある．これをすべての $x \in Y, y \in F_x$ について貼りあわせて

$$f' = \coprod_{x \in Y} \coprod_{y \in F_x} f'_{x,y} \colon \coprod_{x \in Y} \coprod_{y \in F_x} D_x(y) = Y \to Y = \coprod_{y \in Y} \coprod_{x \in F^y} E^y(x)$$

が得られる．同様に考えて，f' の逆写像が定義できるから f' は全単射である．各 $(x,c) \in Y$ に対して $d(p \circ f'(x,c), \tilde{f}(x)) \leqq C$ であるから $p \circ f' \sim \tilde{f} \circ p$，したがって

$$\begin{aligned}
\psi \circ f' \circ \varphi &= i \circ p \circ f' \circ j \circ \varphi' \\
&\sim i \circ \tilde{f} \circ p \circ j \circ \varphi' \\
&\sim i \circ \tilde{f} \circ \varphi' \\
&= i \circ \varphi' \circ f \circ i \circ \varphi' \sim f
\end{aligned}$$

となり，f' が求める擬等長同型であることが分かった． □

4 粗幾何的な coloring の構成

以上の議論から，主定理の証明のためには，次の命題を証明すればよいことが分かった．

命題 4.1. X を large-scale doubling な固有距離空間とする．全単射である擬等長同型 $f\colon X \to X$ が条件

$$\lim_{x\to\infty} d(x, f(x)) = \infty \tag{$\sharp$}$$

を満たすならば，命題 3.1 の条件，つまり

(1) $X \setminus \bigcup_{m=1}^{N} F_m$ は有界
(2) 任意の $m = 1, 2, \ldots, N$ と $R \geqq 0$ に対して，$N_R(F_m) \cap N_R(f(F_m))$ は有界

を満たす $F_1, F_2, \ldots, F_N \subset X$ が存在する．

この $F_1, F_2, \ldots, F_N$ の構成のためには，次の補題が基本的である．これは，任意の固有距離空間 Y に対して $\dim \nu Y \leqq \operatorname{asdim} Y$ であることの証明で用いられた Dranishnikov-Keesling-Uspenskij の補題 [3, Lemma 2.9] を「線型制御つき」のバージョンに焼き直したものである．以下で，X の部分集合族 $\mathcal{U}$ が X を**ほとんど被覆**するとは，$\mathcal{U}$ の元すべての和集合 $\bigcup\mathcal{U}$ に対して $X \setminus \bigcup\mathcal{U}$ が有界となることである．

補題 4.2. X を固有距離空間とし，$\ell\text{-asdim}\, X = n < \infty$ とする．このとき，次のような $\lambda_0 > 0$ および $\varepsilon_0 > 0$ が存在する：関数 $L\colon X \to [0, \infty)$ が次の二条件

(a) $\lim_{x\to\infty} L(x) = \infty$,
(b) $|L(x) - L(y)| \leqq \lambda_0 d(x, y) + \lambda_0 \quad (x, y \in X)$

を満たすならば，X の部分集合族 $\mathcal{U}_i\ (i = 0, 1, \ldots, n)$ が存在して，次の (A)(B)(C)(D) を満たす．

(A) 任意の i に対して $\mathcal{U}_i$ は局所有限である．
(B) $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 \cup \cdots \mathcal{U}_n$ は X をほとんど被覆する．
(C) 任意の i および $A \in \mathcal{U}_i$, $x \in A$ に対して，$\operatorname{diam} A < L(x)$ である．
(D) 任意の i および $A, B \in \mathcal{U}_i$, $x \in A$ に対して，$A \neq B$ ならば $d(A, B) \geqq \varepsilon_0 L(x)$ である．

この補題の証明は，紙数の都合上，割愛する．ここでは補題を認めた上で，命題 3.1 を証明し，主定理の証明を完成させよう．以下では，X を large-scale doubling な固有距離空間とし，f を ($\sharp$) を満たす全単射擬等長同型とする．X が large-scale doubling であることの定義に現れる定数 $r_0 > 0$ を一つ固定する．

擬等長同型の定義から，定数 $A \geqq 1$ であって

$$A^{-1}d(x, y) - A \leqq d(f(x), f(y)) \leqq Ad(x, y) + A \tag{1}$$

$$A^{-1}d(x, y) - A \leqq d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leqq Ad(x, y) + A \tag{2}$$

となるようなものが存在する.

命題 2.9 により, $\ell\text{-asdim}\, X = n < \infty$ であるから, 補題 4.2 のような定数 $\lambda_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ が存在する. 必要なら ε_0 を小さく取りかえて,

$$\frac{\varepsilon_0}{3} \leqq 1 \tag{3}$$

が成り立つようにしておく. いま, $y = f^{-1}(x)$ とおくと, f^{-1} が擬等長写像であることより $x \to \infty$ のとき $y \to \infty$ だから,

$$\lim_{x\to\infty} d(x, f^{-1}(x)) = \lim_{x\to\infty} d(f(f^{-1}(x)), f^{-1}(x)) = \lim_{y\to\infty} d(f(y), y) = \infty \tag{4}$$

である.

そこで, 十分大きい $D > 0$ を取って, 関数 $L\colon X \to [0, \infty)$ を

$$L(x) = \frac{1}{D} \min\{d(x, f(x)), d(x, f^{-1}(x))\} \tag{5}$$

で定義する. この D をどの程度大きく取ればよいかは本稿の最後で明確にしよう. D の取り方には関係なく, いま見たことから L は補題 4.2 の条件 (a) を満たす. 更に L が補題 4.2 の条件 (b) を満たすことは, 次から分かる.

補題 4.3. 任意の $x, y \in X$ に対して,

$$|L(x) - L(y)| \leqq \frac{A+1}{D} d(x, y) + \frac{A}{D} \tag{6}$$

である.

証明. $x, y \in X$ とする. このとき

$$\begin{aligned} d(y, f(y)) &\leqq d(y, x) + d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) \\ &\leqq d(x, y) + d(x, f(x)) + Ad(x, y) + A \\ &= (A+1)d(x, y) + d(x, f(x)) + A \end{aligned} \tag{7}$$

である. よって, $|d(x, f(x)) - d(y, f(y))| \leqq (A+1)d(x, y) + A$ である. 同様に, $|d(x, f^{-1}(x)) - d(y, f^{-1}(y))| \leqq (A+1)d(x, y) + A$ も成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} |L(x) - L(y)| &= \frac{1}{D} \left| \min\{d(x, f(x)), d(x, f^{-1}(x))\} - \min\{d(y, f(y)), d(y, f^{-1}(y))\} \right| \\ &\leqq \frac{1}{D} \max\left\{ \left|d(x, f(x)) - d(y, f(y))\right|, \left|d(x, f^{-1}(x)) - d(y, f^{-1}(y))\right| \right\} \\ &\leqq \frac{1}{D}((A+1)d(x, y) + A) = \frac{A+1}{D} d(x, y) + \frac{A}{D}. \end{aligned} \tag{8}$$

である. 上の二番目の不等号をみるためには, $d(x, f(x)), d(y, f(y)), d(x, f^{-1}(x))$, $d(y, f^{-1}(y))$ のうち最小のものに注目すればよい. □

そこで，以下では $D>0$ は

$$\frac{A+1}{D} \leqq \lambda_0 \tag{9}$$

を満たすように十分大きく取ってあるものとしよう．すると，L は補題 4.2 の条件 (a)(b) をともに満たし，したがって条件 (A)(B)(C)(D) を満たすような X の部分集合族 $\mathcal{U}_i\,(i=0,1,\ldots,n)$ が存在する．

条件 (A)，つまり $\mathcal{U}_i$ が局所有限であることと X が固有距離空間であることより，$\mathcal{U}_i$ は可算集合である．よって

$$\mathcal{U}_i = \{U_{i,j} \mid j \in \mathbb{N}\} \tag{10}$$

と番号づけることができる．各 $U_{i,j}$ に対して点 $\bar{p}_{i,j} \in U_{i,j}$ を固定しよう．すると，再び $\mathcal{U}_i$ の局所有限性より $j \to \infty$ のとき $\bar{p}_{i,j} \to \infty$ である．更に，L は補題 4.2 の条件 (a) を満たすから，

$$\lim_{j\to\infty} L(\bar{p}_{i,j}) = \infty \tag{11}$$

である．よって，任意の i および $M>0$ に対して，$L(\bar{p}_{i,j}) \leqq M$ となる j は有限個しかない．したがって，番号づけ (10) を適当に変えることによって，

$$j<k \text{ ならば } L(\bar{p}_{i,j}) \leqq L(\bar{p}_{i,k}) \tag{12}$$

を満たすようにできる．

$\mathcal{U}_i = \{U_{i,j} \mid j \in \mathbb{N}\}$ を修正して，新しい集合族 $\{V_{i,j} \mid j \in \mathbb{N}\}$ をつくろう．そのために，まず $n_0 = 1$ として

$$A_{i,1} = \{k \in \mathbb{N} \mid \bar{p}_{i,k} \in B(\bar{p}_{i,n_0}, L(\bar{p}_{i,n_0}))\} \tag{13}$$

とする．一般に，$A_{i,k}\,(1 \leqq k < j)$ が定義されているとき，$n_{i,j-1} = \min(\mathbb{N} \setminus (A_{i,1} \cup \cdots \cup A_{i,j-1})$ として

$$A_{i,j} = \{k \in \mathbb{N} \setminus (A_{i,1} \cup \cdots \cup A_{i,j-1}) \mid \bar{p}_{i,k} \in B(\bar{p}_{i,n_{j-1}}, L(\bar{p}_{i,n_{j-1}}))\} \tag{14}$$

と定義する．これにより，$(A_{i,j})_{j=1}^{\infty}$ および $(n_{i,j})_{j=0}^{\infty}$ が帰納的に定義される．このとき $\mathcal{U}_i$ の局所有限性より $A_{i,j}$ は有限集合となる．更に，定義から分かるとおり

$$n_{i,j-1} \in A_{i,j} \tag{15}$$

なので，

$$\min A_{i,j} = n_{i,j-1} = \min(\mathbb{N} \setminus (A_{i,1} \cup \cdots \cup A_{i,j-1})) \tag{16}$$

となり，したがって $(n_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ は狭義単調増加で

$$\mathbb{N} = \coprod_{j\in\mathbb{N}} A_{i,j} \tag{17}$$

となる．

この分割を用いて，$i=0,1,\ldots,n$ および $j\in\mathbb{N}$ に対して

$$V_{i,j}=\bigcup_{k\in A_{i,j}}U_{i,k}, \tag{18}$$

$$p_{i,j}=\bar{p}_{i,n_{i,j-1}} \tag{19}$$

と定義する．このとき，$A_{i,j}$ の帰納的定義 (14) は

$$A_{i,j}=\{k\in\mathbb{N}\setminus(A_{i,1}\cup\cdots\cup A_{i,j-1})\,|\,\bar{p}_{i,k}\in B(p_{i,j},L(p_{i,j}))\} \tag{20}$$

となる．

$V_{i,j}$ および $p_{i,j}$ $(i=0,1,\ldots,N,\ j\in\mathbb{N})$ に対して成り立つ性質をまとめておく．

補題 4.4. 次が成立する．

(i) $V_{i,j}$ は有界集合である．
(ii) $\mathcal{V}=\{V_{i,j}\,|\,i=0,1,\ldots,N,\ j\in\mathbb{N}\}$ は局所有限であって X をほとんど被覆する．
(iii) $p_{i,j}\in V_{i,j}$.
(iv) $\lim_{j\to\infty}L(p_{i,j})=\infty$.
(v) $j<k$ ならば $L(p_{i,j})\leqq L(p_{i,k})$.
(vi) $j<k$ ならば $d(p_{i,j},p_{i,k})>L(p_{i,j})$.
(vii) $x\in V_{i,j}$, $j\neq k$ ならば $d(V_{i,j},V_{i,k})\geqq\varepsilon_0 L(x)$.

証明. (i) $\mathcal{U}_i$ の満たす条件 (C) より各 $U_{i,k}$ は有界集合であり，$A_{i,j}$ は有限集合なので，$V_{i,j}=\bigcup_{k\in A_{i,j}}U_{i,k}$ は有界集合である．

(ii) まず，$\mathcal{V}$ の局所有限性は $\mathcal{U}_i$ が局所有限であるという条件 (A) および，$V_{i,j}$ の定義から明らかである．また各 i に対して $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_{i,j}=\mathbb{N}$ なので，$\bigcup_{i=0}^{n}\bigcup_{j\in\mathbb{N}}V_{i,j}=\bigcup_{i=0}^{n}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}U_{i,k}$ である．よって，$\mathcal{U}_i\,(i=0,1,\ldots,n)$ が満たす条件 (B) から，$\mathcal{V}$ が X をほとんど被覆すると分かる．

(iii) $p_{i,j}=\bar{p}_{i,n_{i,j-1}}\in U_{i,n_{i,j-1}}$ であるが，(15) より $U_{i,n_{i,j-1}}\subset V_{i,j}$ となる．よって $p_{i,j}\in V_{i,j}$ である．

(iv)(v) $(n_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ が狭義単調増加であることと (11), (12) から分かる．

(vi) $j<k$ とすると，(15) から $n_{i,k-1}\in A_{i,k}$ であり，したがって，$n_{i,k-1}\notin A_{i,j}$ である．よって $A_{i,j}$ の定義 (20) から，$p_{i,k}=\bar{p}_{i,n_{i,k-1}}\notin B(p_{i,j},L(p_{i,j}))$ である．これは示すべきことである．

(vii) $\mathcal{U}_i$ の性質 (D) と，$V_{i,j}$ の作り方から分かる．□

さて，

$$\frac{A+1}{D}\leqq 1 \tag{21}$$

を満たすように $D>0$ を大きく取れば，次が成り立つ．

補題 4.5. 任意の $x\in V_{i,j}$ に対して，$d(x,p_{i,j})\leqq 3L(p_{i,j})+1$.

証明. 任意に $x \in V_{i,j}$ をとる．すると $x \in U_{i,k}$ となる $k \in \mathbb{N}$ であって

$$\bar{p}_{i,k} \in B(p_{i,j}, L(p_{i,j})) \tag{22}$$

となるものが存在する．このとき補題 4.3 より，

$$\begin{aligned} |L(\bar{p}_{i,k}) - L(p_{i,j})| &\leqq \frac{A+1}{D} d(\bar{p}_{i,k}, p_{i,j}) + \frac{A}{D} \\ &\leqq \frac{A+1}{D} L(p_{i,j}) + \frac{A}{D}, \end{aligned} \tag{23}$$

したがって，

$$\begin{aligned} L(\bar{p}_{i,k}) &\leqq L(p_{i,j}) + \frac{A+1}{D} L(p_{i,j}) + \frac{A}{D} \\ &= \left(1 + \frac{A+1}{D}\right) L(p_{i,j}) + \frac{A}{D} \end{aligned} \tag{24}$$

である．よって，$\mathcal{U}_i$ の性質 (C) より，

$$\begin{aligned} d(x, p_{i,j}) &\leqq d(x, \bar{p}_{i,k}) + d(\bar{p}_{i,k}, p_{i,j}) \\ &\leqq \operatorname{diam} U_{i,k} + L(p_{i,j}) \\ &\leqq L(\bar{p}_{i,k}) + L(p_{i,j}) \\ &\leqq \left(1 + \frac{A+1}{D}\right) L(p_{i,j}) + \frac{A}{D} + L(p_{i,j}) \\ &\leqq \left(2 + \frac{A+1}{D}\right) L(p_{i,j}) + \frac{A}{D} \end{aligned} \tag{25}$$

である．よって，D を (21) のように大きく取れば，$d(x, y) \leqq 3L(p_{i,j}) + 1$ である． □

さて，$V_{i,j}$ の $\varepsilon_0 L(p_{i,j})/3$ 近傍を $W_{i,j}$ とする：

$$W_{i,j} = N_{\varepsilon_0 L(p_{i,j})/3}(V_{i,j}) \quad (i = 0, 1, \ldots, n,\ j \in \mathbb{N}). \tag{26}$$

$V_{i,j}$ は有界集合であったので（補題 4.4 (i)），$W_{i,j}$ も有界集合である．補題 4.5 より，直ちに $\operatorname{diam} V_{i,j} \leqq 6L(p_{i,j}) + 2$ を得るから，上の定義と ε_0 の取り方 (3) より，

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} W_{i,j} &\leqq 6L(p_{i,j}) + 2 + \frac{2\varepsilon_0 L(p_{i,j})}{3} \\ &\leqq 8L(p_{i,j}) + 2, \end{aligned} \tag{27}$$

すなわち，

$$L(p_{i,j}) \geqq \frac{1}{8} \operatorname{diam} W_{i,j} - \frac{1}{4} \tag{28}$$

である．更に，D を

$$\frac{5(A+1)}{D} \leqq \frac{1}{2}, \quad \frac{2A+1}{D} \leqq \frac{1}{8} \tag{29}$$

を満たすように大きく取れば，次が成り立つ．

補題 4.6. $x \in W_{i,j}$ ならば $\operatorname{diam} W_{i,j} \leqq M(x)$ である．ここで，

$$M(x) = 16L(x) + 4. \tag{30}$$

証明. $x \in W_{i,j}$ とすると，補題 4.5 と定義 (26)，および ε_0 の取り方 (3) より，

$$\begin{aligned} d(x, p_{i,j}) &\leqq 4L(p_{i,j}) + 1 + \frac{\varepsilon_0 L(p_{i,j})}{3} \\ &\leqq 5L(p_{i,j}) + 1 \end{aligned} \tag{31}$$

である．したがって，補題 4.3, (29) より

$$\begin{aligned} L(x) &\geqq L(p_{i,j}) - \frac{A+1}{D} d(x, p_{i,j}) - \frac{A}{D} \\ &\geqq \left(1 - \frac{5(A+1)}{D}\right) L(p_{i,j}) - \frac{2A+1}{D} \\ &\geqq \frac{1}{2} L(p_{i,j}) - \frac{1}{8}, \end{aligned} \tag{32}$$

よって，(28) より

$$L(x) \geqq \frac{1}{16} \operatorname{diam} W_{i,j} - \frac{1}{4}, \tag{33}$$

つまり，$\operatorname{diam} W_{i,j} \leqq 16L(x) + 4 = M(x)$ である． □

上の評価 (32) と補題 4.4 (iv) より，十分大きな $j_0 \in \mathbb{N}$ を取れば

$$j \geqq j_0,\ x \in W_{i,j} \text{ のとき常に } L(x) \geqq \max\{1, 2r_0\} \tag{34}$$

となることが分かる．但し，r_0 は X が large-scale doubling であることの定義に現れる定数である．以下では，このような j_0 を一つ取って固定する．

補題 4.7. 次のような $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在する：各 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対して適当な分割 $\{j \in \mathbb{N} \mid j \geqq j_0\} = \coprod_{s=1}^{N_1} C_{i,s}$ を取って，各 $s \in \{1, 2, \ldots, N_1\}$ に対して

$$j, k \in C_{i,s} \text{ ならば } f(W_{i,j}) \cap W_{i,k} = \emptyset \tag{35}$$

が成り立つようにできる．

証明. 以下では $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ を固定し，$V_{i,j}, W_{i,j}, p_{i,j}$ をそれぞれ単に V_j, W_j, p_j と書く．その上で，$j \geqq j_0$ に対して

$$D_j^{\pm} = f^{\pm 1}(W_j), \tag{36}$$

$$B_j^{\pm} = \{k > j \mid D_j^{\pm} \cap W_k \neq \emptyset\} \tag{37}$$

とおく．ここで $f^{\pm 1}(W_j)$ は $f(W_j)$ と $f^{-1}(W_j)$ を合わせて表示したものである．

主張 4.1. $j(\geqq j_0)$ に無関係な定数 N_0 が存在して，$|B_j^\pm| \leqq N_0$.

主張 4.1 の証明. 簡単のため

$$c_j = 48\varepsilon_0^{-1} \cdot \operatorname{diam} D_j^\pm + 4 \tag{38}$$

とおき，$B_j^\pm$ を次のように二つの部分に分ける：

$$B_j^\pm(1) = \{k \in B_j^\pm \mid M(p_k) \leqq c_j\} \tag{39}$$

$$B_j^\pm(2) = \{k \in B_j^\pm \mid M(p_k) > c_j\} \tag{40}$$

先に $B_j^\pm(2)$ について考える．$|B_j^\pm(2)| \leqq 1$ を証明しよう．そのため $k, l \in B_j^\pm(2)$, $k > l$ とする．$k \in B_j^\pm(2)$ より $M(p_k) > c_j$ だが，この条件は $\varepsilon_0(M(p_k)-4)/48 > \operatorname{diam} D_j^\pm$ を意味する．いま $k, l \in B_j^\pm$ より W_k, W_l はともに $D_j^\pm$ と交わり，しかも定義 (26), (30) および補題 4.4 (vii) により，

$$\begin{aligned} d(W_k, W_l) &\geqq d(V_k, V_l) - \frac{\varepsilon_0 L(p_k)}{3} - \frac{\varepsilon_0 L(p_l)}{3} \\ &\geqq d(V_k, V_l) - \frac{2\varepsilon_0 L(p_k)}{3} \\ &\geqq \varepsilon_0 L(p_k) - \frac{2\varepsilon_0 L(p_k)}{3} = \frac{\varepsilon_0 L(p_k)}{3} \\ &= \frac{\varepsilon_0 (M(p_k) - 4)}{48} > \operatorname{diam} D_j^\pm \end{aligned} \tag{41}$$

となる．よって，$k = l$ でなければならないから

$$|B_j^\pm(2)| \leqq 1 \tag{42}$$

である．

次に，$|B_j^\pm(1)|$ を評価するため

$$E_j^\pm = N_{c_j}(D_j^\pm) \tag{43}$$

とおくと，(1), (2) と補題 4.6 より，$R_0 = 21A \cdot (96\varepsilon_0^{-1} + 1) + 8$ に対して

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} E_j^\pm &\leqq \operatorname{diam} D_j + 2c_j \\ &= (96\varepsilon_0^{-1} + 1) \operatorname{diam} D_j^\pm + 8 \\ &\leqq (96\varepsilon_0^{-1} + 1)(AM(p_j) + A) + 8 \\ &= 16A(96\varepsilon_0^{-1} + 1)L(p_j) + (4 + A)(96\varepsilon_0^{-1} + 1) + 8 \\ &\leqq R_0 L(p_j) \end{aligned} \tag{44}$$

ここで最後の不等号では，$A \geqq 1$ であること，および (34) より $L(p_j) \geqq 1$ となることを用いた．一方，

$$\text{任意の } k \in B_j^\pm(1) \text{ に対して } p_k \in E_j^\pm \tag{45}$$

である．実際，$p_k \in W_k$ かつ $W_k \cap D_j^{\pm} \neq \emptyset$ となることから $d(p_k, D_j^{\pm}) \leqq \operatorname{diam} W_k \leqq M(p_k) \leqq c_j$ なので $p_k \in N_{c_j}(D_j^{\pm}) = E_j^{\pm}$ である．また，

$$k, l \in B_j^{\pm}(1), k < l \text{ のとき } d(p_k, p_l) > L(p_j) \tag{46}$$

となる．実際，補題 4.4 (vi) により $d(p_k, p_l) > L(p_k)$ であり，一方 $k \in B_j^{\pm}$ より $k > j$ であるから補題 4.4 (v) より $L(p_k) \geqq L(p_j)$ となるので，合わせて (46) を得る．

$E_j^{\pm}$ の直径についての評価 (44) により，$E_j^{\pm}$ はある半径 $2R_0L(p_j)$ の閉球体 B に含まれている．これと (45), (46) を合わせると，$\{p_k \mid k \in B_j^{\pm}(1)\}$ が B の $L(p_j)$ 離散部分集合であることが分かる．一方，$j \geqq j_0$ であり $p_j \in W_j$ だから，(34) より $L(p_j) \geqq 2r_0$ が成立する．以上から，補題 2.6 により，j には無関係な定数 N_0' が存在して

$$|B_j^{\pm}(1)| \leqq N_0' \tag{47}$$

である．(42), (47) を合わせれば，$N_0 = N_0' + 1$ とおくとき

$$|B_j^{\pm}| = |B_j^{\pm}(1) \cup B_j^{\pm}(2)| \leqq N_0' + 1 = N_0 \tag{48}$$

である．主張 4.1 が証明された． □

W_j はすべて有界集合であるから，f が擬等長同型であることより，整数の列

$$j_0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots \tag{49}$$

を適当に選ぶと，$F_\mu = \{j \in \mathbb{N} \mid n_{\mu-1} \leqq j < n_\mu\}$ とおくとき

$$j \in F_\mu,\ k \in F_\nu,\ f(W_j) \cap W_k \neq \emptyset \text{ ならば } |\mu - \nu| \leqq 1 \tag{50}$$

となるようにできる．更に，D を大きくとり

$$D > 20 \tag{51}$$

とすると，次が成り立つ．

主張 4.2. 任意の $j \geqq j_0$ に対して，$f(W_j) \cap W_j = \emptyset$.

主張 4.2 の証明. $j \geqq j_0$, $x \in W_j$ とすると，関数 L の定義 (5) と (34), (51) により，

$$d(x, f(x)) \geqq D \cdot L(x) > 20L(x) \geqq 16L(x) + 4 = M(x) \geqq \operatorname{diam} W_j \tag{52}$$

であるから $f(x) \notin W_j$ である． □

主張 4.3. 各 $\mu \in \mathbb{N}$ に対して，関数 $c_\mu\colon F_\mu \to \{1, 2, \ldots, 2N_0 + 1\}$ が存在して，$j, k \in F_\mu$, $f(W_j) \cap W_k \neq \emptyset$ のとき常に $c_\mu(j) \neq c_\mu(k)$ が成り立つ．

主張 4.3 の証明. $F_\mu = \{n_{\mu-1}, n_{\mu-1}+1, \dots, n_\mu - 1\}$ であった. $c_\mu(j)$ の値を $j = n_\mu - 1$ から順番に j が減少していく帰納法によって決めていく. まず $c_\mu(n_\mu - 1) = 1$ と定義する. $c_\mu(j+1)$ まで定義されたとして, $j \geqq n_{\mu-1}$ であるとする. このとき $c_\mu(j)$ を定義しよう.

$$\tilde{B}_j = \{k \in F_\mu \mid j < k \text{ かつ } (f(W_j) \cap W_k \neq \emptyset \text{ または } f(W_k) \cap W_j \neq \emptyset)\} \tag{53}$$

とおく. $f(W_j) \cap W_k \neq \emptyset$, $f(W_k) \cap W_j \neq \emptyset$ はそれぞれ $D_j^+ \cap W_k \neq \emptyset$, $D_j^- \cap W_k \neq \emptyset$ と同値であるから,

$$\tilde{B}_j \subset B_j^+ \cup B_j^- \tag{54}$$

である. よって, 主張 4.1 より $|\tilde{B}_j| \leqq |B_j^+| + |B_j^-| \leqq 2N_0$ である. したがって, $c_\mu(j) \in \{1, 2, \dots, 2N_0 + 1\}$ を, すべての $k \in \tilde{B}_j$ に対して $c_\mu(j) \neq c_\mu(k)$ であるように取ることができる. これで c_μ の構成が終わった. 主張 4.2 も考慮すると, c_μ が求める条件を満たすことが分かる. □

最後に $N_1 = 4N_0 + 2$ とおき, $c\colon \{j \in \mathbb{N} \mid j \geqq j_0\} \to \{1, 2, \dots, N_1\}$ を

$$c(j) = \begin{cases} c_\mu(j) & j \in F_\mu \text{ で } \mu \text{ は奇数} \\ c_\mu(j) + 2N_0 + 1 & j \in F_\mu \text{ で } \mu \text{ は偶数} \end{cases} \tag{55}$$

で定め, $C_{i,s} = c_\mu^{-1}(s)\,(s = 1, 2, \dots, N_1)$ とする. このとき (50) により分割 $\{j \in \mathbb{N} \mid j \geqq j_0\} = \coprod_{s=1}^{N_1} C_{i,s}$ は求める条件を満たす. 補題 4.7 が証明された. □

さて, 目標の命題 4.1 を証明しよう. 補題 4.7 の N_1 と分割 $\{j \in \mathbb{N} \mid j \geqq j_0\} = \coprod_{s=1}^{N_1} C_{i,s}$ を取り, $N = (n+1)N_1$ とおく. このとき $i = 0, \dots, n$ および $s = 1, \dots, N_1$ に対して

$$F_{iN_1+s} = \bigcup_{j \in C_{i,s}} V_{i,j} \tag{56}$$

とおけば, $F_1, F_2, \dots, F_N$ は命題 4.1 が要求する条件を満たすことを以下で証明する.

まず, $\bigcup_{m=1}^N F_m = \bigcup_{i=0}^n \bigcup_{j \geqq j_0} V_{i,j}$ であるから, 補題 4.4 (i), (ii) より, $X \setminus \bigcup_{m=1}^N F_m$ は有界である. 次に, 任意に $R > 0$ および $m = iN_1 + s\,(i = 0, \dots, n,\ s = 1, \dots, N_1)$ を与えるときに $S = N_R(F_m) \cap N_R(f(F_m))$ が有界であることを示そう. この集合 S は

$$S = \bigcup_{j,k \in C_{i,s}} (N_R(V_{i,j}) \cap N_R(f(V_{i,k}))) \tag{57}$$

と表すことができる. この右辺の $\bigcup$ の内部, つまり $S_{j,k} = N_R(V_{i,j}) \cap N_R(f(V_{i,k}))$ は補題 4.4 (i) より有界集合である. この $S_{j,k}\,(j, k \in C_{i,s})$ が有限個の (j, k) を除いて空集合であることが分かれば, S が有界集合であると結論できる.

さて, 補題 4.4 (iv) から, $J \in \mathbb{N}$ が存在して, $j \geqq J$ のとき常に $\varepsilon_0 L(p_{i,j})/3 > 2R$ となる. この J について次が分かる.

補題 4.8. $j,k\in C_{i,s}$ とするとき，$j\geqq J$ ならば $S_{j,k}=\emptyset$ である．また，$K\in\mathbb{N}$ が存在して，$j<J,\ k\geqq K$ ならば $S_{j,k}=\emptyset$ である．

証明. まず，前半を示すために $j,k\in C_{i,s}$, $j\geqq J$ とする．$x\in S_{j,k}$ であるとすると，$R<L(p_{i,j})/6$ より $d(x,y)<\varepsilon_0 L(p_{i,j})/6$, $d(x,z)<\varepsilon_0 L(p_{i,j})/6$ となるような $y\in V_{i,j}$, $z\in f(V_{i,k})$ がある．すると，$d(z,y)<\varepsilon_0 L(p_{i,j})/3$ であるから，

$$z\in f(V_{i,k})\cap N_{\varepsilon_0 L(p_{i,j})/3}(V_{i,j})=f(V_{i,k})\cap W_{i,j}\subset f(W_{i,k})\cap W_{i,j} \tag{58}$$

となるが，いま (35) が成り立っているから $f(W_{i,k})\cap W_{i,j}=\emptyset$ となり $z\in\emptyset$ という矛盾を生じる．したがって，$S_{j,k}=\emptyset$ である．

次に，後半を示すために，$T=f^{-1}(N_{3R}(\bigcup_{j<J}V_{i,j}))$ を考える．補題 4.4 (i) および f が擬等長同型であることより，T は有界集合，したがってコンパクトな閉包をもつ．よって補題 4.4 (ii) により，大きな K を取れば，$k\geqq K$ のとき常に $T\cap V_{i,k}=\emptyset$，すなわち $N_{3R}(\bigcup_{j<J}V_{i,j}))\cap f(V_{i,k})=\emptyset$ となる．したがって特に，任意の $j<J,k\geqq K$ なる $j,k\in C_{i,s}$ に対して $S_{j,k}=N_R(V_{i,j})\cap N_R(f(V_{i,k}))=\emptyset$ である． □

この補題 4.8 から，$j<J,\ k<K$ を満たす有限個の (j,k) を除けば $S_{j,k}=\emptyset$ であることが分かり，したがって S は有界集合と分かる．以上で命題 4.1 が示された．これで，主定理 1.1 も証明できた．

注意 4.9. 命題 4.1 で「十分大きく」取った定数 $D>0$ が実際に満たすべき条件は (9), (21), (29), (51) である．これらをまとめると，D は

$$D>\max\left\{20, 16A+8, \frac{A+1}{\lambda_0}\right\}$$

を満たせばよいことが分かる．

参考文献

[1] Sergei Buyalo and Viktor Schroeder, *Elements of asymptotic geometry.* EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2007.

[2] Eric K. van Douwen, *βX and fixed-point free maps.* Topology Appl. **51** (1993), no. 2, 191–195.

[3] A. N. Dranishnikov, J. Keesling and V.V. Uspenskij, *On the Higson corona of uniformly contractible spaces.* Topology **37** (1998), no. 4, 791–803.

[4] J. Higes, *Assouad-Nagata dimension of locally finite groups and asymptotic cones.* Topology Appl. **157** (2010), no. 17, 2635–2645.

[5] Urs Lang and Thilo Schlichenmaier, *Nagata dimension, quasisymmetric embeddings, and Lipschitz extensions.* Int. Math. Res. Not. (2005), no. 58, 3625–3655.

[6] Kotaro Mine and Atsushi Yamashita, *Metric compactifications and coarse structures.* preprint, available at `http://arxiv.org/abs/1106.1672`
[7] Piotr W. Nowak, *On exactness and isoperimetric profiles of discrete groups.* J. Funct. Anal. **243** (2007), no. 1, 323–344.
[8] J. Roe, *Lectures on coarse geometry.* University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI (2003).