

拡散層厚さに応じた近似理論によるループ管内の熱音響振動の解析

大阪大学 大学院基礎工学研究科 兵頭弘晃, 杉本信正

Hiroaki Hyodo, Nobumasa Sugimoto

Department of Mechanical Science, Graduate School of Engineering Science,
University of Osaka

1. はじめに

壁面に沿って温度勾配を与えた流路内の気体は、粘性や熱伝導性による拡散があるにもかかわらず不安定化することがある。このような現象は熱音響現象とよばれており、熱エネルギーと音の力学的エネルギーの相互変換が行われている。この現象を利用した熱機関が注目を集めており、様々な研究が行われている。最近では進行波を用いると定在波より高効率の熱機関が実現できることから、ループ管路を用いた熱音響式熱機関が考案されている[1]。しかしこれらの研究は実験的取り扱いが多く、理論の研究はあまり多くない。熱音響現象の理解と熱機関の設計のためにも理論の確立が必要とされる。

これまでの理論研究としては、線形の範囲で流路が温度勾配の代表長さに比して小さいとする細管近似の下に、調和振動を仮定するロット(Rott)の理論が唯一のものである[2,3]。これに対して、壁面での拡散層の厚さが管路の径に比べて十分薄いとすると境界層理論によって、古典的な熱音響現象であるタコニス振動について気体が不安定化する臨界条件が求められ[4,5]、さらにはその理論の非線形領域への拡張も行われてきた[6,7]。しかし、最近の熱音響式熱機関では、薄い平板を積層したものや、多くの狭い流路の束からなるいわゆるスタックとよばれるものを使用している。ループ管型熱機関において、スタック内の狭い細管の中に対しても境界層理論が適用され、臨界条件が求められている[8]。その結果は実験等により得られた臨界条件[9,10]と比較され、かなり細い流路でも境界層理論が十分適用できることが示された。しかしさらに流路が小さくなった場合には、当然ながら境界層理論は破綻し適用できなくなる。

最近、拡散層の厚さが管径に比べて薄いという制限を排除し、細管近似の下で線形理論の範囲であるが一般的に成り立つ熱音響波動方程式が導出された[11]。この方程式は拡散層の厚さに対する流路の大小に応じて近似することができる。拡散層が厚い場合の近似を用いれば十分狭い流路を持つスタックに対しても臨界条件を得られることが期待される。

本研究では、流路が狭いスタックに対しては、流路に対して拡散層が厚い場合に近似した拡散・波動方程式を、スタック以外の流路に対しては、流路に対し拡散層が薄い場合に近似した波動方程式をそれぞれ適用する。ループ管の各領域において特定の温度分布を与えて波動方程式の解析解を求め、それらを各領域の境界で接合条件を課して結ぶことで周波数方程式を求める。その周波数方程式の実数角周波数の解を数値的に求めることで臨界条件を計算する。この臨界条件を導出するとともに、ループ管内の臨界振動状態やエネルギー増幅についても議論を行う。

2. ループ管モデル

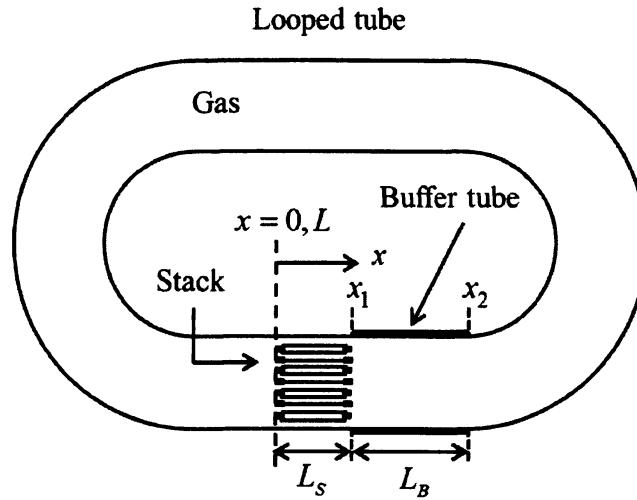


図 1: ループ管のモデル

図 1 のようなスタックを挿入したループ管路を考える．ループ管路は一定断面積の流路とする．スタックの左端を室温 T_0 に保ち，右端を高温 T_1 に保つ．高温端から温度が常温と見なせる区間をバッファチューブと呼び，その断面積は他の常温領域の管のそれに等しい．ループ管に沿って x 軸を図 1 のようにとり， $0 \leq x \leq x_1$ の区間をスタック， $x_1 \leq x \leq x_2$ をバッファチューブ， $x_2 \leq x \leq L$ を温度一定の流路の区間とし， $x=L$ でループを一周する．

スタック内部の細管内の気体に対しては，拡散層厚さに対してスタック流路径 R_S が小さい場合の拡散・波動方程式[11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\alpha_e}{a_e^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\frac{4}{3} \gamma - (\gamma - 1) \text{Pr} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right. \\ \left. - \left[\frac{4}{3} \gamma (2 + \beta + \text{Pr}) - (\gamma - 1) \text{Pr} \right] \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

を用いる．ここで α_e は

$$\alpha_e = \frac{a_e^2 R_S^2}{8 \gamma \nu_e} \quad (2.2)$$

で表される拡散率である．式中の p' は超過圧力， R_S はスタック管半径， a_e は気体の局所断熱音速， ν_e は気体の動粘度であり， Pr と γ はそれぞれプラントル数と比熱比である．ここで β は，気体の粘性率 μ_e ，熱伝導率 k_e の温度依存性を表す：

$$\frac{k_e}{k_0} = \left(\frac{T_e}{T_0} \right)^\beta, \quad \frac{\mu_e}{\mu_0} = \left(\frac{T_e}{T_0} \right)^\beta. \quad (2.3)$$

スタックの外部では、拡散層厚さに対してスタックの外側の流路半径 R が大きいとする境界層理論を用いた熱音響波動方程式[11]

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{2a_e^2 \sqrt{\nu_e}}{R} \left[C \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \right) + (C + C_T) \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad (2.4)$$

に従うものとする。ここで C, C_T は

$$C = 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\text{Pr}}}, \quad C_T = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\sqrt{\text{Pr} + \text{Pr}}} \quad (2.5)$$

で定義される定数であり、 $-1/2$ 階微分は

$$\frac{\partial^{-1/2} \phi}{\partial t^{-1/2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{\phi(x, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \quad (2.6)$$

で定義される。

3. 周波数方程式の導出

ループ管の各区間に対して解析解を導出し、それらに区間の接合箇所では接合条件を課すことで周波数を決定する方程式が得られる。

スタック内に適用される拡散・波動方程式(2.1)は圧力勾配に対し、解を

$$\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} = g(t) T_e(x) \quad (3.1)$$

の形を仮定する。 g は時間 t に対する未知の関数である。これを(2.1)に代入することでスタック内の温度分布

$$\frac{T_e}{T_0} = \left(1 - \frac{x}{x_\infty} \right)^{-\frac{2}{1+2\beta}}, \quad x_\infty = \frac{R_s}{1+2\beta} \sqrt{\frac{1}{3} (1 + \beta + \text{Pr}) \frac{\alpha_0}{\nu_0}} \quad (3.2)$$

が決定される。解はスタック内の拡散層厚さ

$$\zeta_0 = \frac{\omega R_s^2}{6\nu_0} \ll 1 \quad (3.3)$$

の1次の項まで考慮すると、

$$p'(x, t) = \frac{\Gamma}{a_0} g \sqrt{\frac{T_e}{T_0}} + h + \Lambda \frac{R_s^2}{6\nu_e} \frac{dh}{dt} \quad (3.4)$$

の形で与えられる。ここで h は t の未知の関数であり Γ, Λ は

$$\Gamma = \sqrt{\frac{8\gamma}{3} (1 + \text{Pr} + \beta)}, \quad \Lambda = \frac{(1 + \beta + \text{Pr})}{(1 + \beta)(3 + 2\beta)} \quad (3.5)$$

で定義される定数である。前回の講究録[12]において、(3.4)の h のかかる2項が欠如していたのでここで修正する。

スタック以外の領域において，(2.4)は温度勾配があるバッファチューブに対して次の温度分布

$$\frac{T_e}{T_0} = \left(1 - \lambda \frac{x - x_2}{L_B}\right)^2, \lambda = \sqrt{T_1/T_0} - 1 \quad (3.6)$$

を仮定すると，解を得ることができる．ここで解はスタック外側の径に対する拡散層厚さ

$$b = \frac{C}{R} \sqrt{\frac{\nu_0}{i\omega}} \ll 1 \quad (3.7)$$

の1次の項まで考慮する．ここで， $\lambda \rightarrow 0$ とおけば温度が室温で一定の領域の解が得られる．

これらの解を各領域の接合点で圧力と質量流量の連続を課すことで周波数方程式

$$\begin{aligned} & \left(I^+ e^{ik^+\xi} - I^- e^{ik^-\xi} \right) \left[e^{ik(L-x_2)} - e^{-ik(L-x_2)} \right] \\ & + \left(J^+ e^{ik^+\xi} - J^- e^{ik^-\xi} \right) \left[e^{ik(L-x_2)} + e^{-ik(L-x_2)} \right] + K = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

が得られる．式中の文字は

$$k = \frac{\omega}{a_0 \sqrt{1-2b}}, k^\pm \equiv \frac{i\lambda}{2L_B} \pm \frac{\psi}{L_B}, \psi = \sqrt{\frac{\omega^2 L_B^2}{a_0^2} - \frac{\lambda^2}{4}}, \xi \approx \frac{L_B}{\lambda} \left\{ \log(1+\lambda) + \frac{1}{1+\beta} \left[(1+\lambda)^{1+\beta} - 1 \right] \right\}, \quad (3.9)$$

で定義される．係数 I, J, K は流路に対する拡散層厚さ(3.3)，(3.7)の1次の項まで考慮しているが，ここではその詳細は省略する．

4. 臨界条件

周波数方程式(3.8)を満たす実数の角周波数 ω があればそれが臨界条件を与える．そのような解を持つ温度比と角周波数の組み合わせを数値解析によって求めることで臨界条件を計算した．ループ管路の半径を $R=20\text{mm}$ として，バッファチューブの区間長さを $L_B=600\text{mm}$ ，温度が一定の区間長さを $L-L_B-L_S=2.16\text{ m}$ とし， $\beta=0.5$ とした．スタックの長さは，(3.2)式よりスタックの両端での温度比が決まることで自動的に決定される．よってループ管の全体の長さは臨界条件によってわずかに変化する．

得られた臨界条件の角周波数 ω ，スタック管半径 R_S ，温度比 T_1/T_0 の関係をプロットすると図2の臨界曲線が得られる．ここで， $\zeta_0 = \omega R_S^2 / 6\nu_0$ であり， ν_0 は室温での気体の動粘性率である．図中の臨界曲線はループ管に沿って圧力が1波長モードと2波長モードの臨界条件を示す．曲線の下側が安定領域，上側が不安定領域となる．2波長モードでは角周波数が1波長モードに対して約2倍となるため同じ ζ_0 の値に対して R_S の値は異なることに注意したい．スタックを挿入することによって流路が絞られることから空隙率 ϕ が導入される．空隙率はスタックの総断面積 A_S と外側の管断面積 A の比

$$\phi = \frac{A_S}{A} = \frac{N\pi R_S^2}{\pi R^2} \quad (4.1)$$

で定義される．ここで N はスタックの細管の数とする．図2(a)の臨界条件はスタックの細

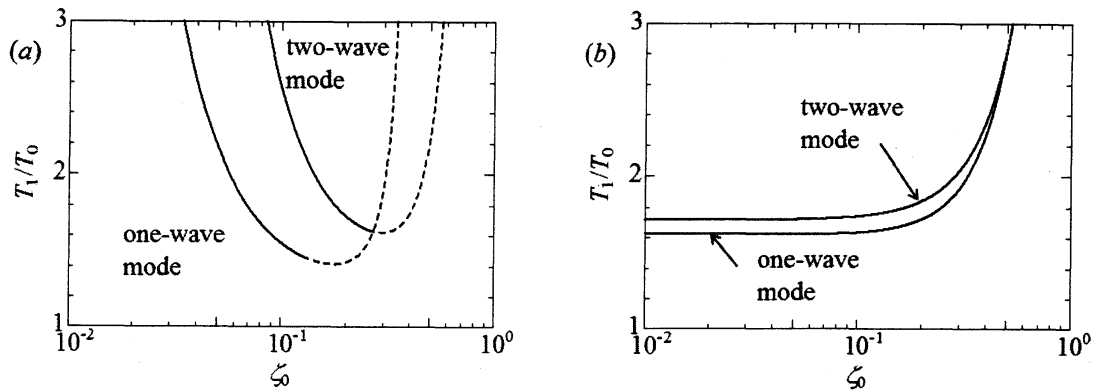


図 2： 1 波長モードと 2 波長モードに対する臨界条件．スタックの低温側と高温側の温度比（縦軸）とスタック内細管の流路に対する拡散層厚さ（横軸）の関係を示す．

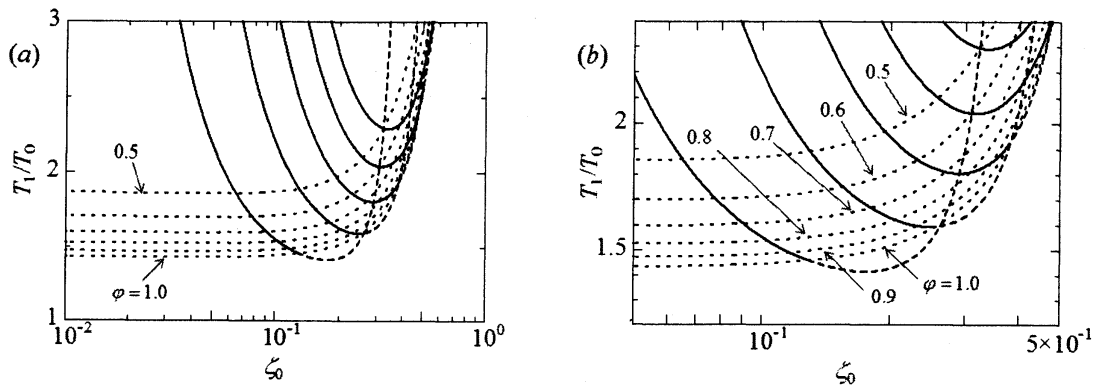


図 3： 1 波長モードにおける様々な空隙率と管半径の組み合わせに対する臨界条件．実線はスタックの細管の数を固定したときの臨界条件．点線は空隙率を一定に保ったときの臨界条件．

管の数を一定とし，空隙率を管半径の自乗に比例して変化させる．空隙率が 1 を超える領域に対しては物理的には意味がないので破線で示す．

一方，図 2(b)は，スタックの管半径は変化させるが空隙率を $\phi = 0.67$ に保った場合の臨界条件を示す．臨界温度比は管半径が小さいところではあまり変化していないことが見られ，空隙率が臨界条件に大きく影響することが分かる．図 3(a)は様々な空隙率とスタック管半径の値の組み合わせに対し，1 波長モードについて空隙率を変化させる臨界曲線を実線，空隙率を一定に保つ臨界曲線を点線でプロットしている．図 3(b)はその一部分を拡大したものである．図 3 の 1 番左側の実線は図 2(a)の 1 波長モードの曲線に対応している．図 3 の実線は固定する細管の数を 1 番左の曲線での細管の数を基準として左から順番に $1/2, 1/3, 1/4, 1/5$ に減らしている．細管の数が多きほど温度比が下がることがわかる．図中の点線は固定する空隙率を 1 から 0.5 まで 0.1 刻みで変化させている．空隙率の値が 1 に近いほど温度比が下がることがわかる．

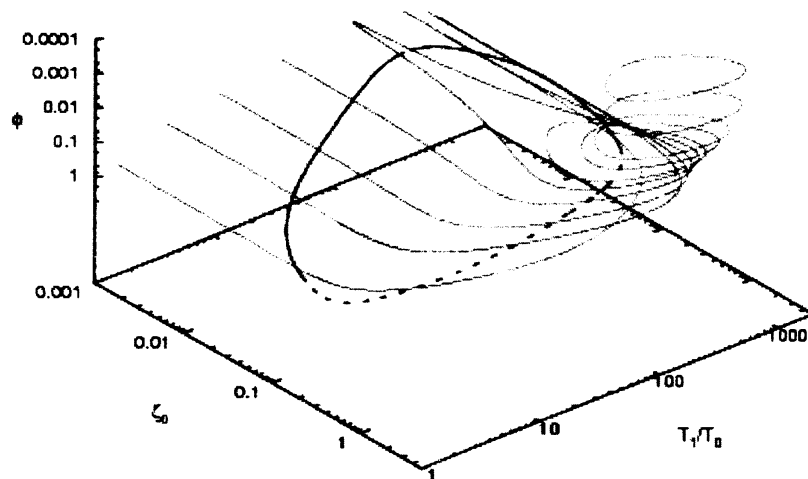


図 4： 1 波長モードに対する臨界曲面．スタックの低温側と高温側の温度比とスタック内の細管径に対する拡散層厚さと空隙率の関係を示す．

臨界条件はスタックの細管半径と温度比のみならず空隙率によって決まる．図 2, 3 の T_1/T_0 と ζ_0 の変数に加え空隙率 ϕ を変数として追加した空間で臨界条件を描くと，図 4 に示される曲面となる．図中の赤で描かれた実線は空隙率を一定に保った曲線であり，青で描かれた実線と破線は空隙率をスタック管半径に伴って変化させた臨界条件である．これまでは温度比の低いところしかプロットしていなかったが，全体をプロットすると閉じた円のような図形が現れることが分かる．例えば空隙率をスタック管半径に伴って変化させる曲線においては，ある空隙率でピーク値をとりそれ以上大きいまたは小さい値での臨界条件が存在しなくなる．これによって臨界条件は 1 つの輪になって現れる．また空隙率を一定に保った場合もある ζ_0 の値以上もしくは以下で臨界条件が存在しなくなる．よって図 4 の 3 次元臨界条件では赤，もしくは青で囲まれた空間が不安定領域になる．

5. ループ管内の臨界振動と進行波の発生

ループ管内に発生する波の振動モードについて，特に 1 波長モードについての議論を行う．得られた臨界条件，図 2(b)の $\zeta_0=0.3$ でのループ管路に沿った圧力分布と平均速度分布を 8 分の 1 周期ごとにプロットすると図 5 のようになる．圧力分布には明確な節や腹が無く進行波が発生していることが分かる．図中の番号は時間経過の順番を表している．図 6 には圧力と速度の周期の最初の時刻での，スタックとバッファチューブ内の空間分布の拡大図を示している．図 6(a)は圧力の空間分布の拡大図である．圧力はスタック内 ($0 < x < 0.0175$) で大きく低下することがわかる．図 6(b)は速度と質量流量の拡大図である．速度は実線，質量流量は破線で表される．スタックでは断面積が絞られていることによって速さは早くなり，バッファチューブとの値からジャンプしているが，接続条件より質量流量の値は連続している．

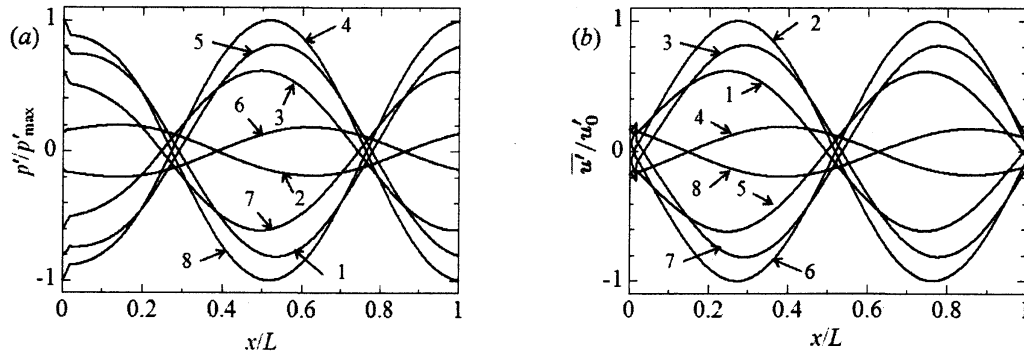


図 5: 管路内の圧力分布(a)と速度分布(b)

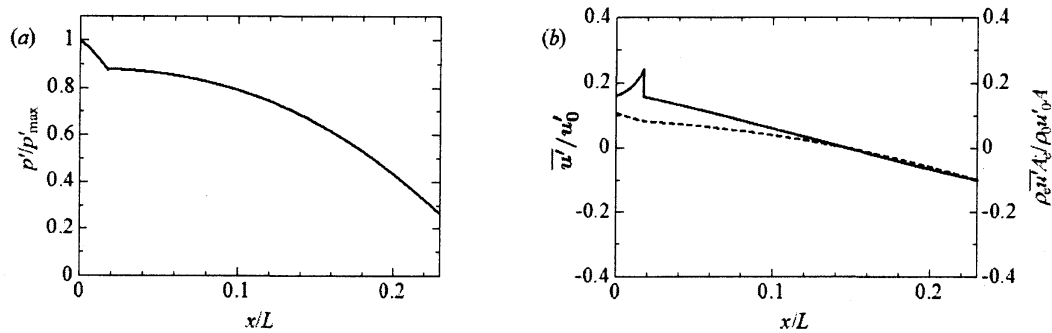


図 6: (a) 圧力分布 (b) 速度分布のスタックとバッファチューブ内の拡大図

波は右向きと左向きの波の重ね合わせで表される。温度が一定の流路では

$$p' = (D^+ e^{ikx} + D^- e^{-ikx}) e^{i\omega t}, \quad (5.1)$$

で表され、二つの波の振幅比を比べることも進行波の発生が確かめられる。ここでは温度が一定の流路での振幅比 $|D^-|/|D^+|$ を計算する。臨界条件における振幅比を図 7 に示す。図 7(a) は図 2(a) の 1 波長モードにおいて振幅比を計算した結果を示している。振幅比が最大となる点が見られる。臨界条件上で温度比が曲線の底に近づくほど振幅比が大きくなる傾向がある。空隙率を固定した臨界条件では、振幅比はあまり変化しない。空隙率は臨界温度比だけでなく進行波の発生にも大きく影響してくることがわかる。図 7(a) において最も振幅比が小さくなる条件 ($\zeta_0 = 0.02$) と、最も振幅比が大きくなる条件 ($\zeta_0 = 0.12$) での圧力のコンター図を図 8 に示す。振幅比が小さい図 8(a) はほぼ定在波に見えるが、振幅比の大きい図 8(b) のほうは x の正の向きに進行する波が見える。

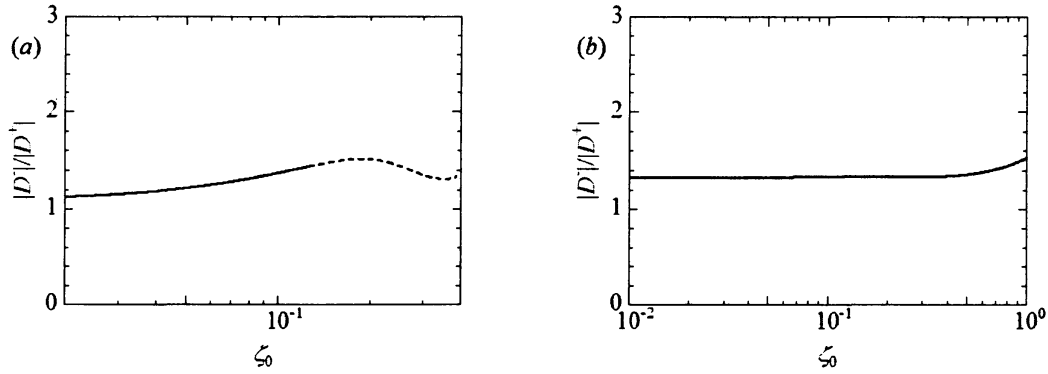


図 7: (a) 空隙率を変化させた臨界条件, 図 2(a)の 1 波長モードにおける振幅比
(b) 空隙率を固定した臨界条件, 図 2(b)の 1 波長モードにおける振幅比

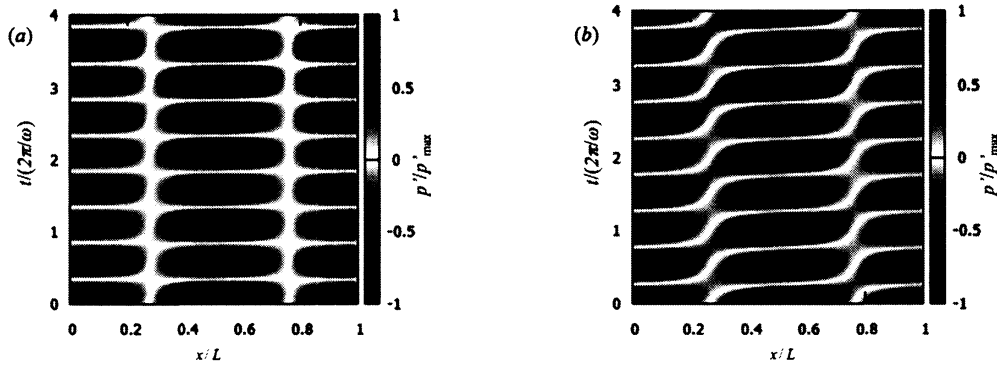


図 8: 圧力振幅コンター図 (a) $\zeta_0=0.02$ (b) $\zeta_0=0.12$

6. エネルギーフラックスの計算

1 周期にわたるエネルギーフラックスの空間分布について検討する. エネルギーフラックスは以下の式で定義される:

$$\tilde{I} \equiv \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+2\pi/\omega} p' u' dt = \frac{1}{2} \text{Re}\{P\bar{U}^*\}. \quad (6.1)$$

ここで*は複素共役を表す. 図 9 はループ管内のエネルギーフラックス分布を示している. この分布は図 2(b)の 1 波長モードの $\varphi = 0.67$, $\zeta_0 = 0.3$ での臨界条件におけるエネルギーフラックスを計算したものである. エネルギーフラックスはいたるところ x の正の向きに流れる. それはスタック内のみで増加し, それ以外の領域では減少していることが分かる.

次に, より一般的な観点からエネルギーフラックスについて考察する. 細管近似した Navier-Stokes 方程式を細管流路断面にわたって平均化すると

$$\rho_e \frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{2s}{R} \quad (6.2)$$

となり, 同じくエネルギー式を平均化すると

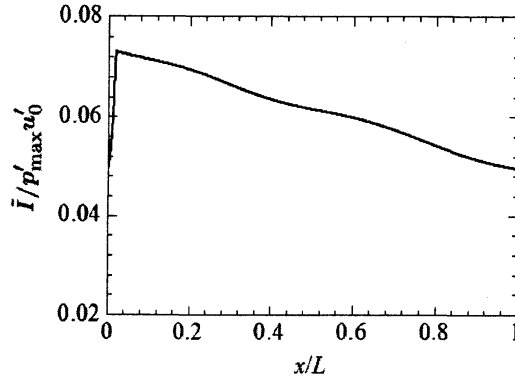


図 9： 1 波長モードにおける時間平均エネルギーフラックスの分布

$$\rho_e c_p \left(\frac{\partial \bar{T}'}{\partial t} + \bar{u}' \frac{dT_e}{dx} \right) = \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{2q}{R} \quad (6.3)$$

となる．両者を組み合わせると音のエネルギー式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_e \bar{u}'^2}{2} + \frac{p'^2}{2\rho_e a_e^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (p' \bar{u}') = \frac{2}{R} \left(\bar{u}' s + \frac{p' q}{c_p \rho_e T_e} \right) \quad (6.4)$$

が得られる．ここで s と q は

$$s = \mu_e \left. \frac{\partial u'}{\partial r} \right|_{r=R} \quad \text{and} \quad q = k_e \left. \frac{\partial T'}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (6.5)$$

で定義されるせん断応力と熱流束である．(6.4)を時間平均することにより

$$\frac{d\bar{I}}{dx} = \frac{2}{R} \left(\widetilde{\bar{u}' s} + \frac{\widetilde{p' q}}{c_p \rho_e T_e} \right) \quad (6.6)$$

エネルギーフラックスの空間微分が得られる．スタックに適用される厚い拡散層近似ではせん断応力と熱流束は

$$\frac{2}{R_s} s = \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{R_s^2}{8\nu_e} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} + \frac{R_s^4}{48\nu_e^2} \frac{\partial^3 p'}{\partial t^2 \partial x} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{R_s} q = & -\frac{\partial p'}{\partial t} - \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ & + \frac{R_s^2}{\nu_e} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\text{Pr}}{8} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) (1+\text{Pr}) \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (6.8)$$

で表される．よってスタック内のエネルギーフラックスの空間微分は

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{I}}{dx} = & -\frac{R_s^2}{8\mu_e} \left[\left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} p' \frac{\partial p'}{\partial x} \right] \\ & - \frac{R_s^2}{8\mu_e a_e^2} \left[(\gamma-1) \text{Pr} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right)^2 + \frac{4}{3} \gamma (1+\text{Pr}) \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

の形で得られ、ここでは $\omega R_s^2 / \nu_0$ のオーダーまで取り入れられる。1行目の第1項はせん断応力から得られる効果であり、それ以外の項は熱流束から得られる効果である。温度勾配がないとき、1行目と2行目の第一項のみとなり、これは負の値をとることからエネルギーフラックスは増幅しない。しかし、温度勾配による項の時間平均の大きさが増幅に作用することがわかる。薄い拡散層近似を用いた場合、エネルギーフラックスの空間微分は

$$\frac{d\tilde{I}}{dx} = \frac{2}{R} p' v_b \quad (6.10)$$

$$v_b = \sqrt{v_e} \left[C \frac{\partial^{-\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right) + \frac{C_T}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^{-\frac{1}{2}} u'}{\partial t^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (6.11)$$

の形で表すことができる。損失なしの最低次の関係

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_e a_e^2} \frac{\partial p'}{\partial t} \quad (6.12)$$

を用いれば、圧力振幅 P に対して

$$\frac{d\tilde{I}}{dx} = \frac{\sqrt{v_e} \omega}{R \sqrt{2} \rho_e a_e^2} \left(-C + \frac{C_T}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{1}{P} \frac{dP}{dx} \frac{a_e^2}{\omega^2} \right) P^2 \quad (6.13)$$

の形で得られる。これより温度勾配がなければ負の値をとり x 方向に減少する。また温度勾配のある領域では x の正の向きの進行波成分が大きいために負の値をとることになり減少する。

7. 結論

流路径が狭いスタック内の気体に対しては拡散層が厚い場合の拡散・波動方程式を、その外側の領域に対しては境界層理論を用いた熱音響波動方程式を適用することにより、ループ管内のスタック流路径が狭い領域に対しての臨界条件を理論によって得ることができた。臨界条件はスタック流路径と与える温度比だけではなく空隙率を含めて決定され、その条件は曲面として表されることが分かった。また臨界状態におけるループ管内の振動の様子が調べられた。ループ管内の圧力と速度の時間・空間分布によりループ管内には進行波が発生することが確認された。また臨界状態における進行波成分の大きさが調べられ、その大きさもまた空隙率の影響を受けることが明らかにされた。次にループ管内のエネルギーフラックス分布が計算された。ループ管を流れるエネルギーフラックスは圧力と速度の積より求め、その空間分布はいたるところで正の値をとることが分かった。ループ管

内ではエネルギーフラックスはすべての領域で x の正の方向に流れており、それはスタック内部で増加し、それ以外の領域では粘性の効果により徐々に減少することが分かった。

参考文献

- [1] G. W. Swift: *Thermoacoustic: A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators*, Acoustical Society of America (2002).
- [2] N. Rott: "Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes," *Z. Angew. Math. Phys.* **20**, 230–243 (1969).
- [3] N. Rott: "Thermally driven acoustic oscillations. Part II: Stability limit for helium," *Z. Angew. Math. Phys.* **24**, 54–72 (1973).
- [4] 杉本信正: 境界層理論から見た熱音響振動とその安定性解析, *ながれ*, **24**, 381-393 (2005).
- [5] N. Sugimoto & M. Yoshida: "Marginal condition for the onset of thermoacoustic oscillations of a gas in a tube," *Phys. Fluids*, **19**, 074101 (2007).
- [6] N. Sugimoto & D. Shimizu: "Boundary-layer theory for Taconis oscillations in a helium-filled tube," *Phys. Fluids*, **20**, 104102 (2008).
- [7] D. Shimizu & N. Sugimoto: "Numerical study of thermoacoustic Taconis oscillations," *J. Appl. Phys.*, **107**, 034910 (2010).
- [8] D. Shimizu & N. Sugimoto: "Determination of marginal conditions for thermoacoustic oscillations in a looped tube by evolution of an initial disturbance based on the boundary-layer theory," *J. Phys. Soc. Japan* (2014). 印刷中
- [9] T. Yazaki, A. Iwata, T. Maekawa & A. Tominaga: "Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3128–3131 (1998).
- [10] Y. Ueda & C. Kato: "Stability analysis of thermally induced spontaneous gas oscillations in a straight and looped tube," *J. Acoust. Soc. Am.* **124**, 851–858 (2008).
- [11] N. Sugimoto: "Thermoacoustic-wave equation for gas in a channel and tube subject to temperature gradient," *J. Fluid Mech.*, **658**, pp.89-116 (2010).
- [12] 兵頭弘晃, 杉本信正: "境界層および厚い拡散層近似を用いたループ管内の熱音響振動の安定性解析", 数理解析研究所講究録 1847「非線形波動現象の数理, モデリングおよび応用」, 1-9 (2013).