数理解析研究所講究録
第1894巻 2014年 58-62

最適選好マッチングの端点集合の構造について
On the structure of the sets of end vertices of popular matchings

平川 瑞樹 Mizuki Hirakawa
山内 由紀子 Yukiko Yamauchi
来嶋 秀治 Shuji Kijima
山下 雅史 Masafumi Yamashita
九州大学
Kyushu University

1 はじめに

安定結婚問題 (stable marriage problem)[1] の入力は，男性集合と女性集合を頂点集合とする二部グラフ G および各人の異性に対する選好順序からなる．異なる2つのマッチング M と M' において，M' での状況よりも M での状況を好む頂点数がその逆よりも多いとき，マッチング M は M' よりも人気であるという．マッチング M よりも人気のあるマッチング M' が存在しないとき，M を最適選好マッチング (Popular Matching; PM)[2] という（定義の詳細は2.3節を参照）．PM は安定マッチング (Stable Matching; SM)[1] の緩和概念として知られている．

Huang と Kavitha は PM を構成する各枝の両端点からなる集合を要素とする集合族に着目し，その集合族には常に（唯一の）最小元が存在することを [4] で示している．また，その集合族は常に（唯一の）最大元を持つこともわかっている [3].

本稿では，これらの性質から考えられる PM の解構造を紹介する．具体的には，PM の端点集合からなる集合族は積 $\cap$ や和 $\cup$ の操作に関して一般には束 (lattice) を形成するとは限らないことを示す．また，いかなる PM にも属せてない頂点が存在するとき，その頂点がどのような嘘の選好順序を申請したとしても PM に属すことができないことを示す．

2 定義

2.1 安定結婚問題

安定結婚問題の入力は，男性集合 $\mathcal{A}$ と女性集合 $\mathcal{B}$ および各人の選好順序からなる．各人はそれぞれの選好順序上位の相手と結ばれることを好む状況で，適切な男女の組み合わせを探す．本稿での入力は，男性の人数と女性の人数が異なる場合を許し，選好順序は全順序制約を満たす不完全リストとする．ただし，男性 $a \in \mathcal{A}$ が女性 $b \in \mathcal{B}$ を選好順序にもつとき，かつそのときに限り，b も a を選好順序にもつと仮定する．

安定結婚問題の入力は無向二部グラフ $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, E)$ によって表すことができる．ただし，頂点集合は男性集合 $\mathcal{A}$ と女性集合 $\mathcal{B}$ の和集合とし，男性 $a \in \mathcal{A}$ が女性 $b \in \mathcal{B}$ を選好順序にもつとき（仮定より，このとき b も a を選好順序にもつ），$(a, b) \in E$ とする．

2.2 安定マッチング

男性 $a \in \mathcal{A}$ と女性 $b \in \mathcal{B}$ の頂点の対からなる枝 $(a, b) \in E$ のことをペア (pair) とよぶ．どの頂点も1つより多くのペアに属さないとき，集合 $M \subseteq E$ をマッチング (matching) という．あるマッチング M において頂点 $u \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ がペアに属しているとき，u の M でのペアの相手を $M(u)$ と表す．マッチング

M において，男性 $a' \in \mathcal{A}$ が M でペアを構成していないか $M(a')$ よりも b' を好むとき，かつ，$b' \in \mathcal{B}$ が M でペアを構成していないか $M(b')$ よりも a' を好むとき，ペア $(a', b') \in E \setminus M$ のことをマッチング M における**ブロッキングペア**とよぶ．マッチング M においてブロッキングペアが存在しないとき，M を**安定マッチング** (Stable Matching; SM) という．

SM を出力する方法として Gale-Shapley アルゴリズム [1] がよく知られている．アルゴリズムの詳細は省略するが，そのアルゴリズムは SM の 1 つを必ず出力するので，任意の安定結婚問題の入力に対して SM は必ず存在する．

2.3 最適選好マッチング

異なる 2 つのマッチング M と M' において，頂点 u が M' での状況よりも M での状況のほうを好むとき (u が M' ではペアに属していないが M ではペアに属しているとき，または，いずれのマッチングでもペアに属しているが $M'(u)$ よりも $M(u)$ の方を好むとき)，「u は M' よりも M を好む」と表現する．M' よりも M を好む頂点がその逆よりも多いとき，「M は M' よりも人気である」と表現する．マッチング M よりも人気のあるマッチング M' が存在しないとき，M を**最適選好マッチング** (Popular Matching; PM) という．すなわち，PMM とは，いかなるマッチング M' と比較しても過半数以上の頂点から支持を得られるようなマッチングのことである．

SM は PM でもある．その理由として，ある SMM と任意のマッチング M' について考えると，ペア $(u, v) \in M' \setminus M$ が SMM のブロッキングペアとなることはないので，u と v の両者が M よりも M' を好むことはない．よって，M' を好む頂点数よりも M を好む頂点数のほうが必ず多くなり，M は PM の性質を満たす．2.2 節で述べたように，安定結婚問題において SM は必ず存在するので，PM も必ず存在する．

3 PM の特徴づけ

この節では Huang と Kavitha[4] によって示された PM の特徴づけを紹介する．

3.1 PM の必要十分条件

定義 1. *[4]* 頂点 $u \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ とその選好順序に含まれる頂点 x, y に対して，関数 $\mathrm{vote}_u(x, y)$ を

$$\mathrm{vote}_u(x, y) = \begin{cases} 1 & (u \text{ が } y \text{ よりも } x \text{ を好むとき}), \\ -1 & (u \text{ が } x \text{ よりも } y \text{ を好むとき}), \\ 0 & (x = y \text{ のとき}), \end{cases}$$

と定める．

グラフ G におけるあるマッチングを M とする．このとき，各枝 $e = (u, v) \in E \setminus M$ に対して $\alpha_e = \mathrm{vote}_u(v, M(u))$ と $\beta_e = \mathrm{vote}_v(u, M(v))$ を値とするラベル (α_e, β_e) を付ける．また，u が M でペアに属せていないときには，u はペアに属さない状況よりも属す状況を好むので $\mathrm{vote}_u(v, M(u)) = 1$ となる．このとき，ラベルが $(\alpha_e, \beta_e) = (-1, -1)$ である枝 $e \in E \setminus M$ を G から全て取り除いた部分グラフを G_M とする．

定理 1. *[4]* マッチング M に関するグラフ G_M において以下の条件 *(i)-(iii)* を全て満たすとき，かつそのときに限り，M は *PM* である．

(i) ラベルが $(1, 1)$ である枝を含むような M に関する交互サイクルが存在しない．

(ii) M に属さない枝で始まり，ラベルが $(1, 1)$ である枝を含むような M に関する交互パスが存在しない．

(iii) ラベルが $(1, 1)$ である枝を *2* つ以上含むような M に関する交互パスが存在しない．

SM にはブロッキングペア（ラベルが $(1, 1)$ である枝）は存在しない．よって，SM は明らかに条件 (i)-(iii) を満たす．また PMM において，条件 (ii) と (iii) からわかるように，両端の枝が M に属す交互パ

スにはラベルが $(1,1)$ である枝は高々1つ許されている．

グラフ G_M が (i)-(iii) のすべての条件を満たすかどうかは線形時間で判定できることが [4] で示されている．

3.2 サイズが最大な PM の十分条件

定理 2. *[4]PMM が次の条件 (iv) を満たすとき，M はサイズが最大な PM である．*

(iv) *グラフ G_M において，M の増加パスが存在しない．*

条件 (iv) はサイズが最大な PM であるための十分条件であり，必要条件ではないことに注意されたい．

安定結婚問題において条件 (iv) を満たす最大最適選好マッチングの 1 つを $O(mn_0)(m = |E|, n_0 = \min(|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|))$ で必ず出力するアルゴリズムが [4] で提案されている．よって，次の定理が成り立つ．

定理 3. *[4] 任意の安定結婚問題の入力において，条件 (iv) を満たすサイズが最大な PM は 1 つ以上存在する．*

4 PM の端点集合に関する性質

Huang と Kavitha[4] は SM と PM の関係性にも着目し，それらのマッチングを構成する端点集合に関する性質として次の定理 4 と系 5 を示している．

定理 4. *[4] 任意の PM を構成する端点集合は，ある SM を構成する端点集合 $U_{\min} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ を部分集合にもつ．*

系 5. *[4]SM は必ず一意の端点集合 $U_{\min}$ によって構成される．*

定理 4 と系 5 の性質より，SM はサイズ最小の PM である．

本研究では定理 3.1 の PM の必要十分条件と定理 3 を用いて，次に示す定理 6 と系 7 を示している．

定理 6. *[3] 任意の PM を構成する端点集合は，あるサイズが最大の PM を構成する端点集合 $U_{\max} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ の部分集合となる．*

系 7. *[3] サイズが最大の PM は必ず一意の端点集合 $U_{\max}$ によって構成される．*

定理 4，系 5，定理 6，系 7 を合わせることで，次の定理 8 を得ることができる．

定理 8. *[3] 安定結婚問題の任意の入力に存在する全ての PM を構成する端点集合からなる集合族は，唯一の最小元 $U_{\min}$ と最大元 $U_{\max}$ をもつ．*

ある PMM の全ての枝の両端点からなる端点集合を V_M と表し，各 V_M を要素にもつような端点集合族を $\mathcal{V}$ を考える．定理 8 より，$\mathcal{V}$ には最小元 $U_{\min}$ と最大元 $U_{\max}$ が必ず存在する．しかし，異なる 2 つの PMM_1, M_2 が存在するとき，すなわち，$V_{M_1} \in \mathcal{V}$ かつ $V_{M_2} \in \mathcal{V}$ であるときに，$V_{M_1} \cap V_{M_2} \in \mathcal{V}$ や $V_{M_1} \cup V_{M_2} \in \mathcal{V}$ は一般には成り立たない．それらが成り立たない例を次節で紹介する．

5 反例

異なる 2 つの PMM_1, M_2 が存在するとき，$V_{M_1} \cap V_{M_2} \in \mathcal{V}$ が成り立たない例を表 1 と図 1 に示す．

a_1	:	b_1				b_1	:	a_2	a_1	a_3
a_2	:	b_1	b_2			b_2	:	a_2		
a_3	:	b_1	b_5	b_3		b_3	:	a_4	a_3	
a_4	:	b_4	b_3			b_4	:	a_7	a_4	a_5
a_5	:	b_5	b_4			b_5	:	a_3	a_5	
a_6	:	b_6				b_6	:	a_7	a_6	
a_7	:	b_6	b_7	b_4		b_7	:	a_7		

表 1:

表 1 の例に存在する異なる 2 つの PM を $M_1 = \{(a_2,b_1),(a_3,b_3),(a_4,b_4),(a_5,b_5),(a_6,b_6),(a_7,b_7)\}$ と $M_2 = \{(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_5),(a_4,b_3),(a_5,b_4),(a_7,b_6)\}$ とする．$M_1 \oplus M_2$ の中の連結成分に

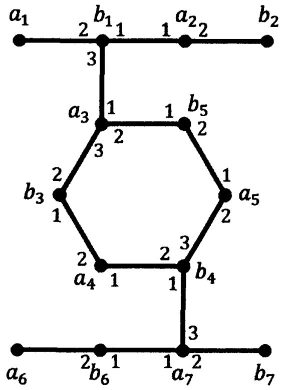

図 1: 表 1 のグラフ表現

は M_1 の増加パス $p_{M_1} = \langle a_1, b_1, a_2, b_2\rangle$ と M_2 の増加パス $p_{M_2} = \langle a_6, b_6, a_7, b_7\rangle$，交互サイクル $c = \langle a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5\rangle$ が存在する．またこれらの 2 つの PM を構成する端点集合の積は $V_{M_1} \cap V_{M_2} = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, b_1, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ である．

このとき，$V_{M_1} \cap V_{M_2}$ によって構成されるマッチングとして $M_1 \oplus p_{M_2} = \{(a_2, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_4), (a_5, b_5), (a_7, b_6)\}$ と $M_2 \oplus p_{M_1} = \{(a_2, b_1), (a_3, b_5), (a_4, b_3), (a_5, b_4), (a_7, b_6)\}$ の 2 種類が考えられる（2 つのマッチングは $M_2 \oplus p_{M_1} \oplus c$ と $M_1 \oplus p_{M_2} \oplus c$ とそれぞれ等しい）．しかし，$G_{M_1 \oplus p_{M_2}}$ には条件 (ii) を違反する交互パス $\langle a_6, b_6, a_7, b_4, a_4, b_3, a_3, b_5, a_5\rangle$ が存在し，$M_1 \oplus p_{M_2}$ は PM ではないことがわかる．同様に，$G_{M_2 \oplus p_{M_1}}$ にも条件 (ii) を違反する交互パス $\langle b_2, a_2, b_1, a_3, b_5, a_5, b_4, a_4, b_3\rangle$ が存在し，$M_2 \oplus p_{M_1}$ も PM ではないことがわかる．よって，表 5 の例において端点集合 $V_{M_1} \cap V_{M_2}$ からなる PM は存在しない．すなわち，一般に $V_{M_1} \cap V_{M_2} \in \mathcal{V}$ は成り立たない．

次に，異なる 2 つの PMM_1, M_2 が存在するときに，$V_{M_1} \cup V_{M_2} \in \mathcal{V}$ が成り立たない例を表 2 と図 2 に示す．

表 2 の例に存在する異なる 2 つの PM を $M_1 = \{(a_2, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_4), (a_5, b_5), (a_6, b_6), (a_7, b_7)\}$ と $M_2 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_5), (a_4, b_3), (a_5, b_4), (a_7, b_6)\}$ とする．$M_1 \oplus M_2$ の中の連結成分には M_1 の増加パス $p_{M_1} = \langle a_1, b_1, a_2, b_2\rangle$ と M_2 の増加パス $p_{M_2} = \langle a_6, b_6, a_7, b_7\rangle$，交互サイクル $c = \langle a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5\rangle$ が存在する．またこれらの 2 つの PM を構成する端点集合の和は $V_{M_1} \cup V_{M_2} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$ である．

このとき，$V_{M_1} \cap V_{M_2}$ によって構成されるマッチングとして $M_1 \oplus p_{M_1} = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4), (a_5, b_5), (a_6, b_6), (a_7, b_7)\}$ と $M_2 \oplus p_{M_2} = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_5), (a_4, b_3), (a_5, b_4), (a_6, b_6), (a_7, b_7)\}$ の 2 種類が考えられる（2 つのマッチングは $M_2 \oplus p_{M_2} \oplus c$ と $M_1 \oplus p_{M_1} \oplus c$ にそれぞれ等しい）．しかし，$G_{M_1 \oplus p_{M_1}}$ には条件 (ii) を違反する交互パス $\langle a_8, b_3, a_3, b_1, a_1\rangle$ が存在し，$M_1 \oplus p_{M_1}$ は PM ではないことがわかる．同様に，$G_{M_2 \oplus p_{M_2}}$ にも条件 (ii) を違反する交互パス $\langle b_8, a_5, b_4, a_7, b_7\rangle$ が存在し，$M_2 \oplus p_{M_2}$ も PM ではないことがわかる．よって，表 2 の例において端点集合 $V_{M_1} \cup V_{M_2}$ からなる PM は存在しない．すなわち，一般に $V_{M_1} \cup V_{M_2} \in \mathcal{V}$ も成り立たない．

a_1	:	b_1				b_1	:	a_2	a_3	a_1
a_2	:	b_1	b_2			b_2	:	a_2		
a_3	:	b_5	b_1	b_3		b_3	:	a_3	a_4	a_8
a_4	:	b_3	b_4			b_4	:	a_4	a_7	a_5
a_5	:	b_4	b_5	b_8		b_5	:	a_5	a_3	
a_6	:	b_6				b_6	:	a_7	a_6	
a_7	:	b_6	b_4	b_7		b_7	:	a_7		
a_8	:	b_3				b_8	:	a_5		

表 2:

よって，PM の端点集合族 $\mathcal{V}$ は積 $\cap$ や和 $\cup$ の操作に関して束を形成しない．

しかし，表 1 や表 2 の例では $M_1 \oplus M_2$ の中に交互サイクルがそれぞれ存在していた．本研究では，$M_1 \oplus M_2$ の中に交互サイクルが存在しないときについても調査を行い，次の定理が成り立つことがわかっている．

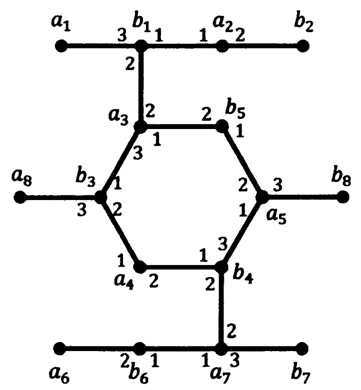

図 2: 表 2 のグラフ表現

定理 9. 異なる *2* つの *PM* M_1, M_2 において，$M_1 \oplus M_2$ の中に交互サイクルが存在しないとき，$M_1 \oplus M_2$ の中に存在する M_2 の全ての増加パス $p_{M_2}, p'_{M_2}, \ldots, p^{(n)}_{M_2}$ を M_1 に適用させて得られるマッチング $M_1 \oplus p_{M_2} \oplus p'_{M_2} \oplus \cdots \oplus p^{(n)}_{M_2}$ は，端点集合 $V_{M_1} \cap V_{M_2}$ からなる *PM* である．

6 戦略的操作

この節では，現在の自分の状況に不満を持っているようなある頂点 $v_{\mathrm{lie}} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が存在するときに，その頂点が自分の状況を良くしようと戦略的な操作をとることを考える．具体的には，いずれの PM でもペアを組めていない頂点 v_{lie} が，本来とは異なる嘘の選好順序を申請することでペアの相手を見つかるような PM に属そうとする．ただし，PM の判定は v_{lie} の嘘を反映させたグラフ上で行うものとする．また，嘘をつく v_{lie} は他の頂点の選好順序を完全に把握し，他の頂点はその選好順序で申請すると保証され，各人は合理的とする．

しかし，定理 3.1 の PM の必要十分条件と定理 3 を用いることで，次の定理が示される．

定理 10. いずれの *PM* でもペアを組めていない頂点 v_{lie} がどのように嘘の選好順序を申請したとしても，その嘘を反映させたグラフ上に存在するいずれの *PM* でも v_{lie} はペアを組むことができない．

7 おわりに

PM の端点集合からなる集合族には唯一の最大元や最小元が必ず存在するが，積 ∩ や和 ∪ の操作に関して一般には束を形成しないことがわかった．しかし，2 つの PM の排他的論理和の中に交互サイクルが存在しなければ，それぞれの端点集合の積集合からなる PM は必ず存在することがわかったので，和集合に関しても同様の性質が成り立つのかを調べ，解構造を解明する手掛かりにしたい．

また，どの PM にも属せていない頂点は，どのような嘘の選好順序を申請しても PM に属せないことがわかった．今後は，ある PM には属せているがいずれの PM でのペアの相手よりも好きな人がいる頂点に関して，その頂点が嘘の選好順序を申請することでさらに好きな相手と PM に属せるのかを調べたい．

参考文献

[1] D. Gale and L.S. Shapley, College admissions and the stability of marriage, The American Mathematical Monthly, 69 (1962), pp.9–15.

[2] P. Gärdenfors, Match making: assignments based on bilateral preferences, Behavioural Sciences, 20 (1975), pp.166–173.

[3] M. Hirakawa, Y. Yamauchi, S. Kijima and M. Yamashita, Any Max-Cardinality Popular Matching in a Stable Marriage Problem Consists of the Same People, Proceedings of the 8th Japanese-Hungarian Symposium, pp.225–228.

[4] C.C. Huang and T. Kavitha, Popular matching in the stable marriage problem, Lecture Notes in Computer Science, 6755 (ICALP 2011), pp.666–677.