数理解析研究所講究録
第 1884 巻 2014 年 86-92

Some theorems on invariance of property C under open mappings and closed mappings

久留米工業高等専門学校
菰田智恵子 (Chieko Komoda)

1 はじめに

この小論は、埼玉大学の木村孝先生との共同研究である。

この小論では、空間はすべて正規空間とし、写像はすべて連続で全射とする。

はじめに、この小論で考える概念の定義を述べる。まず、被覆次元の partition による同値命題を無限次元に拡張した A-weakly infinite-dimensional 及び、S-weakly infinite-dimensional の定義を述べる。

定義 1.1. (Engelking [4] 参照) 空間 X に対し、

X : *A-weakly infinite-dimensional* (以下、A-w.i.d. と略記する)

$\overset{def}{\iff}$ $\forall\{(A_i, B_i) : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of pairs of disjoint closed subsets of X

$\exists\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of closed subsets of X

s.t. L_i : a partition between A_i and B_i $(i \in \mathbb{N})$, $\underline{\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i = \emptyset}$

X : *S-weakly infinite-dimensional* (以下、S-w.i.d. と略記する)

$\overset{def}{\iff}$ $\forall\{(A_i, B_i) : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of pairs of disjoint closed subsets of X

$\exists\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of closed subsets of X

s.t. L_i : a partition between A_i and B_i $(i \in \mathbb{N})$, $\underline{\bigcap_{i=1}^{n} L_i = \emptyset \quad \text{for some } n}$

次に、被覆次元の Ostrand による特徴付けを無限次元に拡張した C-space 及び、finite C-space の定義を述べる。

定義 1.2. 空間 X に対し、

X : *C-space* (Addis and Gresham [2])

$\overset{def}{\iff}$ $\forall\{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of open covers of X

$\exists\{\mathcal{H}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of collections of pairwise disjoint open subsets of X

s.t. $\mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i \quad (i \in \mathbb{N})$, $\underline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i : \text{cover of } X}$

X : *finite C-space* (Borst [3])

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of <u>finite</u> open covers of X

$\exists\{\mathcal{H}_i : i \in \mathbb{N}\}$: a sequence of collections of pairwise disjoint open subsets of X

s.t. $\mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i \quad (i \in \mathbb{N})$, $\underline{\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i : \text{cover of } X \text{ for some } n}$

A-w.i.d.、S-w.i.d.、C-space、finite C-space の関係については、「S-w.i.d. $\Longrightarrow$ A-w.i.d.」が成り立つことは明らかである。また、「コンパクト空間 X に対して、X : S-w.i.d. $\Longleftrightarrow$ X : A-w.i.d. 及び X : C-space $\Longleftrightarrow$ X : finite C-space」が成り立つことも明らかである。さらに、「C-space $\Longrightarrow$ A-w.i.d.」及び「finite C-space $\Longrightarrow$ S-w.i.d.」が成り立つことが知られている。しかしながら、コンパクト距離空間に対してさえも、「C-space $\Longleftrightarrow$ A-w.i.d.」となるかどうか知られていない。

2 有限次元 dim に関する写像定理

有限次元に関する古典的な写像定理として次が知られている。

<u>Raising Mapping Theorem</u>

定理 2.1. (Hurewitz [5] 1927 年)

$f : X \longrightarrow Y$: *closed*

X, Y : *separable metric*

$\exists k \geq 1$ *s.t.* $|f^{-1}(y)| \leq k$ *for every* $y \in Y$

$\Longrightarrow \quad \dim Y \leq \dim X + (k-1)$

Zarelua は 1969 年に上の定理を X, Y : normal に拡張した。

<u>Lowering Mapping Theorem</u>

定理 2.2. (Hurewicz & Wallman [7] 1941 年)

$f : X \longrightarrow Y$: *closed*

X, Y : *separable metric*

$\exists k \geq 1$ *s.t.* $\dim f^{-1}(y) \leq k$ *for every* $y \in Y$

$\Longrightarrow \quad \dim X \leq \dim Y + k$

Skljarenko は 1962 年に上の定理を X : normal, Y : paracompact に拡張した。さらに、Pasynkov は 1965 年に X : normal, Y : metacompact に拡張した。しかしながら、Y : normal に拡張できないことが知られている。

3 A-weakly infinite-dimensional space と C-space に関する写像定理

この説では、無限次元に関する写像定理を考えたい。

Raising Mapping Theorem

A-w.i.d. に関しては、Polkowski が 1983 年に次の定理を証明した。

定理 3.1. (Polkowski [9])
$f : X \longrightarrow Y$: *closed*
X : *countably paracompact*
$\exists k \geq 1$ *s.t.* $|f^{-1}(y)| \leq k$ *for every* $y \in Y$

X : *A-w.i.d.* $\Longrightarrow$ Y : *A-w.i.d.*

我々は、C-space に関しても同様な結果が成り立つことを証明した。

定理 3.2.
$f : X \longrightarrow Y$: *closed*
X : *countably paracompact*
$\exists k \geq 1$ *s.t.* $|f^{-1}(y)| \leq k$ *for every* $y \in Y$

X : *C-space* $\Longrightarrow$ Y : *C-space*

さらに、Polkowski は、先の 1983 年の論文で A-w.i.d. に関して次の定理を証明した。

定理 3.3. (Polkowski [9])
$f : X \longrightarrow Y$
X : *compact*
$|f^{-1}(y)| < \mathfrak{c}$ *for every* $y \in Y$

X : *A-w.i.d.* $\Longrightarrow$ Y : *A-w.i.d.*

一方、C-space に関しては、R. Pol が 1996 年に次の定理を証明した。

定理 3.4. (R. Pol [8])
$f : X \longrightarrow Y$
X : *compact metric*
$|f^{-1}(y)| < \infty$ *for every* $y \in Y$

X : *C-space* $\Longrightarrow$ Y : *C-space*

我々は、C-space に関しても Polkowski の定理と同様な結果が成り立つことを証明した。

定理 3.5.
$f : X \longrightarrow Y$
X : *compact*
$|f^{-1}(y)| < \mathfrak{c}$ *for every* $y \in Y$

X : *C-space* $\Longrightarrow$ Y : *C-space*

Lowering Mapping Theorem

Hattori & Yamada は 1989 年に次の定理が成り立つことを証明した。

定理 3.6. (Hattori & Yamada [6])
(i) $f : X \longrightarrow Y$: *closed*
X : *coutably paracompact* あるいは *hereditarily normal*
$f^{-1}(y)$: *A-w.i.d. for every* $y \in Y$

Y : *C-space* $\Longrightarrow$ X : *A-w.i.d.*

(ii) $f : X \longrightarrow Y$: *closed*
X : *paracompact* あるいは *hereditarily normal*
$f^{-1}(y)$: *C-space for every* $y \in Y$

Y : *C-space* $\Longrightarrow$ X : *C-space*

注. (1) (ii) より、X, Y : C-space で $X \times Y$: paracompact あるいは hereditarily normal であるとき、$X \times Y$: C-space となることがわかる。
(2)(i) において、'$f^{-1}(y)$: C-space' を '$f^{-1}(y)$: A-w.i.d.' に置き換えられるか？

A-w.i.d. に関する写像定理において、Polkowski は先の 1983 年の論文で、開写像でファイバーが有限である場合についても言及している。我々は、C-space に関しても、同様な結果が成り立つことを証明した。

Rising Mapping Theorem

Polkowski は、A-w.i.d. 及び S-w.i.d. に関して次の定理を証明した。

定理 3.7. (Polkowski [9])
(1) $f : X \longrightarrow Y$: *open*
Y : *countably paracompact*
$|f^{-1}(y)| < \infty$ *for every* $y \in Y$

X : *A-w.i.d.* $\Longrightarrow$ Y : *A-w.i.d.*

(2) $f : X \longrightarrow Y$: *open*
X : *metacompact*
$|f^{-1}(y)| < \infty$ *for every* $y \in Y$

X : *S-w.i.d.* $\Longrightarrow$ Y : *S-w.i.d.*

我々は、C-space 及び finite C-space に関しても、Polkowski の定理と同様な結果が成り立つことを証明した。

定理 3.8.
(1) $f : X \longrightarrow Y$: *open*
Y : *countably paracompact and collectionwise normal*
$|f^{-1}(y)| < \infty$ *for every* $y \in Y$

X : *C-space* $\Longrightarrow$ Y : *C-space*

(2) $f : X \longrightarrow Y$: *open*
X : *metacompact*
$|f^{-1}(y)| < \infty$ *for every* $y \in Y$

X : *finite C-space* $\Longrightarrow$ Y : *finite C-space*

Lowering Mapping Theorem

Polkowski は、A-w.i.d. 及び S-w.i.d. に関して、次の定理を証明した。ただし、S-w.i.d. に関する写像定理では、開写像に加えて閉写像であることも仮定している。

定理 3.9. (Polkowski [9])
(1) $f : X \longrightarrow Y$: *open*
X : *countably paracompact*
$|f^{-1}(y)| < \infty$ *for every* $y \in Y$

Y : *A-w.i.d.* $\Longrightarrow$ X : *A-w.i.d.*

(2) $f : X \longrightarrow Y$: <u>*open and closed*</u>
Y : *metacompact*
$|f^{-1}(y)| < \infty$ *for every* $y \in Y$

Y : *S-w.i.d.* $\Longrightarrow$ X : *S-w.i.d.*

我々は、C-space 及び finite C-space に関しても、Polkowski の定理と同様な結果が成り立つことを証明した。ただし、finite C-space に関する写像定理では、Polkowski の定理と同様にして、開写像に加えて閉写像であることも仮定している。

定理 3.10.

(1) $f : X \longrightarrow Y$: *open*
X : *countably paracompact and collectionwise normal*
$|f^{-1}(y)| < \infty$ *for every* $y \in Y$

Y : *C-space* $\Longrightarrow$ X : *C-space*

(2) $f : X \longrightarrow Y$: *open and closed*
Y : *metacompact*
$|f^{-1}(y)| < \infty$ *for every* $y \in Y$

Y : *finite C-space* $\Longrightarrow$ X : *finite C-space*

参考文献

[1] P. Alexandroff, *Über abzählbar-fache offene Abbildungen*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS 13 (1936), 295-299.

[2] D. F. Addis and J. H. Gresham, *A class of infinite-dimensional spaces. Part :* *Dimension theory and Alexandroff's problem*, Fund. Math. 101 (1978), 195-205.

[3] P. Borst, *Some remarks concerning C-spaces*, Preprint

[4] R. Engelking, Theory of Dimensions, Finite and Infinite, Heldermann Verlag, 1995.

[5] H. Hurewicz, *Über stetige Bilder von Punktmengen (Zweite Mitteilung)*, Proc. Akad. Amsterdam 30 (1927), 159-165.

[6] Y. Hattori and K. Yamada, *Closed pre-images of C-spaces*, Math. Japonica 34(1989), 555-561.

[7] H. Hurewicz and H. Wallman, Dimension Theory, Princeton, 1941.

[8] R. Pol, *On light mappings without perfect fibers on compacta*, Tsukba J. Math. 20(1996), 11-19.

[9] L. Polkowski, *Some theorems on invariance of infinite dimension under open and closed mappings*, Fund. Math. 119(1983), 11-34.