

弦理論によるハドロンのスペクトルの解析¹

杉本茂樹²

東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機

Shigeki Sugimoto

Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe (WPI)
the University of Tokyo

目次

1	はじめに	2
2	ハドロンとは?	2
3	弦理論と余剰次元	4
3.1	弦理論	4
3.2	余剰次元	5
3.3	少し一般化	7
4	ホログラフィック QCD	9
4.1	ゲージ理論	9
4.2	Gauge/String duality	11
4.3	ホログラフィック QCD	12
5	メソン	13
5.1	5次元ゲージ場と4次元メソン場	13
5.2	メソンのスペクトル	15
6	バリオン	16
6.1	インスタントンとバリオン	16
6.2	インスタントン解とモデュライ空間	17
6.3	バリオンのスペクトル	18
7	まとめ	21

¹2012年12月13日に京都大学数理解析研究所で行われた研究会「スペクトル・散乱理論とその周辺」での講演に基づいています。

²e-mail: shigeki.sugimoto @ ipmu.jp

1 はじめに

この解説は「ハドロン」と呼ばれる粒子の性質を弦理論によって調べる方法を、数学者向けに解説したものです。数学者向けと言っても、残念ながら私の力量不足のために、何か数学的に興味深い定理が出てくる訳でもなく、また数学者が使い慣れた記法や用語を用いた解説というわけでもありません。その点はどうぞお許してください。研究会の主なテーマの一つがスペクトル理論だったので、それに関係しそうな話題として、ハドロンのスペクトルの解析を中心に解説したいと思います。あとで見るように、弦理論を用いた方法によるとハドロンの質量を求める問題があるシュレーディンガー方程式の固有値を求める問題に帰着されます。ここでは特にそのシュレーディンガー方程式がどのような考え方から導かれ、どのように使われるのかを解説しようと思います。物理の予備知識はなるべく必要ないようにと心がけましたが、どうしても説明なしに認めて頂かざるをえない部分が多々あります。特に場の理論に関する説明などは、いずれにせよきっちりとした説明ではないので、読みづらい部分を飛ばしつつ先に進んで頂ければと思います。この解説が直接何かの役に立つということはなかったとしても、何らかのインスピレーションの種になってくれたらと願っています。

構成は次の通りです。まず、2節は言葉の準備で「ハドロン」、「メソン」、「バリオン」などと呼ばれる粒子がどのような粒子であるのかを簡単に説明します。3節では、まず弦理論をごく簡単に紹介し、後の節の準備として、余剰次元がある場合のいくつかの性質を議論します。4節で弦理論に基づくハドロンの解析法を提供する「ホログラフィック QCD」と呼ばれる枠組みをかいまんで解説します。5節と6節で、メソンやバリオンのスペクトルを求める方法と得られる結果の一部を紹介します。

なお、第10回岡シンポジウムでも同様の内容をやや異なる観点から講演しました。その会議録にはここで省略したいいくつかの事柄についてのより詳しい解説があります。興味のある方はそちらの方も参照してください。

2 ハドロンとは？

我々の体を含め、身近にお目にかかるほとんど全ての物質は「原子」と呼ばれる粒子が集まってできているということを中学か高校で習いました。さらに原子には内部構造があつて、陽子と中性子と呼ばれる粒子がいくつか堅く結びついて出来た原子核と呼ばれる小さな塊が原子の中心にあり、その周りを電子という素粒子がぐるぐる回っているということも教わりました。しかし、この話、良く考えるとこれだけではつじつまが合いません。陽子は正の電荷を持った粒子で、中性子は電荷を持たない粒子です。正の電荷を持った粒子同士は反発するはずなので、単純に考えると原子核はバラバラになってしまいそうなものですが、何故そうならないのでしょうか？

この問題は原子核の存在が明らかにされるや否や大きな問題となりました。そして、それに対す

る一つの解答を与えたのが、日本人で初めてノーベル賞を受賞した湯川秀樹博士です。彼は 1935 年に「パイオン (π 中間子)」と呼ばれる未発見の粒子の存在を仮定してこの核力を説明する中間子論を唱えました。それよると、陽子や中性子は原子核の中で核力と呼ばれる力で結びついており、その力が電気的な反発力よりもずっと強いためにバラバラにならずに堅く結びついているというのです。一般に、2つの粒子の間に力が働くためには、一方の粒子が存在するという情報を何らかの形で他方の粒子に伝える必要があります。核力の場合はパイオンという粒子が陽子や中性子の間を飛び交うことでその役割を果たすとされました。このパイオンは 1947 年に実験で確認され、この中間子論の正しさが実証されました。

タイトルにある「ハドロン」は、ここで登場した陽子、中性子、パイオンのように核力に関与する粒子の総称です。実は、ハドロンは陽子、中性子、パイオンだけではなく、その仲間たちがたくさん見つかっており、その数は数百種類にも及びます。ハドロンは大雑把に「バリオン」と「メソン」の2つに分類されます。陽子や中性子はバリオンの仲間、パイオンはメソンの仲間です。その後、1960年代後半から1970年代の前半にかけての研究によって、ハドロンは「クォーク」という素粒子がいくつか集まってできた複合粒子であることが明らかになりました。バリオンはクォークが3つくっついてできたもので、メソンはクォークと反クォークがくっついてできたものであると考えられています。

現在のところ、実験で確認されているクォークは6種類あり、アップ、ダウン、ストレンジ、チャーム、ボトム、トップという名前で呼ばれています。特にアップクォークとダウンクォークは他のクォークよりもずっと質量が小さいため、比較的軽いハドロンを考えるときは重要になります。今回はハドロンの低エネルギーでの振る舞いに注目したいので、主としてアップクォークとダウンクォーク（及びその反粒子）で構成されたハドロンを扱うことにします。そういうものに限っても、まだいろいろな種類のハドロンがあります。例えば、メソンの仲間にはパイオン(140)、 $\rho(770)$ 、 $a_1(1230)$ など、バリオンの仲間には陽子と中性子(940)、 $\Delta(1230)$ 、 $N(1440)$ などなど、全部で100種類以上あります。ここでカッコ内の数字は MeV を単位としたおよその質量を表します。

このように、いろいろな種類のハドロンが実験で見つかっているのですが、それらのハドロンの質量やその他の性質を理論的に導くことはできるでしょうか？現在では、ハドロンは量子色力学(QCD)と呼ばれる理論で記述されると信じられています。QCDはクォークとその間に働く力を媒介するグルーオンという粒子を場の量子論の枠組みに組み込んだ非常に美しい理論です。原理的には、この理論からハドロンの性質はすべて導き出せると信じられているのですが、実際には計算が大変難しく、ハドロンの質量を計算しようとしても、手計算では全く手に負えません。そのため、4次元時空 \mathbb{R}^4 を格子 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^4$ で近似してスーパーコンピュータを使ってガリガリ計算する「格子QCD」と呼ばれる方法が1980年代ごろから開発されてきました。数百種類あるハドロンのすべてという訳にはいきませんが、少なくとも質量が比較的軽い代表的なハドロンの質量

を精度良く計算することができ、実験値をうまく再現することが確かめられています。

今回はこのような伝統的な解析法とはまるっきり違う新しい方法を紹介します。弦理論を用いて QCD と（低エネルギーで）物理的に等価になると考えられる状況を実現し、それに基づく解析をします。まだかなり荒っぽい近似に基づく計算しかなされていないので、精度は上記の格子 QCD には及びませんが、ハドロンに関するさまざまな物理量をちよつとした手計算と Mathematica で数行のコマンドを打ち込む程度の作業で簡単に計算することができます。

まずは肩慣らしとして 3 節で弦理論や余剰次元に関する準備をしてから、4 節でその考え方の概説を試みますが、待ちきれない方は直接 4.3 節に飛んでください。

3 弦理論と余剰次元

3.1 弦理論

前節で出てきたクォークや電子や光子など、現在のところ、内部構造のない点粒子だと考えられている粒子のことを素粒子といいます。現在のところこの世に存在するあらゆる物質は素粒子が集まってできたものであると考えられています。弦理論という理論は、この素粒子も大きく拡大してみると点粒子ではなく、実はひも状をしているという仮説に基づく理論です。こう考えると、あらゆる素粒子をたった 1 種類のひもから導くことができたり、長年物理学者たちを悩ませてきた重力理論と素粒子の理論を矛盾なく融合するという問題を解決できるなどの大変魅力的な特徴があるために、多くの研究者がこの理論を研究しています。この理論の驚くべき予言の 1 つは、時空の次元が 10 次元であるということです。我々が日常生活をする上で認識できる時空の次元は 4 次元（時間 1 次元と空間 3 次元）ですが、弦理論はさらに 6 次元分の余分な方向が隠れていることを予言するのです。

ただし、この 6 次元の余分な次元（余剰次元）の存在はまだ実験で確認されていません。なぜこの余剰次元が見えないのかを説明する最もポピュラーな方法は、この余分な 6 次元空間がコンパクトな多様体をなし、そのサイズが現在の実験技術ではどう頑張っても見えないくらい非常に小さいと考えることです。特に 1980 年代に、10 次元の時空 M が、我々が生活している 4 次元時空 \mathbb{R}^4 （時間方向が 1 次元と空間方向が 3 次元）と、実 6 次元のコンパクトなリーマン多様体 Y の直積

$$M = \mathbb{R}^4 \times Y \quad (3.1)$$

の形で表される場合の研究が盛んに行われました。 Y の計量は弦理論から導かれる運動方程式を満たす必要があり、勝手に選ぶ訳にはいきませんが、 Y が Calabi-Yau 多様体の場合など、多くの例が構成されています。このように考えると大統一理論と呼ばれる素粒子の統一理論のいくつ

かの特徴を自然に実現することが見出され、弦理論は究極の統一理論の候補と考えられるようになりました。

しかし、今回、議論したいのはこのように Calabi-Yau 多様体を用いて素粒子の統一理論を実現する話とは随分異なります。目指すのは2節で議論したハドロンを記述する理論です。弦理論を用いるので考える時空はやはり10次元なのですが、(3.1)のような単純な直積ではなく、 Y に相当する部分はコンパクトですらありません。それなのに、どうして4次元の理論が得られるのかと思われるかも知れません。その基本的な考え方を理解して頂くために、3.2~3.3節で余剰次元がある場合の物理について少し調べてみましょう。

3.2 余剰次元

まず時空が(3.1)で表される場合を考えます。ただし、少しだけ一般化して、 Y の次元は n 次元とします。このとき M 上のある点の周りの座標を (x, y) で表します。ここで、 $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ が \mathbb{R}^4 の座標で、 $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ が Y の座標とします。そして、ここでの計量が

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + \sum_{i, j=1}^n g_{ij}(y) dy^i \otimes dy^j \quad (3.2)$$

で与えられる場合を考えてみます。ここで、 $(\eta_{\mu\nu}) := \text{diag.}(-1, 1, 1, 1)$ はミンコフスキー計量と呼ばれる、平坦な4次元時空 \mathbb{R}^4 の計量です。このように正定値ではない計量を持つのはアインシュタインの相対性理論の要請です。時空がこのような計量を持つ擬リーマン多様体であると考えると、時間方向(今の場合 x^0 の方向)と空間方向((x^1, x^2, x^3) と y の方向)を統一的に扱うことができるというのが相対性理論の基本的な考え方です。 $g_{ij}(y)$ は Y の(正定値な)計量の成分で、座標 y のみに依存するとしましょう。

この時、 M 上のラプラシアン Δ_M は

$$\Delta_M = \square + \Delta_Y \quad (3.3)$$

の形になります。³ここで \square と Δ_Y はそれぞれ \mathbb{R}^4 と Y の上のラプラシアンで、具体的には

$$\square = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu, \quad \Delta_Y = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \quad (3.4)$$

のように書かれます。ここで、 $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $g = \det(g_{ij})$, $(\eta^{\mu\nu}) := \text{diag.}(-1, 1, 1, 1)$, (g^{ij}) は (g_{ij}) の逆行列です。

この時空 M の上に住む粒子を表す場の理論を考えてみましょう。一般に、場の理論では、登場する粒子に対応する“場”を用意します。“場”は粒子の種類によって、いろいろな種類があるの

³計量が正定値ではない場合にはラプラシアンではなく、ダランベルシアンと呼ぶべきところですが、いちいち区別するのが面倒なので、ラプラシアンと呼ぶことにします。

ですが、 M 上の関数や M 上のファイバー束の section など、何か M 上の位置に依存するもの
のことを指す用語です。例えば、最近、実験で見つかったとされているヒッグス粒子のようなスピ
ン⁴がゼロの粒子に対応する場合は M 上の関数、光の粒である光子に対応する場合は M 上の 1-form
で表されることが知られています。こうした場はある運動方程式に従い、その運動方程式から、い
ろいろな粒子がどのように運動し、どのように相互作用するのかが読み取れる仕組みになってい
ます。ここではその詳細に踏み込む余裕はありませんが、簡単な具体例で話を進めましょう。

M 上の質量が m でスピンの自由粒子に対応する場の方程式は

$$\Delta_M \Phi(x, y) = m^2 \Phi(x, y) \quad (3.5)$$

のように書かれることが知られています。ここで、 Φ は M 上の実関数です。通常の量子力学でポ
テンシャルがない場合のシュレーディンガー方程式⁵

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x) = -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \varphi(x) \quad (3.6)$$

($t := x^0$ は時間、 m は質量、 $\vec{\nabla} := (\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3})$) は、ニュートン力学における運動量 \vec{p} とエネ
ルギー E の間の関係式

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (3.7)$$

で E と \vec{p} をそれぞれ波動関数 φ に掛かる微分演算子 $i \frac{\partial}{\partial t}$ と $-i \vec{\nabla}$ に置き換えることで得られま
す。これを真似して、相対性理論における運動量とエネルギーの間の関係式

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (3.8)$$

から同様の手続きで得られる方程式がクライン-ゴルドン方程式

$$\square \varphi(x) = m^2 \varphi(x) \quad (3.9)$$

です。(3.5) はこれを曲がった高次元時空に拡張したものです。

さて、それでは、(3.2) で与えられる計量を持つ 10 次元の時空 M の上の質量がゼロの自由粒子
を考えてみます。この場合の場の方程式は (3.5) で $m = 0$ として

$$\Delta_M \Phi(x, y) = 0 \quad (3.10)$$

となります。ここで、この 10 次元の場 $\Phi(x, y)$ を Δ_Y の固有関数系 $\{\phi_n(y)\}_{n=1,2,3,\dots}$ を用いて次
のように展開してみましょう:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(x) \phi_n(y). \quad (3.11)$$

⁴粒子の持つ角運動量のこと (ある単位を用いて) 整数もしくは半整数の値を取ることができます。

⁵この解説では、プランク定数 \hbar や光速 c を 1 とする自然単位系を用います。

こうすると、展開の係数 $\varphi^{(n)}(x)$ は $x \in \mathbb{R}^4$ の関数になります。この時、 $\phi_n(y)$ の Δ_Y に対する固有値を $-\lambda_n$ とすると、

$$\Delta_Y \phi_n(y) = -\lambda_n \phi_n(y) \quad (3.12)$$

を満たし、 λ_n が正の実数であることが示せます。そして、(3.11) を (3.10) に代入すると、

$$\square \varphi^{(n)}(x) = \lambda_n \varphi^{(n)}(x) \quad (3.13)$$

を得ます。(3.9) と見比べるとこの式は $\varphi^{(n)}(x)$ が質量 $\sqrt{\lambda_n}$ の粒子に対応する場であることが分かります。

一見、何の変哲もない式変形のようにですが、これの意味するところは結構深遠です。10次元時空 $M = \mathbb{R}^4 \times Y$ の質量ゼロの粒子に対応する場 $\Phi(x, y)$ の理論は4次元 (\mathbb{R}^4) の質量 $\sqrt{\lambda_n}$ の粒子に対応する場 $\varphi^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の理論と等価であると言っているわけです。つまり、10次元時空に住む1種類の粒子からなる理論と4次元時空に住む無限種類の粒子からなる理論とが等価になるのです。上では、10次元時空の場 $\Phi(x, y)$ を展開して4次元の場 $\varphi^{(n)}(x)$ を得たので、単純な理論をわざわざややこしく書きなおしたように見えるかも知れませんが、逆に(3.13)が与えられた時に、 $\{-\lambda_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ がラプラシアンの特値を与えるような多様体 Y が見つければ、4次元時空に住む無限にたくさんの種類の粒子が登場するややこしい理論が10次元時空に持ち上げて考えることでたった1種類の粒子からなる単純な理論に統一されることになるのです。

3.3 少し一般化

次に、(3.2) の状況を少し一般化することを考えてみます。計量 (3.2) は、4次元時空 \mathbb{R}^4 の座標の x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) を定数だけずらす変換 (並進変換)

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \quad (3.14)$$

(a^μ は任意の定数) と、 $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ (ここで $\eta := (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag.}(-1, 1, 1, 1)$) を満たす行列 $\Lambda = (\Lambda^\mu_\nu)$ による一次変換 (ローレンツ変換)

$$x^\mu \rightarrow \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (3.15)$$

に対して不変であることに注意しましょう。この並進変換とローレンツ変換を合わせた変換のなす群をポアンカレ群と言います。通常の素粒子の実験など、4次元時空が平坦であるとみなせる場合、あらゆる物理法則がこのポアンカレ群の作用のもとで不変であるというのがアインシュタインの特殊相対性理論の教で、現在のところ、この理論に矛盾する実験事実は見つかっていません。そこで、このポアンカレ群の作用で不変に保たれる計量を考えることにすると、

$$\sum_{\mu,\nu=0}^3 f(y)^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(y) dy^i \otimes dy^j \quad (3.16)$$

という形が可能です。ここで $f(y)$ は Y 上の至る所で正の値をとる実関数とします。こうすると、 M 上のラプラシアンは (3.3) から少し変更され、

$$\Delta_M = f(y)^{-2}(\square + D_Y) \quad (3.17)$$

となります。ここで、 D_Y は Y 上の関数に作用する微分作用素で、具体的な表式が後で必要になる訳ではありませんが、一応書いておくと、

$$D_Y = \frac{1}{f^2 \sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y^i} \left(f^4 \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \quad (3.18)$$

のような形です。

M の計量が (3.16) で表される場合に、上で議論したことがどうなるのかを考えてみましょう。 M 上で質量がゼロの場合 $\Phi(x, y)$ の満たすべき方程式は、やはり (3.10) の形になります。ただし、 Δ_M は (3.17) を用います。(3.11) と同じように固有関数系で展開しようとするとき、(3.12) の代わりに

$$D_Y \phi_n(y) = -\lambda_n \phi_n(y) \quad (3.19)$$

を満たす固有関数 ($-\lambda_n$ は D_Y の固有値) を考えると便利です。そうすると、展開 (3.11) の係数として現れる \mathbb{R}^4 上の関数 $\varphi^{(n)}(x)$ は (3.13) と同じ形の式を満たすことになり、やはり質量 $\sqrt{\lambda_n}$ の粒子に対応する場と解釈されます。

さて、これまで Y はコンパクトとして議論しましたが、 Y がコンパクトではない場合でも、ここでやったことがそのまま使えることがあります。 Y がコンパクトではない場合、場のエネルギーが有限になるための条件として、(3.19) の固有関数の規格化条件

$$\int d^n y \sqrt{g} f^2 |\phi_n| < \infty \quad (3.20)$$

を課すこととなります。この規格化条件のもとで、 $f(y)$ や $g_{ij}(y)$ の形によっては、固有方程式 (3.19) から離散的なスペクトルが得られることがあります。その場合には上と同様にして $\varphi^{(n)}(x)$ は 4 次元時空に住む質量 $\sqrt{\lambda_n}$ の粒子に対応する場と解釈されるようになります。

こうして、 Y がコンパクトではない場合でも、コンパクトな場合と同様に無限種類の場を含む 4 次元の理論が得られました。ただ、質量が重くなればなるほど大きなエネルギーを投入しないと生成できないので、低エネルギーの現象を扱うときには実質的に質量の軽いいくつかの粒子からなる 4 次元の理論とみなして良くなります。この状況は、直観的には以下のように理解できます。 Y がコンパクトなときには、余剰次元の方向 (Y の方向) は狭いので、自由に動き回れる方向が x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) の方向に限られ、それによって実質 4 次元時空における理論とみなされます。これに対して、 Y がコンパクトでない場合は、時空の曲がりの影響で余剰次元方向に進むには余計にエネルギーが必要になるために Y の方向に自由に動き回ることはできず、実質 4 次元時空における理論とみなされるという感じです。(図 1)



図 1: 余剰次元に囚われた人。左図は Y がコンパクトな場合、右図はコンパクトではない場合。

次に説明するホログラフィック QCD は、4次元のハドロンの理論を 10次元時空の弦理論を用いて記述します。特にメソンの有効理論は 5次元のゲージ理論で表されることが分かります。これは、ここで議論した Y がコンパクトではない場合の具体例になっています。(3.11) のように 5次元の場を展開して得られる 4次元の場が実験で見ついているいろいろなハドロンに対応するのです。いくつかの異なるハドロンが 5次元における粒子として統一的に記述されることとなります。

4 ホログラフィック QCD

4.1 ゲージ理論

2節で述べたように、ハドロンは QCD と呼ばれる理論で記述されることが分かっています。この QCD はクォークとグルーオンという素粒子の理論なのですが、これはゲージ理論と呼ばれるタイプの場の理論の一種です。

ここでゲージ理論とはどんな理論なのかを少しだけ説明してみましょう。最も簡単なゲージ理論は電磁気の理論です。電磁気の理論では、光子に対応する場として、4次元の時空 \mathbb{R}^4 の上の 1-form $A = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu(x) dx^\mu$ を考えます。この 1-form を外微分した $F := dA$ の成分を $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と書く時、 (F_{01}, F_{02}, F_{03}) が電場 \vec{E} 、 (F_{23}, F_{31}, F_{12}) が磁場 \vec{B} を表します。真空中の電磁場が従うマクスウェル方程式は

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\rho} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) = 0, \quad (\rho = 0, 1, 2, 3) \quad (4.1)$$

と書くことができます。この運動方程式 (4.1) は次の作用汎関数

$$S(A) = \kappa \int_{\mathbb{R}^4} F \wedge *F \quad (4.2)$$

を変分することで得られます。ここで、 κ は定数で、「*」は Hodge dual を表します。具体的には、 A に微小な 1-form ϵ を加えたときの作用汎関数の変化分

$$S(A + \epsilon) - S(A) = 2\kappa \int_{\mathbb{R}^4} \epsilon \wedge d *F + (\epsilon \text{ について 2 次の項}) \quad (4.3)$$

から、 ϵ について1次の項の係数がゼロになる条件

$$d * F = 0 \quad (4.4)$$

の各成分を書き下したのが (4.1) です。ここで、 F は、 \mathbb{R}^4 上の関数 Λ を用いた

$$A \rightarrow A + d\Lambda \quad (4.5)$$

という変換に対して不変なので、作用汎関数 (4.2) も運動方程式 (4.1) もこの変換で不変であることに注意して下さい。この変換 (4.5) が電磁気の理論におけるゲージ変換です。

この状況を少し一般化して、上で考えた 1-form A の各成分 A_μ が、あるリー群 G に対応したリー代数 \mathfrak{g} の元であるようなものを考えてみましょう。 A はゲージ場、 G はゲージ群と呼ばれます。上記の電磁気の理論は $G = U(1)$ の場合になっています。特に重要な具体例は $G = SU(N)$ の場合で、この時には \mathfrak{g} は $N \times N$ の反エルミート行列で、トレースがゼロであるようなものの集合になります。このとき、

$$F := dA + A \wedge A \quad (4.6)$$

と定義すると、 $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow G$ を用いた変換

$$A \rightarrow gAg^{-1} + dg^{-1} \quad (4.7)$$

のもとで

$$F \rightarrow gFg^{-1} \quad (4.8)$$

のように変換します。この変換がこの理論のゲージ変換です。この理論の作用汎関数として

$$S(A) = \kappa \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}(F \wedge *F) \quad (4.9)$$

を考えると、ゲージ変換 (4.7) のもとで不変であることが分かります。運動方程式は上と同じようにこの作用汎関数を変分することで得られます。 F の成分 $F_{\mu\nu}$ を使って書くと

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu F_{\nu\rho} + [A_\mu, F_{\nu\rho}]) = 0 \quad (4.10)$$

のようになります。この方程式もゲージ変換 (4.7) のもとで不変になっています。

ここでは、ゲージ場 A のみを考えましたが、この理論に電子、クォーク、ヒッグス粒子のようにいろいろな粒子に対応する場を考えると、理論全体がゲージ変換で不変になるように理論を構成します。このようにゲージ変換で不変な理論のことをゲージ理論と呼びます。現在のところ最も信頼されている素粒子の理論である「標準模型」はゲージ群が $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の

ゲージ理論です。大雑把に言うと、 $SU(3)$ が強い相互作用、 $SU(2)$ が弱い相互作用、 $U(1)$ が電磁相互作用に関係する部分⁶で、自然界に存在する 4 つの基本的な力（強い力、弱い力、電磁気力、重力）のうち、重力以外はこのようなゲージ理論で記述されると考えられています。2 節で登場した QCD はこの素粒子の標準模型のうち、強い相互作用に関わる部分を抜き出した理論で、ゲージ群が $SU(3)$ のゲージ理論です。この理論に含まれるゲージ場に対応する粒子がグルーオンで、さらにクォークに対応する場を加えて構成されます。以下では少し拡張してゲージ群が $SU(N_c)$ である QCD を考えます。この N_c は $N_c = 3$ の場合の色の三原色との類似性から「カラー」と呼ばれています。

作用汎関数が (4.9) で与えられるゲージ場のみの理論は提唱者の名をとって、ヤン・ミルズ理論と呼ばれています。クォークを含まない分、QCD よりも単純ですが、それでも量子論的にこの理論を解析するのは大変難しい問題です。低エネルギーでグルーオンの間に働く力が非常に強くなり、そのためグルーオンは単体では存在できず、いくつかのグルーオンがくっついたグルーボールと呼ばれる複合粒子の形で現れると考えられています。どのようなグルーボールが現れ、その質量がどのくらいになるのか、というグルーボールのスペクトルを求める問題は非常に非自明な興味深い問題で、特に質量ゼロの粒子が含まれないことだけでも数学的にきちんと示すことができたら、クレイ数学研究所から 100 万ドルの懸賞金がもらえることになっています。⁷

4.2 Gauge/String duality

Gauge/String duality は 1997 年に Maldacena によって提唱された予想で、基本的な主張は「あるゲージ理論とある曲がった時空における弦理論が等価になる」というものです。⁸いろいろな例があるのですが、最も良く調べられている例は、業界用語で $\mathcal{N} = 4$ 超対称ヤン・ミルズ理論と呼ばれている 4 次元のゲージ理論と、 $AdS_5 \times S^5$ (5 次元の反ド・ジッター時空と 5 次元球面の直積) という曲がった時空における弦理論 (正確には Type IIB 超弦理論) との間の等価性です。注目したいのは、ゲージ理論側は平坦な 4 次元時空 \mathbb{R}^4 における理論であるのに対して、弦理論側は曲がった 10 次元時空 $AdS_5 \times S^5$ における理論であるところです。また、ゲージ理論側は素粒子の理論であるのに対して、弦理論はひもからなる理論です。このように時空の次元も、理論の基本的な構成要素も異なり、一見すると、全く別の理論に見える 2 つの理論が等価になるという驚くべき主張です。

この主張はとてもミステリアスで、提唱されてからもう 15 年以上もたつというのにまだ物理学者の間でもまだきちんと理解されたと見なされておらず、未だに予想の域を出ていません。ただ、このような Gauge/String duality が成り立つと考えたくなる直観的な根拠はちゃんとあります。詳

⁶より正確には、 $SU(2) \times U(1)$ のある $U(1)$ 部分群が電磁相互作用に対応する部分です。

⁷是非、挑戦して下さい！

⁸Gauge/String duality についてより詳しいことは例えば [1] を参照して下さい。

しい説明は端折りますが、大雑把なアイディアは次のような感じです。弦理論には 10 次元時空の部分多様体をなす広がりを持った D ブレインと呼ばれる物体が存在します。この D ブレインがあると、端点が D ブレインに乗ったようなひもを考えることが許されるようになります。ひもの長さが十分短い時は、ひもは粒子のように振る舞いますが、この D ブレインに乗ったひもからどんな粒子が得られるのかを調べてみると、ゲージ場に対応する粒子を含んでいて、D ブレインの上にゲージ理論が実現されることが示されます。一方、D ブレインは重さを持った物体であるので、これがあるとアインシュタインの一般相対性理論の教えに従って、周囲の時空が曲がって、曲がった時空における弦理論が得られます。ここで得られたゲージ理論と曲がった時空における弦理論はどちらも同じ D ブレイン系を表すので、どちらも同じ物理を記述すると考えられるわけです。

このような大雑把な議論はあるものの、これだけでゲージ理論と曲がった時空における弦理論が本当に等価になっていると納得できるものではありません。そのため、ゲージ理論側と弦理論側の双方で対応する物理量を計算して予想通り一致するのかどうかを確かめる研究が数多くなされてきました。その結果、この双対性が成り立つことを示唆する非常に非自明な状況証拠が数多く見出されたのに対し、説得力のある反証は一つもないことから、この Gauge/String duality は多くの例で成立していると広く信じられています。

4.3 ホログラフィック QCD

Gauge/String duality が提唱されるや否や、これをいろいろな系に応用する研究が盛んに行われるようになりました。例えば、この Gauge/String duality を 4.1 節で説明したヤン・ミルズ理論に応用する方法が Witten [2] によって提案され、それを用いてグルーボールのスペクトルを求める研究がいくつかのグループによってなされました。[1, 3] まだグルーボールとはっきり特定できる粒子は実験で見つかっていないので、実験値と比べることはできないのですが、2 節で触れた格子 QCD の方法を用いて数値的に求められた結果と比較して、かなり良く一致するということが報告されています。

2004 年の暮れに、我々はこの系にさらにクォークの寄与を取り入れて QCD に応用する方法を提案しました。[4] 以下の節では、この方法を用いて、メソンやバリオンのスペクトルを求める問題を考えていきます。メソンやバリオンは実験で数多く見つかっているので、実験値と比較することが可能になります。Gauge/String duality に基づく弦理論を用いたハドロンの記述がどのくらい正しいのかが実験で検証できるところが大変面白い特徴の一つだと思います。

詳細は省略せざるを得ないのですが、4.2 節で説明した Gauge/String duality の考え方に従って、以下のような手順で QCD と（低エネルギーで）等価な曲がった時空における弦理論を構成し、そこからメソンを記述する場の理論を導きます。まず、弦理論の枠内でいくつかの D ブレインをうまく配置し、その D ブレインに乗ったひもがクォークとグルーオンを与え、低エネルギーで QCD が実現されるような状況を設定します。そして、そこで用いた D ブレイン（の一部）を

それに対応する曲がった時空に置き換えることで、曲がった時空における弦理論による記述を得ます。この記述は、10次元の理論でありながら、4次元の QCD と等価になるということから、3次元像を写真に記録する技術である「ホログラフィー」をもじって「ホログラフィック QCD」と呼ばれます。さらに、この枠組みの中で、比較的軽いメソンを表す部分を抜き出すと、ある曲がった 5次元時空 M_5 におけるゲージ理論が得られます。 N_f 種類のクォークを考える場合には、この 5次元のゲージ理論のゲージ群は $U(N_f)$ で与えられ、その作用汎関数を計算すると、

$$S(A) = \kappa \int_{M_5} \text{Tr}(F \wedge *F) + \frac{N_c}{24\pi^3} \int_{M_5} \omega_5(A) \quad (4.11)$$

という形になることが示されます。ここで、 κ は実定数、 N_c は 4.1 節で触れた「カラー」で、現実の QCD を考える場合は $N_c = 3$ とします。 $\omega_5(A)$ は Chern-Simons 5-form と呼ばれる $d\omega_5(A) = \text{Tr}(F \wedge F \wedge F)$ を満たす 5-form です。時空 M_5 が曲がっていることの影響は (4.11) の右辺第一項に現れます。 M_5 の座標を (x^0, x^1, x^2, x^3, y) で表すとき、 M_5 の計量は

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 K(y)^{2/3} \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + K(y)^{-2/3} dy \otimes dy \quad (4.12)$$

と書かれます。ここで、 $K(y) := 1 + m^2 y^2$ で m は正の定数です。(4.11) や (4.12) の導出等の詳しい説明を全く省いてしまいましたが、以下では、とりあえず、この 5次元ゲージ理論を出発点とし、ここから何が言えるのかを議論して行きたいと思います。

後で使うために、(4.11) の右辺第一項を成分を使って泥臭く書くと

$$\kappa \int_{M_5} d^4 x dy \text{Tr} \left(\frac{1}{2} K(y)^{-1/3} \sum_{\mu, \nu, \rho, \sigma=0}^3 \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} + K(y) \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} F_{\mu y} F_{\nu y} \right) \quad (4.13)$$

となります。ゲージ場の運動方程式は、4.1 節でやったように (4.11) を変分して得られます。簡単のためゲージ場 A について 2次以上の項を無視すると、

$$\begin{aligned} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) + K(y)^{1/3} \partial_y (K(y) (\partial_y A_\rho - \partial_\rho A_y)) &= 0, \quad (\rho = 0, 1, 2, 3) \\ \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu (\partial_y A_\nu - \partial_\nu A_y) &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

のようになります。これは (4.1) の 5次元版で、時空が平坦でないために $K(y)$ が入っています。

5 メソン

5.1 5次元ゲージ場と4次元メソン場

3.2~3.3 節で議論したような方針で、(4.11) で与えられる 5次元ゲージ理論を解析してみます。まず、(3.11) の真似をして、5次元のゲージ場 $A = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu dx^\mu + A_y dy$ の各成分をある完全系

$\{\psi_n(y)\}_{n=1,2,3,\dots}$, $\{\phi_n(y)\}_{n=0,1,2,\dots}$ を用いて展開してみます。

$$A_\mu(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_\mu^{(n)}(x) \psi_n(y) \quad (5.1)$$

$$A_y(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x) \phi_n(y) \quad (5.2)$$

ここで、 $\{\psi_n(y)\}_{n=1,2,3,\dots}$ と $\{\phi_n(y)\}_{n=0,1,2,\dots}$ は、すぐに説明するように

$$-K(y)^{1/3} \partial_y (K(y) \partial_y \psi_n(y)) = \lambda_n \psi_n(y), \quad (5.3)$$

$$-\partial_y (K(y)^{1/3} \partial_y (K(y) \phi_n(y))) = \lambda_n \phi_n(y). \quad (5.4)$$

のような固有方程式を満たす固有関数系を取ると便利です。(3.20) に相当する規格化条件は、展開式 (5.1), (5.2) を作用汎関数 (4.11) (あるいは (4.13)) に代入して y に関する積分を実行したときにその積分が収束するための条件で、

$$\int dy K(y)^{-1/3} |\psi_n|^2 < \infty, \quad \int dy K(y) |\phi_n|^2 < \infty \quad (5.5)$$

のようになります。この条件のもとで、(5.3) と (5.4) は離散的なスペクトルを持つことが示せます。ここで、(5.3) を満たす固有関数 ψ_n があつたら、 $\phi_n := \partial_y \psi_n$ と置くと (5.4) を満たすことがすぐに分かります。従つて、(5.3) の固有値 λ_n と (5.4) の固有値 λ_n は $n \geq 1$ で等しくなります。(5.4) には、 $\phi_n = \partial_y \psi_n$ の形に書けない固有関数が一つあつて、それを $\phi_0 := 1/K(y)$ と置いています。これに対応する固有値は $\lambda_0 = 0$ です。

完全系 $\{\psi_n(y)\}_{n=1,2,3,\dots}$, $\{\phi_n(y)\}_{n=0,1,2,\dots}$ を (5.3), (5.4) の固有関数系にとると便利な理由は、展開式 (5.1), (5.2) を運動方程式 (4.14) に代入したときに

$$\square \tilde{B}_\mu^{(n)} = \lambda_n \tilde{B}_\mu^{(n)}, \quad (5.6)$$

$$\square \varphi^{(0)} = 0 \quad (5.7)$$

という綺麗な形に書けるためです。ここで $\tilde{B}_\mu^{(n)} := B_\mu^{(n)} - \partial_\mu \varphi^{(n)}$ と置きました。 $B_\mu^{(n)}$ と $\varphi^{(n)}$ ($n \geq 1$) はこの組み合わせでしか現れないので、 $\tilde{B}_\mu^{(n)}$ が独立な自由度となります。(3.9) と見比べると、(5.6) は質量

$$m_n := \sqrt{\lambda_n} \quad (5.8)$$

の粒子、(5.7) は質量ゼロの粒子に対応する場の運動方程式に相当することが分かります。

さて、こうして得られた 4次元の場 $\tilde{B}_\mu^{(n)}$, $\varphi^{(0)}$ の物理的解釈を考えてみましょう。 $\tilde{B}_\mu^{(n)}$ の方は μ という添字を持つ場で、このような場に対応する粒子はスピンの 1 の粒子です。これらの粒子が実験で観測されているベクトルメソン (スピンの 1 であるメソン) に対応すると解釈します。 $n = 1, 2, 3, \dots$ の番号を質量が軽い順に並べることになると、 $B_\mu^{(1)}$ に対応するのが実験で見つかつ

ているベクトルメソンの中で一番軽い ρ メソンと呼ばれるメソンで、 $B_\mu^{(2)}$ に対応するのはその次に軽い a_1 メソンと呼ばれるメソン、 $B_\mu^{(3)}$ に対応するのはさらにその次に軽い ρ' メソンという具合です。一方、 $\varphi^{(0)}$ に対応する粒子はスピンの0の粒子で、これは、2節で出てきたパイオンと解釈されます。ここでは詳しく述べませんが、この解釈はパリティ変換や荷電共役変換などに対する変換性も実験事実とつじつまが合うことが示されます。このように、パイオン、 ρ メソン、 a_1 メソンのように、種類の異なるメソンが、5次元のゲージ場に統一されているところが非常に面白いところです。

5.2 メソンのスペクトル

上で $\tilde{B}_\mu^{(n)}$ の質量は (5.8) で与えられると言いましたが、これによって、メソンの質量を求めるという非常に難しいはずの問題が、(5.3) を解くという簡単な問題に帰着されたことになります。実際、この固有値は Mathematica 等で簡単に求めることができ、だいたい

$$\lambda_1 \simeq 0.669 m^2, \quad \lambda_2 \simeq 1.57 m^2, \quad \lambda_3 \simeq 2.87 m^2, \quad \dots \quad (5.9)$$

という値が得られます。ここで m は (4.12) に出てくる $K(y) = 1 + m^2 y^2$ に含まれていたパラメータです。これを (5.8) に代入して得られるメソンの質量とそれに対応する実験値を比較してみると、表1のようになります。ここで、(5.9) に含まれるパラメータ m は ρ メソンの質量の実

メソン	計算	実験値
ρ	[776 MeV]	776 MeV
a_1	1189 MeV	1230 MeV
ρ'	1607 MeV	1465 MeV

表 1: メソンの質量の計算結果と実験値の比較 [4]

験値 (約 776 MeV) を再現するように選んだので、 ρ メソンの質量が実験値とぴったり一致しているのは当たり前です。今の近似の範囲内では、重いメソンの質量は近似がどんどん悪くなっていくことが予想されるので、ここでは $n = 1, 2, 3$ に対応するメソンだけを書きました。特に a_1 メソンの質量は、実験値 1230 ± 40 MeV と誤差の範囲でほぼ一致し、合い過ぎていくらい良く合っています。 ρ' の方も大方良く合っていますが、こちらは [5] で議論されたように開弦の励起状態から出てくるメソンと解釈される可能性もあり、そうだとすると 1570 MeV や 1720 MeV 程度のところに観測されているメソンと同定されるべきである可能性もあるので、参考程度に考えてください。

一方、上で述べたように $\varphi^{(0)}$ の質量はゼロになってしまいます。パイオンは 140 MeV 程度の質量を持っているので、全く合わないではないかと思われるかも知れません。実は、(4.11) はクォークの質量がゼロである場合に得られる式です。アップクォークとダウンクォークのみを考える場合には、これらのクォークの質量は十分小さいため、質量をゼロとしても多くの物理量に対して良い近似を与えるのですが、パイオンの質量は少し特別な事情があって、クォークの質量に大きく依存することが知られています。実際、QCD で仮想的にクォークの質量がゼロの場合を考えるとパイオンの質量が厳密にゼロになるということが通常の場の理論の議論によって示されているので、 $\varphi^{(0)}$ の質量がゼロになるという結果はこの事実を弦理論の立場から正しく再現したことになっています。弦理論を用いた解析にクォークの質量の効果を取り入れる研究もいくつかのグループによってなされ、例えばパイオンの質量とクォークの質量の間に成立することが知られているある関係式を正しく再現することなどが議論されています。

また、ページ数の都合で割愛しましたが、開弦の励起状態を調べると、スピンの 2 以上のメソンなど、ここで議論しなかった多くのメソンが再現されます。詳しくは [5] を参照して下さい。

6 バリオン

6.1 インスタントンとバリオン

前節で (4.11) で与えられる 5 次元のゲージ理論が、(5.1), (5.2) という展開式を通じて 4 次元のメソンの理論とみなすことができると主張しました。では、バリオンはどのようなのでしょうか？面白いことに、バリオンもこの 5 次元ゲージ理論に自然に含まれているのです。5 節ではゲージ場を (5.1), (5.2) のように展開して (4.14) に代入しましたが、この式は場の 2 次以上の項を無視した近似式ですので、これが正当化できるのは場の値が十分 $A = 0$ に近い場合です。実はこの理論にはエネルギーを有限に保ったままの連続変形で $A = 0$ にできないようなゲージ場の配位が存在し、それがバリオンに対応することを議論することができます。

今、バリオンがある場所に止まっている場合を扱うため、時間方向には変化しない場の配位を考えましょう。5 次元時空のうち、時間 x^0 を固定して得られる 4 次元空間を $\Sigma := \{(x^1, x^2, x^3, y)\}$ と書くことにします。このとき、

$$N_B := \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Sigma} \text{Tr}(F \wedge F) \quad (6.1)$$

で定義される量は、エネルギーが有限な場の配位に対して整数値を取ることが知られています。この N_B がバリオンの数と解釈されるのです。⁹物理では $N_B \neq 0$ であるようなゲージ場の配位のことをインスタントンと呼び、 N_B のことをインスタントン数と呼ぶことが多いので、ここでもそう呼ぶことにします。

⁹ N_B が負の場合は反バリオンに対応します。

このようなゲージ場の配位がどうしてバリオンのような粒子に対応するのかというと、直観的には以下の様な感じですが、特に $N_B = 1$ としてバリオンが1つある場合を考えてみましょう。6.2節で少しだけ詳しく説明しますが、 $N_B = 1$ であるようなゲージ場の配位の中でエネルギーが最も低いものを調べると、エネルギーの密度が Σ 上のある一点の周りに局在したような配位であることが示せます。これが Σ 上に局在した粒子のように振舞うわけです。さらに、 Σ が曲がった空間である影響で、この粒子は y 方向にポテンシャルがあり、 $y = 0$ 付近に捕捉された図 1 の右図のような状況になっています。そのため、この粒子が自由に動き回ることができるのは (x^1, x^2, x^3) の方向のみで、そのため 4次元時空に住む粒子として解釈されることになります。

6.2 インスタントン解とモデュライ空間

以下ではアップクォークとダウンクォークのみを取り入れる $N_f = 2$ の場合について、もう少し詳しく説明してみます。時空が平坦で (4.11) の右辺にある $\omega_5(A)$ の寄与がない場合に $N_B = 1$ となるエネルギー最低の配位 (BPST インスタントン解) は次のように具体的に書き下すことができます。

$$A = fgdg^{-1}. \quad (6.2)$$

ここで、 $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ として、

$$f(\vec{x}, y) := \frac{(\vec{x} - \vec{X})^2 + (y - Y)^2}{(\vec{x} - \vec{X})^2 + (y - Y)^2 + \rho^2}, \quad g(\vec{x}, y) := \mathbf{a} \left(\frac{(y - Y) - i(\vec{x} - \vec{X}) \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{(\vec{x} - \vec{X})^2 + (y - Y)^2}} \right) \quad (6.3)$$

と置きました。 $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ はパウリ行列と呼ばれる行列で、

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

で与えられます。 $(\vec{X}, Y) \in \mathbb{R}^4$ と $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $\mathbf{a} \in SU(2)$ は Σ の座標 (\vec{x}, y) に依存しない定数です。また、 $g(\vec{x}, y)$ は $SU(2)$ の元であることにも注意して下さい。(6.2) 中の g^{-1} は g の逆行列です。

ここで出てきた $\vec{X}, Y, \rho, \mathbf{a}$ はどんな値を選んでも $N_B = 1$ でエネルギー最低の配位を与えます。ただし、 \mathbf{a} を $-\mathbf{a}$ で置き換えても A は変わらないので、 \mathbf{a} と $-\mathbf{a}$ とは同一視します。これら $\{(\vec{X}, Y, \rho, \mathbf{a})\}$ のなす空間をインスタントンモデュライ空間と呼び、 \mathcal{M} と書くことにしましょう。

$SU(2)$ の元 \mathbf{a} は $\sum_{I=1}^4 (a^I)^2 = 1$ を満たす $a^I \in \mathbb{R}$ ($I = 1, 2, 3, 4$) と上記のパウリ行列を用いて

$$\mathbf{a} = a^4 + i \sum_{b=1}^3 a^b \sigma^b \quad (6.5)$$

と表すことができます。 (a^1, a^2, a^3, a^4) は単位 S^3 上の点を表すので、このような対応で S^3 と $SU(2)$ は 1 対 1 に対応しています。 $v^I := \rho a^I$ と置くと、 ρ と \mathbf{a} は $v := (v^1, v^2, v^3, v^4)$ のなす \mathbb{R}^4 を極座標表示したときの動径方向と角度方向とみなすことができ、さらに v と $-v$ を同一視しているため、

$$\mathcal{M} = \{(\vec{X}, Y, v)\} = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 / \mathbb{Z}_2 \quad (6.6)$$

となります。(6.2) の担うエネルギー密度を計算すると、

$$\frac{\rho^4}{\left((\vec{x} - \vec{X})^2 + (y - Y)^2 + \rho^2\right)^4} \quad (6.7)$$

に比例するような分布をしており、 $(\vec{x}, y) = (\vec{X}, Y)$ の周りで値が大きくなっていることが分かります。これを粒子と解釈すると、 (\vec{X}, Y) が Σ 上での粒子の位置を表し、 ρ がその粒子の大きさに対応することが分かります。

以上は時空が平坦で (4.11) の右辺にある $\omega_5(A)$ の効果を忘れた場合の話ですが、ある近似のもとで、時空の曲がりや $\omega_5(A)$ の効果を取り入れてもゲージ場の配位は近似的に (6.2) で表せるということを議論することができます。ただし、その場合のエネルギー V を計算してみると (ある近似のもとで)

$$V(\rho, Y) = m_0 \left(1 + \frac{m^2}{3} Y^2 + \frac{m^2}{6} \rho^2 + \frac{N_c^2}{5m_0^2 \rho^2} \right) \quad (6.8)$$

のようになり、 Y と ρ に依存することが分かります。[6] ここで、 $m_0 := 8\pi^2 \kappa$ は作用汎関数 (4.11) に現れる κ に比例する定数です。このため、この近似のもとでのエネルギーが最低の配位は $Y = 0$ 、 $\rho^2 = \frac{N}{mm_0} \sqrt{\frac{6}{5}} =: \rho_c^2$ という値をとることになります。これが 4 次元空間 Σ の上で $y = 0$ 付近に捕捉され、 ρ_c 程度の大きさを持った粒子として振舞うというわけです。

6.3 バリオンのスペクトル

6.1 節と 6.2 節では時間的に一定の配位だけを考え、量子論的な効果を取り入れていない古典論的な議論でした。量子力学の教えによると、このようなじっと動かない状態は許されず、エネルギーが最も低い状態ですら、絶えず振動したり回転したりしているはずですが。現実のバリオンとの対応をつけるには、量子論的に取り扱う必要があります。

5 節で行ったような場の理論的な取り扱いは今の場合には大変難しいので、有限次元の自由度に落とす「モデュライ空間近似法」と呼ばれる近似を用いて議論してみます。この近似のミソは、場の配位を (6.2) の形のものだけに限って、 \mathcal{M} の自由度だけを考慮するというものです。 $N_B = 1$ を満たす場の配位で (6.2) の形ではないものはエネルギーが高いので、低エネルギーの物理を議論するときにはあまり重要ではないと期待して、その効果を気前良く落としてしまおうという思

想です。具体的には、(6.2) で与えられるゲージ場で、 \mathcal{M} の座標である (\vec{X}, Y, v) のパラメータが時間に依存してゆっくり変化している場合を考え、そのハミルトニアン（エネルギー）を計算し、通常の量子力学のように運動量を波動関数にかかる微分作用素に置き換えてシュレーディンガー方程式を書き下します。例によって詳しい計算は省略しますが、そうして得たシュレーディンガー方程式は

$$H\Psi(\vec{X}, Y, v) = M\Psi(\vec{X}, Y, v) \quad (6.9)$$

$$H := -\frac{1}{2m_0}\Delta_{\mathcal{M}} + V(\rho, Y) \quad (6.10)$$

$$\Delta_{\mathcal{M}} := \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial X^i} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^4 \left(\frac{\partial}{\partial v^I} \right)^2 \quad (6.11)$$

という形になります。ここで、 M がハミルトニアン H の固有値で、 Ψ がその固有関数です。また、(6.11) はインスタントンモデュライ空間 \mathcal{M} の上のラプラシアンになっています。アインシュタインの有名な関係式 $E = mc^2$ によって、エネルギーと質量は等価なので、 M はバリオンの質量と解釈されます。このシュレーディンガー方程式は解析的に解くことができ、答えは

$$M = M_0 + \left(\sqrt{\frac{(l+1)^2}{6} + \frac{2}{15}N_c^2} + \sqrt{\frac{2}{3}(n_\rho + n_Y)} \right) m \quad (6.12)$$

となります。ただし、 \vec{x} 方向に動いていない（運動量を持たない）状況を考えるため、波動関数 Ψ が \vec{X} に依存しない場合を考えています。ここで l は粒子のスピン J と $l = 2J$ という関係のある正の整数です。今の場合、バリオンがフェルミオン（スピン J が半奇数である粒子）であることから、 $l = 1, 3, 5, \dots$ のように奇数に制限されます。¹⁰ n_ρ と n_Y は 0 以上の整数で、それぞれ ρ 方向と Y 方向の振動モードに対応しています。 M_0 は l, n_ρ, n_Y に依存しないある定数です。(6.9) から正直に計算すると

$$M_0 = m_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}m \quad (6.13)$$

のようになりますが、上で有限自由度に落としたときに無視した他のモードの零点振動の寄与も本当は取り入れなければならないので、その評価がまだきちんとなされていないので、良く分からない定数項として残しておくことにします。

ここでは必要ないので書きませんが、(6.9) を満たす固有関数も具体的に書き下すことができます。また、 (l, n_ρ, n_Y) でラベルされる固有関数のなすベクトル空間を V_{l, n_ρ, n_Y} と書くことすると、 $\dim V_{l, n_\rho, n_Y} = (l+1)^2$ であることが分かります。実は、ハミルトニアン (6.10) が v を回転する $SO(4)$ の作用で不変であることを反映して、 V_{l, n_ρ, n_Y} にはこの $SO(4)$ が作用しています。ま

¹⁰今の $N_f = 2$ の場合は特殊事情のため、 l が偶数の場合も許されるように見えますが、 $N_f > 2$ の場合には自然にこの制限が導かれます。

た、 $SO(4)$ が $(SU(2) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2$ が同型であることを使うと、この空間は $SU(2) \times SU(2)$ の表現空間とみなすことができます。 $SU(2)$ の d 次元表現を ρ_d と書くことにすると、 V_{l,n_ρ,n_Y} は $SU(2) \times SU(2)$ の $\rho_{l+1} \otimes \rho_{l+1}$ という $(l+1)^2$ 次元の既約表現の表現空間になっています。

一般に、(クォークの質量と電磁相互作用を無視する近似のもとで、) ハドロンはこの $SU(2) \times SU(2)$ の表現で分類することができます。波動関数が $SU(2) \times SU(2)$ の $\rho_{2J+1} \otimes \rho_{2I+1}$ ($2I, 2J \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) という表現の表現空間の元になっているとき、それに対応する粒子はスピン J でアイソスピン I の粒子であるという言い方をします。従って、上で得られたバリオンはスピンとアイソスピンの $J = I = l/2$ のものであることが分かります。

さて、こうして得たスペクトルが実験で見ついているバリオンとどのように対応するのかを考えてみましょう。まず、実験で見ついている最も軽いバリオンは陽子と中性子なので、これらは $(l, n_\rho, n_Y) = (1, 0, 0)$ の状態に対応すると考えるのが自然です。実際、 $V_{1,0,0}$ の4つの基底は陽子と中性子のスピンの向きが上向きと下向きの4つの状態ときちんと対応することを示すことができます。¹¹アップクォークとダウンクォークのみからなるバリオンのうちで次に軽いのは「 Δ 」と呼ばれる粒子です。これは (6.12) で2番目に小さな固有値を与える $(l, n_\rho, n_Y) = (3, 0, 0)$ の状態に対応すると思われます。 Δ はスピンとアイソスピンが $J = I = 3/2$ の粒子であることが知られているので、 $l = 3$ の状態に対応することとつじつまが合っています。

これらを含め、(6.12) から予言される $l = 1, 3$ の粒子の質量と実験で見ついているバリオンの質量を並べて比較したのが図2です。図2の左図が弦理論に基づく計算結果 (6.12) で $N_c = 3$

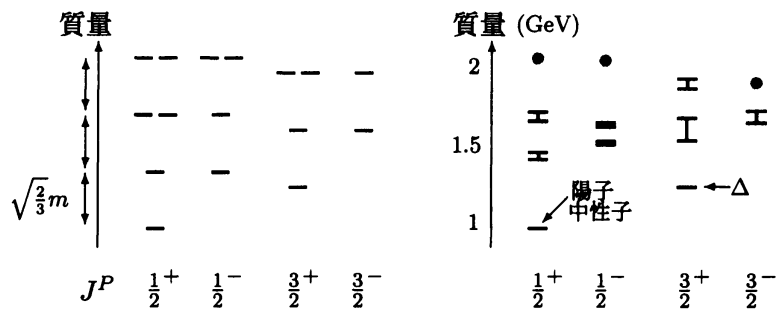


図2: バリオンのスペクトル (左図が理論、右図が実験) [6]

としたもの、右図が実験で確認されている $I = J = 1/2, 3/2$ であるようなバリオンをまとめたものです。横軸はバリオンのスピン J とパリティ P を J^P の形で表して $J^P = \frac{1}{2}^+, \frac{1}{2}^-, \frac{3}{2}^+, \frac{3}{2}^-$ を並べていて、縦軸は質量を表しています。パリティというのは空間反転 $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ に伴って波動関数の符号がどう変わるのかを表す量で、 $P = \pm$ の値を取ることができます。詳しい議論は省略し

¹¹陽子は約 938.3 MeV, 中性子は約 939.6 MeV でほぼ同じ質量を持ちます。これらはクォークの質量や電磁相互作用を無視する近似のもとでは同じ質量になり、アイソスピンに対応した $SU(2)$ の作用で移り合う仲間であると考えられています。

ますが、 V_{l,n_p,n_Y} の元のパリティは $P = (-1)^{n_Y}$ で与えられます。右図で黒丸で表されたものは、その質量を持つバリオンの存在が報告されており、バリオンの一覧表には載っているけれど、まだ実験が十分ではなく、その存在が確立されたとはいえない状況であるとされているものです。

前置きが長くなりましたが、図 2 の左図の計算結果と右図の実験データを見比べて、定性的なパターンは良く似ていると思って頂けるでしょうか？例えば、既に述べたように、一番軽いのが $J^P = \frac{1}{2}^+$ であるバリオン（陽子と中性子）で、その次に軽いのが $J^P = \frac{3}{2}^+$ のもの（ Δ ）であることは理論と実験で一致しています。また、 $J^P = \frac{1}{2}^+$ で二番目に軽いものと $J^P = \frac{1}{2}^-$ で一番軽いものがほぼ同じ質量を持ち、同様に $J^P = \frac{3}{2}^+$ で二番目に軽いものと $J^P = \frac{3}{2}^-$ で一番軽いものがほぼ同じ質量を持つというような性質も再現されています。

ただし、図 2 の左図を描く時、 M_0 の値が求まっておらず、また定数 m の値を表 1 の数値を出した時に使用した値の半分くらいにしないと右図の実験値とうまく合わないなど、いくつか課題が残されていることを注意しておきます。

7 まとめ

この解説では、弦理論を用いてハドロンを記述する方法をかいつままで説明しました。特に弦理論を用いて導かれた 5 次元のゲージ理論 (4.11) から得られるハドロンのスペクトルの解析を中心に議論しました。5 節と 6 節で説明したように、メソンの質量もバリオンの質量もともにある固有方程式の固有値を求めることで計算することができるようになりました。今回は省略しましたが、さらに固有関数が分かれば結合定数などのいろいろな量を計算することができます。この解説で議論した質量のスペクトルだけではまだ半信半疑かも知れませんが、それ以外にもハドロンのいろいろな定性的な性質が非自明に再現されたり、多くの物理量の計算が実験値とかなり良く一致したりする様子を見ると、これが見当はずれということはずり有り得ないと思えるようになります。（例えば、[7, 8] など。）

ただ、いろいろな式の導出の詳細を省いたために、途中でどのような近似を用いたのかを詳しく説明することができませんでした。伝統的な方法では計算することが非常に困難な物理量が簡単に計算できると言いましたが、かなり荒っぽい近似を用いているので、計算の精度や信頼性は、まだまだ至らない部分が多いことに注意して下さい。とは言え、解析を始めた時には、対称性の破れという現象や、メソンやバリオンと解釈され得る粒子の存在など、いくつかの定性的な議論ができれば良いだろうという程度に思っていたので、これでも当初の期待を大きく上回り、驚くほどうまくいっているというのが実感です。

さて、そろそろ規定のページ数も迫ってきたので、この辺りで筆をおきたいと思います。ここまで読み進めて下さって、どうもありがとうございました。冒頭で数学者向けと言いましたが、内容はどう見ても物理ですし、どうしても説明を省略せざるを得ないブラックボックスがたくさんあったので、辛かったかも知れませんが、個人的には、3.3 節で触れたコンパクトではない多様体

上のラグランジアン固有値問題や 6.3 節で扱ったようなインスタントンモデュライ空間上のラグランジアンを用いたシュレーディンガー方程式の一般論などを発展させ、さらには私のように数学の素養のない者にも分かるような言葉で解説して下さる方が現れたりすると大変うれしいのですが、、、。例えば、6.3 節ではインスタントン数 (6.1) が $N_B = 1$ の場合を扱いましたが、同様の解析を ADHM 構成法などを使って $N_B > 1$ の場合一般化することはできないでしょうか? $N_B = 2$ の場合は [9] で少し解析し、2つの核子の間に働く核力を計算したりしたのですが、さらに推し進めて $N_B = 3, 4, \dots, \infty$ の場合にどうなるのかを調べるのは物理として大変興味深い問題です。何か良いアイデアがありましたら是非、教えてください。

参考文献

- [1] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111].
- [2] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505 (1998) [arXiv:hep-th/9803131].
- [3] R. C. Brower, S. D. Mathur, C. -I Tan: “Glueball spectrum for QCD from AdS supergravity duality,” *Nucl. Phys. B* **587**, 249 (2000) [arXiv:hep-th/0003115].
- [4] T. Sakai, S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **113**, 843-882 (2005) [arXiv:hep-th/0412141].
- [5] T. Imoto, T. Sakai, S. Sugimoto, “Mesons as Open Strings in a Holographic Dual of QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **124**, 263-284 (2010) [arXiv:1005.0655 [hep-th]].
- [6] H. Hata, T. Sakai, S. Sugimoto, S. Yamato, “Baryons from instantons in holographic QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **117**, 1157-1180 (2007) [arXiv:hep-th/0701280].
- [7] T. Sakai, S. Sugimoto, “More on a holographic dual of QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **114**, 1083-1118 (2005) [arXiv:hep-th/0507073].
- [8] K. Hashimoto, T. Sakai, S. Sugimoto, “Holographic Baryons: Static Properties and Form Factors from Gauge/String Duality,” *Prog. Theor. Phys.* **120**, 1093-1137 (2008) [arXiv:0806.3122 [hep-th]].
- [9] K. Hashimoto, T. Sakai and S. Sugimoto, “Nuclear Force from String Theory,” *Prog. Theor. Phys.* **122**, 427-476 (2009) [arXiv:0901.4449 [hep-th]].