数理解析研究所講究録
第 1894 巻 2014 年 32-40

無限グラフに対する結婚定理と逆数学

Marriage Theorems for Infinite Graphs and Reverse Mathematics

(Survey Article)

藤原誠*
Makoto Fujiwara
東北大学大学院理学研究科
Mathematical Institute, Tohoku University

概要

存在型定理の一様計算可能性に関する逆数学を使った解析方法について概説する. そのためのサンプルとして, 無限グラフに対する結婚定理及び対称結婚定理を扱う.

1 導入

1930 年代に A. Church, S. C. Kleene, E. Post, A. Turing らによって "計算" の概念が定式化されて以来, 計算機科学は飛躍的な発展を遂げてきた. それに伴い, 数学の諸定理に対しても, その実効的 (証拠となるものの構成を与える) 証明可能性と関連して, 一様計算可能性についての解析がなされてきた. この分野は再帰的数学 (Recursive Mathematics) 又は計算可能数学 (Computable Mathematics) と呼ばれている ([4]).

数学における定理の多くは "与えられた問題 X に対し条件を満たす解 Y が存在する" という形 (以下**存在型**という) をしている. 存在型定理の一様計算可能性に関して, 最初に考えられる素朴な問いは以下である.

問 1.1. 計算可能な問題 X に対してその解 Y を与えるアルゴリズム *(一様計算プログラム)* は存在するか？

再帰的数学において, これまで多くの存在型定理に対して問 1.1 に対する否定的回答が与えられてきた. そこで次に考えられる問いは以下である.

問 1.2. どれくらいの計算不可能関数を使えば, 計算可能な問題 X に対してその解 Y を与える, その計算不可能関数を使ったアルゴリズムが作れるか？

* Email: sb0m29@math.tohoku.ac.jp

ここ 50 年ほどの間, 計算可能性理論における計算不可能次数の研究と並行して, 数学の諸定理に対するこの種の問題が盛んに考察されてきた. 次の小節で述べる“逆数学”もこの流れの中で生まれたものと見ることができよう. 一方, 計算可能な問題 X に対して解 Y を与えるアルゴリズムが存在する, 或いは何らかの付加条件を満たす計算可能な問題 X に対しては解 Y を与えるアルゴリズムが存在する場合がある. その場合, 次の問いが考えられる.

問 1.3. それらのアルゴリズムが正しく機能することの証明 *(以下* **バリフィケーション** *という)* はどれくらい難しいか？

計算量理論においては, アルゴリズムが用する計算時間に関して盛んに研究がなされているものの, アルゴリズムのバリフィケーションの難しさはあまり問題とされてきていないように思える. また, この問いに関する考察は再帰的数学においてもこれまで行われていない. 問 1.3 は数学基礎論的視点からのアルゴリズム全般に対する新たな問題提起と言えよう.

本稿では, 逆数学を使った問 1.2 及び問 1.3 へのアプローチを概説する. なお, 存在型定理の一様計算可能性に関しては, 近年, 計算可能性理論の文脈で Weihrauch 還元という概念を利用した問 1.2 に関する精密な解析が進められている. ([1, 2, 6]) しかしながら, この方法ではアルゴリズムのバリフィケーションに関する情報は何も得られない. 逆数学を使って存在型定理の一様計算可能性を解析するという本稿で紹介する方法の最大の利点はアルゴリズムのバリフィケーション (問 1.3) に関する解析ができる点である. 2 章でその一般論を述べ, 3 章では具体例として, 無限グラフに対する結婚定理及び対称結婚定理の解析結果を提示する.

2 存在型定理の一様計算可能性と列版の逆数学

逆数学は 1970 年代に H. Friedman によって始められ, その後 S. Simpson らの尽力によって大きく発展した数学基礎論の研究プログラムであり, 数学の諸定理を論理的複雑さによって分類することを目的としている. 具体的には, 数学の諸定理を二階算術と呼ばれる自然数と自然数の集合のみを扱える弱い公理体系の論理式として表現し, 二階算術の集合存在公理と帰納法公理を制限して得られる弱い部分公理体系 RCA_0 の上で各定理と同値になる集合存在公理や帰納法公理を調べる. 厳密には, RCA_0 は算術の基本公理, Δ^0_1 論理式に対する集合存在公理 Δ^0_1-CA, Σ^0_1 論理式に対する帰納法公理 $\mathrm{I}\Sigma^0_1$ からなる. 自然数上 Δ^0_1 定義可能な集合の族は計算可能な集合の族とちょうど一致するという計算可能性理論の古典的な結果を踏まえれば, RCA_0 はおよそ計算可能な数学に対応し, RCA_0 からは導出されない集合存在公理との同値性は計算不可能次数に対応することは想像に難くない. 事実として, ほとんどの古典的な定理は RCA_0 で証明できるか, 算術的集合存在公理 ACA(停止問題の計算不可能次数に対応) と RCA_0 上同値になるか, ちょうどその中間に位置する弱 König の補題 WKL と RCA_0 上同値になることが知られている.([15]) なお, 二階算術には集合存在公理と帰納法公理という二つの指標があることに注意されたい. RCA_0 に WKL を加えた公理体系と RCA_0 に算術的論理式に対する帰納法公理 IA を加えた公理体系は比較不可能であるが, RCA_0 に ACA を公理として加えるとそこから算術的論理式に対する帰納法公理 IA が導かれる.(図 1 参照) 帰納法公理の

階層に関しては, 以下の関係が知られている. ([8])

$$\mathrm{I}\Sigma^0_1 < \mathrm{B}\Sigma^0_2 < \mathrm{I}\Sigma^0_2 < \ldots < \mathrm{I}\Sigma^0_n < \mathrm{B}\Sigma^0_{n+1} < \mathrm{I}\Sigma^0_{n+1} < \ldots < \mathrm{IA}.$$

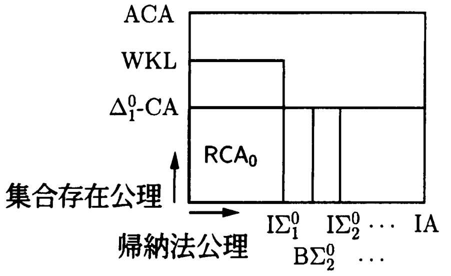

図 1　二階算術の部分公理体系

一方, 存在型定理は二階算術において

$$\forall X\,(\varphi(X) \to \exists Y\,\psi(X,Y))$$

という形の論理式として表現される. 先に RCA_0 は計算可能な数学に対応すると述べたが, 存在型定理が問 1.1 を満たすためにはそれが RCA_0 で証明できるだけでは不十分である. それは RCA_0 は古典論理に基づいた体系であり, 証明に一様性を要求しないことによる. 例えば, RCA_0 で存在型定理 $\forall X\,(\varphi(X) \to \exists Y\,\psi(X,Y))$ が証明できたとしても, その証明は, 与えられた問題 X に対して非決定的な何らかの条件によって場合分けをし, それぞれ異なる解 Y の構成を与えるものかもしれない. 証明に一様性を要求するものとして, “任意に与えられた問題の無限列 $\langle X_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ に対し解の無限列 $\langle Y_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する” ことを表現する**列版**論理式

$$\forall\langle X_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}\,(\forall n\varphi(X_n) \to \exists\langle Y_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}\forall n\psi(X_n,Y_n))$$

が考えられる. 実際, RCA_0 で証明できる存在型定理でその列版が WKL や ACA と同値になるものが数多く知られている ([12, 3, 6]).[*1] つまり, 存在型定理が問 1.1 を満たすことはその列版が $\mathrm{RCA}_0+\mathrm{IA}$ で証明できることに対応し, 列版の WKL や ACA と同値性は問 1.2 への回答を与える. 一方, $\mathrm{RCA}_0+\mathrm{IA}$ で証明できる列版存在型定理の帰納法公理との同値性は問 1.3 への回答を与えるものである. これまでの逆数学研究ではその証明に (RCA_0 に含まれない) 強い帰納法公理が必要な数学的命題はあまり知られていないが, 本研究の結果を踏まえると, バリフィケーションが単純でないような存在型定理を考えるとその列版が RCA_0 では証明できないものが多く存在するように思われる.

[*1] 一方, WKL や ACA と同値になる存在型定理に対しては, 一般にその列版を考えても逆数学的強さは変わらない.

3 結婚定理と一様計算可能性

グラフ理論において, マッチングの存在は主要な興味の対象であり, 結婚定理 (又は Hall の定理) と呼ばれる以下の定理は代表的な定理の一つである.

有限グラフに対する結婚定理 (P. Hall [10]). 有限二部グラフ $(V;E)$ に対して, 以下は同値である.

1. **Hall 条件** : $\forall X \subset V(|X| \leq |N(X)|)$.
   ただし, $N(X)$ は X に隣接する頂点の集合を意味する.
2. 完全マッチングが存在する.

この定理は以下のように無限グラフに拡張される.

無限グラフに対する結婚定理 (M. Hall [9]). 任意の B-局所有限 (B の各点の次数が有限) な二部グラフ $(B,G;R)$ に対して, 以下は同値である.

1. **B-Hall 条件** : $\forall X \subset_{\mathrm{fin}} B\,(|X| \leq |N(X)|)$.
2. B から G への単射 $M \subset R$ が存在する.

ただし, $\forall X \subset_{\mathrm{fin}} B \ldots$ は "任意の B の有限部分集合 X に対して..." の略記である. なお, 以下では同様の略記として $\subset_{\mathrm{fin}}$ を用いる. この定理の系として以下が得られる.

無限グラフに対する対称結婚定理. 任意の局所有限二部グラフ $(B,G;R)$ に対して, 以下は同値である.

1. **対称 Hall 条件** : $\forall X \subset_{\mathrm{fin}} (B \cup G)\,(|X| \leq |N(X)|)$.
2. B から G への全単射 $M_s \subset R$ が存在する.

なお, これらの主張において 2 から 1 は明らかであり, 我々が問題とするのは B-Hall 条件 (resp. 対称 Hall 条件) を満たす局所有限二部グラフ $(B,G;R)$ から B から G への単射 $M \subset R$ (resp. 全単射 $M_s \subset R$) を構成するアルゴリズムである.

3.1 先行結果

再帰的組合せ論 [7] の先駆けとして, Manaster-Rosenstein [14] は無限グラフに対する結婚定理を考察し, B-Hall 条件を満たす局所有限な二部グラフ $(B,G;R)$ が計算可能だとしても, その**解** (B から G への単射 $M \subset R$) は計算可能とは限らないことを示した. これは問 1.1 に対する否定的回答を与えるものである. 更に [14] によれば, 全ての頂点の次数が計算可能 (以下これを**計算可能局所有限**と

いう) であったとしても同様の主張が成り立つ. 一方, Kierstead [13] は**拡張 B-Hall 条件**[*2]:

$$\forall n \exists m \forall X \subset_{\mathrm{fin}} B\big(|N(X)|-|X| \geq 0 \wedge (|X| \geq m \rightarrow |N(X)|-|X| \geq n)\big)$$

及び, 更に「全ての n に対し, 条件を満たす m が計算可能に得られる」ことを要求する**計算可能拡張 B-Hall 条件**を導入し, 以下の二つを示した.

1. 計算可能拡張 B-Hall 条件を満たす計算可能局所有限な計算可能二部グラフ $(B,G;R)$ に対し, その解を与えるアルゴリズムが存在する.
2. 拡張 B-Hall 条件を満たす計算可能局所有限な二部グラフ $(B,G;R)$ が計算可能だとしても, その解は計算可能とは限らない.

なお, 1 は主張「計算可能拡張 B-Hall 条件を満たす計算可能局所有限な二部グラフ $(B,G;R)$ は解をもつ」の列版が $\mathsf{RCA}_0+\mathrm{IA}$ で証明できることを意味するものであり, 2 は主張「拡張 B-Hall 条件を満たす計算可能局所有限な二部グラフ $(B,G;R)$ は解をもつ」が $\mathsf{RCA}_0+\mathrm{IA}$ では証明できないことを導く. Hirst [11] は Manaster-Rosenstein による上記の結果を踏まえ結婚定理を逆数学的に解析し, 無限グラフに対する**結婚定理**「B-Hall 条件を満たす B-局所有限な二部グラフ $(B,G;R)$ は解を持つ」及び**対称結婚定理**「対称 Hall 条件を満たす局所有限な二部グラフ $(B,G;R)$ は**対称解** (B から G への全単射 $M_s \subset R$) を持つ」が RCA_0 上で ACA と同値であることを示した. また彼は, その仮定において局所有限を計算可能局所有限に強めた結婚定理及び対称結婚定理が, RCA_0 上 WKL と同値であることを示した. しかし, その仮定において B-Hall 条件を拡張 B-Hall 条件や計算可能拡張 B-Hall 条件に強めた結婚定理の逆数学的強さは分かっていなかった.

3.2 拡張 Hall 条件をもつ結婚定理の逆数学

Kierstead による先行結果をふまえ, Fujiwara-Higuchi-Kihara[6] は, B-Hall 条件, B-局所有限性, G-局所有限性という 3 種類の仮定を少しずつ強めることにより結婚定理の逆数学的強さがどのように変動するかを解析し, 考え得る全ての結婚定理に対して必要十分となる集合存在公理を明らかにした (表 1 参照). なお, 計算可能拡張 B-Hall 条件をもつ結婚定理の RCA_0 や $\mathsf{RCA}_0+\mathrm{I}\Sigma^0_3$ における証明は, どれも与えられた結婚問題 $(B,G;R)$ に対し解 $M \subset R$ を返すアルゴリズムを与えるものである. それゆえ, それらの結婚定理の列版を考えても逆数学的強さは変わらない. 特に, 前述の主張「計算可能拡張 B-Hall 条件を満たす計算可能局所有限な二部グラフは解をもつ」($\mathrm{B}''_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}''$-M) 及びその列版 Seq($\mathrm{B}''_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}''$-M) は RCA_0 で証明でき (問 1.3 に対する回答), 主張「拡張 B-Hall 条件を満たす計算可能局所有限な二部グラフは解をもつ」($\mathrm{B}''_{\mathrm{H}'}\mathrm{G}''$-M) は RCA_0 上 WKL と同値になる. また, 表 1 及びその証明から導かれる以下の結果は, 計算可能拡張 B-Hall 条件を満たす計算可能二部グラフの解が計算可能であるためには 計算可能 G-局所有限性 (G の各点の次数が計算可能) のみが不可欠であることを意味する, Kierstead の結果の拡張である.

[*2] 拡張 B-Hall 条件は B-Hall 条件の組合せ論的拡張であることに注意.

	B-Hall 条件	拡張 B-Hall 条件	計算可能拡張 B-Hall 条件	
ACA	偽	$\mathrm{B}_{\mathrm{H}'}\mathrm{G}$-M	$\mathrm{B}_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}$-M	
	偽	$\mathrm{B}_{\mathrm{H}'}\mathrm{G}'$-M	$\mathrm{B}_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}'$-M	
	偽	$\mathrm{B}_{\mathrm{H}'}\mathrm{G}''$-M	$\mathrm{B}_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}''$-M	$\dashv \mathsf{RCA}_0 + \mathrm{I}\Sigma^0_3$
	$\mathrm{B}'_{\mathrm{H}}\mathrm{G}$-M [11]	$\mathrm{B}'_{\mathrm{H}'}\mathrm{G}$-M	$\mathrm{B}'_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}$-M	
	$\mathrm{B}'_{\mathrm{H}}\mathrm{G}'$-M	$\mathrm{B}'_{\mathrm{H}'}\mathrm{G}'$-M	$\mathrm{B}'_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}'$-M	
	$\mathrm{B}'_{\mathrm{H}}\mathrm{G}''$-M	$\mathrm{B}'_{\mathrm{H}'}\mathrm{G}''$-M	$\mathrm{B}'_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}''$-M	$\dashv \mathsf{RCA}_0 + \mathrm{I}\Sigma^0_3$
WKL	$\mathrm{B}''_{\mathrm{H}}\mathrm{G}$-M [11]	$\mathrm{B}''_{\mathrm{H}'}\mathrm{G}$-M	$\mathrm{B}''_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}$-M	
	$\mathrm{B}''_{\mathrm{H}}\mathrm{G}'$-M	$\mathrm{B}''_{\mathrm{H}'}\mathrm{G}'$-M	$\mathrm{B}''_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}'$-M	
	$\mathrm{B}''_{\mathrm{H}}\mathrm{G}''$-M	$\mathrm{B}''_{\mathrm{H}'}\mathrm{G}''$-M	$\mathrm{B}''_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}''$-M	$\dashv \mathsf{RCA}_0$

表記. $\mathrm{B}^{(\cdot)}, \mathrm{G}^{(\cdot)}, \mathrm{H}^{(\cdot)}$ はそれぞれ以下を表し, $\mathrm{B}^{(\cdot)}_{\mathrm{H}^{(\cdot)}}\mathrm{G}^{(\cdot)}$-M は「条件 $\mathrm{B}^{(\cdot)}, \mathrm{G}^{(\cdot)}, \mathrm{H}^{(\cdot)}$ を満たす二部グラフ $(B,G;R)$ は解を持つ」という主張を表す.

- X : X-局所有限性なし, $X \in \{B,G\}$.
- X′ : X-局所有限, $X \in \{B,G\}$.
- X″ : 計算可能 X-局所有限, $X \in \{B,G\}$.
- H : B-Hall 条件.
- H′ : 拡張 B-Hall 条件.
- H″ : 計算可能拡張 B-Hall 条件.

表 1　拡張 Hall 条件をもつ結婚定理の逆数学的強さ [6]

1. 計算可能拡張 B-Hall 条件を満たす計算可能 G-局所有限な計算可能二部グラフ $(B,G;R)$[*3]に対し, その解を与えるアルゴリズムが存在する.
2. 計算可能拡張 B-Hall 条件を満たす B-計算可能局所有限かつ G-局所有限な二部グラフ $(B,G;R)$ が計算可能だとしても, その解は計算可能とは限らない.

一方, [6] における主張「計算可能拡張 B-Hall 条件を満たす計算可能 G-局所有限な二部グラフは解をもつ」($\mathrm{B}_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}''$-M) 及びその列版 Seq($\mathrm{B}_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}''$-M) の $\mathsf{RCA}_0 + \mathrm{I}\Sigma^0_3$ における証明では, 与えたアルゴリズムのバリフィケーションを $\mathrm{I}\Sigma^0_3$ 以下の帰納法公理のみを使って行っている. これは問 1.3 に対する部分的回答を与えるものである. しかし, Σ^0_3 帰納法公理の必要性については未だ未解決である.

未解決問題. RCA_0 上 Seq($\mathrm{B}_{\mathrm{H}''}\mathrm{G}''$-M) と同値となる帰納法公理を特定せよ.

また, Fujiwara[5] は対称結婚定理についても同様の解析を行った. まず, **拡張対称 Hall 条件**:

$$\forall n \exists m \forall X \subset_{\mathrm{fin}} (B \cup G) \big(|N(X)| - |X| \geq 0 \wedge (|X| \geq m \rightarrow |N(X)| - |X| \geq n) \big)$$

[*3] B-局所有限とは限らないことに注意.

及び, 更に「全ての n に対し, 条件を満たす m が計算可能に得られる」ことを要求する計算可能拡張対称 Hall 条件を導入した. そして, 対称結婚定理に関して以下の結果を得た.

- 主張「計算可能拡張対称 Hall 条件を満たす計算可能局所有限な二部グラフは対称解をもつ」及びその列版は RCA_0 で証明できる. (問 1.3 に対する回答)
- 上の主張において計算可能拡張対称 Hall 条件を拡張対称 Hall 条件や対称 Hall 条件に弱めるとその主張は RCA_0 上 WKL と同値になる.
- 上の主張において計算可能局所有限性からを計算可能性を除くとその主張は RCA_0 上 ACA と同値になる.

これらの結果及びその証明から以下が導かれる.

1. 計算可能拡張対称 Hall 条件を満たす計算可能局所有限な計算可能二部グラフに対し対称解を与えるアルゴリズムが存在する.
2. 計算可能拡張対称 Hall 条件と計算可能局所有限性のうちどれか一つでも計算可能性がなくなると対称解は計算可能とは限らなくなる.

3.3 有界 Hall 条件をもつ結婚定理の逆数学

[13] において, Kierstead は結婚定理を一様計算可能にするために計算可能拡張 Hall 条件を導入した. 一方, Fujiwara-Higuchi-Kihara[6] は結婚定理を RCA_0 で証明可能にする以下の条件を導入した.

定義. 二部グラフ $(B,G;R)$ に対し, 以下を *B*-**有界 Hall 条件** (記号 $\mathrm{H_{cb}}$ を用いて表す) という.

$$\exists k \forall X \subset_{\mathrm{fin}} B\,(|X| \leq |N(X)| \leq |X|+k).$$

なお, *B*-有界 Hall 条件もまた *B*-Hall 条件の組合せ論的拡張であること及び *B*-有界 Hall 条件は *B*-局所有限性を保証することに注意されたい. *B*-有界 Hall 条件に関して以下が成り立つ.

定理 (Fujiwara-Higuchi-Kihara [6]). RCA_0 で以下が示せる.

$\mathrm{B}'_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G\text{-}M}$: *B*-有界 Hall 条件を満たす (*B*-局所有限な) 二部グラフ $(B,G;R)$ は解をもつ.

これの証明においては, *B*-有界 Hall 条件を満たす二部グラフ $(B,G;R)$ 対して解を返す一様なアルゴリズムは与えられていない. しかし, 仮定として計算可能 *G*-局所有限性を加えれば, 与えられた二部グラフ $(B,G;R)$ 対して解を返す一様なアルゴリズムが存在する. 実際, そのアルゴリズムに対するバリフィケーションは強い帰納法公理を使わずに実行でき, 主張「*B*-有界 Hall 条件を満たす計算可能 *G*-局所有限な二部グラフ $(B,G;R)$ は解をもつ」の列版 $\mathrm{Seq}(\mathrm{B}'_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}''\text{-M})$ は RCA_0 で証明できる. (問 1.3 に対する回答) これに対し, 上記の主張「*B*-有界 Hall 条件を満たす二部グラフ $(B,G;R)$ は解をもつ」の列版 $\mathrm{Seq}(\mathrm{B}'_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G\text{-}M})$ は RCA_0 上 ACA と同値になる. これは *B*-有界 Hall 条件を満たす二部グラフ $(B,G;R)$ 対して解を返す一様なアルゴリズムを作るには算術的集合存在公理 ACA が

必要不可欠であることを意味するものであり, 問 1.2 に対する回答である. なお, B-局所有限性, G-局所有限性を強めていくことによって B-有界 Hall 条件をもつ結婚定理の列版の強さは表 2 のように変動することが分かっている.

ACA	$\mathrm{Seq}(\mathrm{B}'_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}\text{-M})$	$\mathrm{Seq}(\mathrm{B}'_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}'\text{-M})$	
WKL	$\mathrm{Seq}(\mathrm{B}''_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}\text{-M})$	$\mathrm{Seq}(\mathrm{B}''_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}'\text{-M})$	
		$\mathrm{Seq}(\mathrm{B}'_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}''\text{-M})$	
		$\mathrm{Seq}(\mathrm{B}''_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}''\text{-M})$	
$\mathsf{RCA_0}$			$\cdots$ IA

表 2 B-有界 Hall 条件をもつ結婚定理の列版の逆数学的強さ [6]

さらに, 対称結婚定理についての解析 [5] からは問 1.3 に関連するより興味深い結果が得られている. まず, 以下の条件を考える.

定義. 二部グラフ $(B,G;R)$ に対し, 以下を B-**有界対称 Hall 条件**という.

$$\exists k \forall X \subset_{\mathrm{fin}} B\,(|X| \leq |N(X)| \leq |X|+k) \ \wedge\ \forall X \subset_{\mathrm{fin}} G\,(|X| \leq |N(X)|)\,.$$

B-有界対称 Hall 条件は対称 Hall 条件及び B-有界 Hall 条件の組合せ論的拡張であることに注意されたい. このとき, 前の定理と同様にして以下が示せる.

定理 (Fujiwara [5]). $\mathsf{RCA_0}$ で以下が示せる.

$\mathrm{B}'_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}'_{\mathrm{H}}\text{-}\mathrm{M_s}$: B-有界対称 Hall 条件を満たす局所有限二部グラフ $(B,G;R)$ は対称解をもつ.

これの証明も B-有界対称 Hall 条件を満たす局所有限二部グラフ $(B,G;R)$ 対して対称解を返す一様なアルゴリズムを与えるものではない (実際 $\mathrm{Seq}(\mathrm{B}'_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}'_{\mathrm{H}}\text{-}\mathrm{M_s})$ は $\mathsf{RCA_0}$ 上 ACA と同値になる) が, 仮定として計算可能 B-局所有限性を加えれば, 与えられた二部グラフ $(B,G;R)$ 対して対称解を返す一様なアルゴリズムが存在する. このアルゴリズムのバリフィケーションには $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ と呼ばれる $\mathsf{RCA_0}$ には含まれない強い帰納法公理[*4]が使われている. 一方で, B-有界対称 Hall 条件, 計算可能 B-局所有限性, G-局所有限性を仮定にもつ対称結婚定理の列版 $\mathrm{Seq}(\mathrm{B}''_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}'_{\mathrm{H}}\text{-}\mathrm{M_s})$ は $\mathsf{RCA_0}$ 上 $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ を導出することが示せる. これは, B-有界対称 Hall 条件を満たす計算可能 B-局所有限かつ G-局所有限な二部グラフ $(B,G;R)$ 対して対称解を返すどんな一様アルゴリズムを考えても, そのバリフィケーションには帰納法公理 $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ を必要とすることを意味する問 1.3 に対する回答である. これに対し, B-有界対称 Hall 条件, B-局所有限性, 計算可能 G-局所有限性を仮定にもつ対称結婚定理に対しては強い帰納法公理を使わずにバリフィケーションを実行できるアルゴリズムが存在し, $\mathrm{Seq}(\mathrm{B}'_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}''_{\mathrm{H}}\text{-}\mathrm{M_s})$ は $\mathsf{RCA_0}$ で証明できる. (問 1.3 に対する回答) 最後に, B-有界対称 Hall 条件をもつ対称結婚定理の列版の逆数学的強さに関して得られている結果を表 3 にまとめておく.

[*4] $\mathrm{B}\Sigma^0_2$ は $\mathrm{I}\Sigma^0_1$ と $\mathrm{I}\Sigma^0_2$ のちょうど中間の強さを持つ (2 章参照) 帰納法公理であり, $\mathsf{RCA_0}$ 上無限鳩ノ巣原理と同値であることが知られている.

ACA	$\mathrm{Seq}(\mathrm{B}'_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}'_{\mathrm{H}}\text{-}\mathrm{M_s})$		
	$\mathrm{Seq}(\mathrm{B}'_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}''_{\mathrm{H}}\text{-}\mathrm{M_s})$ $\mathrm{Seq}(\mathrm{B}''_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}''_{\mathrm{H}}\text{-}\mathrm{M_s})$	$\mathrm{Seq}(\mathrm{B}''_{\mathrm{H_{cb}}}\mathrm{G}'_{\mathrm{H}}\text{-}\mathrm{M_s})$	
RCA_0		$\mathrm{B}\Sigma^0_2$	$\cdots$ IA

表 3　*B*-有界対称 Hall 条件をもつ対称結婚定理の列版の逆数学的強さ [5]

参考文献

[1] V. Brattka and G. Gherardi, Weihrauch degrees, omniscience principles and weak computability, J. Symb. Log., 76(1) (2011), pp. 143–176.
[2] V. Brattka and G. Gherardi, Effective choice and boundedness principles in computable analysis, Bull. Symb. Log., 17(1) (2011), pp. 73–117.
[3] F. G. Dorais, J. L. Hirst and P. Shafer, Reverse mathematics, trichotomy, and dichotomy, Journal of Logic and Analysis 4(13), (2012), pp. 1–14.
[4] Y. L. Ershov, S. S. Goncharov, A. Nerode and J. B. Remmel, Handbook of recursive mathematics, Stud. Logic Found. Math., 139, Amsterdam: North-Holland, 1998.
[5] M. Fujiwara, in preparation.
[6] M. Fujiwara, K. Higuchi and T. Kihara, On the strength of marriage theorems and uniformity, Mathematical Logic Quarterly, to appear.
[7] W. Gasarch, A survey of recursive combinatorics, [4] Vol. 2; Recursive Algebra, Analysis and Combinatorics (1998), pp. 1041–1176.
[8] P. Hájek and P. Pudlák, Metamathematics of First-Order Arithmetic, Springer, Berlin, 1993.
[9] M. Hall, Distinct representatives of subsets, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), pp. 922–926.
[10] P. Hall, On representatives of subsets, J. London Math. Soc. 10 (1935), pp. 26–30.
[11] J. L. Hirst, Marriage theorems and reverse mathematics, Contemporary Mathematics, 106 (1990), pp. 181–196.
[12] J. L. Hirst, Representations of reals in reverse mathematics, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 55 (2007), no.4, pp. 303–316.
[13] H. A. Kierstead, An Effecttive version of Hall's theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 88 (1983), pp. 124–128.
[14] A. Manaster and J. Rosenstein, Effective matchmaking (recursion theoretic aspects of a theorem of Philip Hall), Proc. London. Math. Soc., 25 (1972), pp. 615–654
[15] S. G. Simpson, Subsystems of Second Order Arithmetic; Second Edition, Cambridge University Press, 2009.