

全域木混雑度問題に対する LP 緩和について

LP relaxation for spanning tree congestion problem

久保 浩平 山内 由紀子 来嶋 秀治 山下 雅史
Kohei Kubo Yukiko Yamauchi Shuji Kijima Masafumi Yamashita

九州大学
Kyushu University

1 はじめに

全域木混雑度とは, Ostrobskii[5] が定義したグラフパラメータである. あるグラフ H に対して, H の頂点集合を $V(H)$ で表し, 辺集合を $E(H)$ で表す. $|V(G)| = n, |E(G)| = m$ とする. 全域木混雑度は以下のように定義される. 連結グラフ G と, G の全域木 T に対し, 辺 $\{u, v\} \in E(G)$ の detour を, T における $u-v$ パスと定義する. $e \in E(T)$ の混雑度を detour が e を含む G の辺の本数とし, $cng_{G,T}(e)$ で表す. G における T の混雑度を T の全ての辺の混雑度の最大値と定義し, $cng_G(T)$ で表す. G の全域木混雑度 $stc(G)$ とは G の全ての全域木のうち, 最小の混雑度のことを言う. Simonson[6] はこのパラメータをカット幅の近似に用いている.

n 頂点のサイクルを C_n , n 頂点の完全グラフを K_n で表す. 今後, グラフに関しては単純, 無向グラフであると仮定する. 次の定理が成り立つ.

定理 1. $\forall C_n, stc(C_n) = 2$.

定理 2. (Ostrobskii[5]) $\forall K_n, stc(K_n) = n - 1$.

C_5, K_5 の場合の全域木を図 1 に示す.

全域木混雑度問題については様々な結果が報告されている [1, 2, 3] が, 整数計画法を用いたアプローチは見当たらない. そこで本稿では多品種フローの容量最大値最小化問題を用いた全域木混雑度問題の定式化について述べる. 次に LP 緩和を行い, [4] で

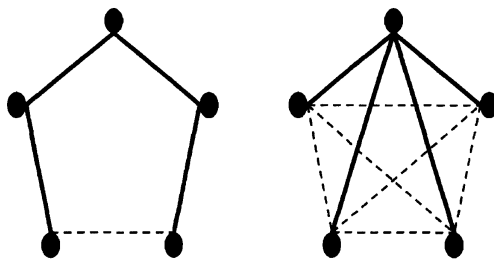


図 1: 実線が全域木の辺を表す.

導出している任意のグラフに対する下界の証明を行う. 最後にサイクルに対して下界の解析を行う.

2 定式化

この章では全域木混雑度問題を多品種フローの容量最大値最小化問題を使った整数計画法としての定式化を述べる. グラフ $G = (V, E)$ を入力とし, T を G の全域木とする. 各辺 $\{s, t\} \in E(G)$ をフローの出口と入口の組とみなし, s から t に 1 の整数フローを流す. ただし, フローを流すことができるのは T の辺のみである. s から t へのフローの流れが $\{s, t\}$ の detour に対応する. $cng_G(T) = k$ であるかを調べるには, T の各辺の容量を k に設定し, フローを流すことができるかを調べればよい. このことを踏まえて, 全域木混雑度問題を以下のように整数計画

問題として定式化する. $S \subseteq V(G)$ に対し, $G[S]$ で S により誘導される部分グラフを表す. $x_{\{u,v\}}$ は辺 $\{u,v\} \in E(T)$ ならば 1, それ以外なら 0 となる変数である. $f_{\{s,t\}}(u,v)$ は $\{u,v\} \in E(G)$ に対して, u から v へ流れる s, t 間のフローを表す.

minimize k (IP)

subject to

$$\sum_{\{u,v\} \in E(G)} x_{\{u,v\}} = n - 1$$

$$\sum_{\{u,v\} \in E(G[S])} x_{\{u,v\}} \leq |S| - 1$$

$$\forall S \subseteq V(G), |S| \geq 2$$

$$\sum_{\{s,t\} \in E(G)} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \leq kx_{\{u,v\}}$$

$$\forall \{u,v\} \in E(G)$$

$$f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u) \leq x_{\{u,v\}}$$

$$\forall \{s,t\}, \{u,v\} \in E(G)$$

$$\sum_{w \in V(G)} f_{\{s,t\}}(v,w) = \sum_{w \in V(G)} f_{\{s,t\}}(w,v)$$

$$\forall v \in V(G) - \{s,t\}, \forall \{s,t\} \in E(G)$$

$$\sum_{w \in V(G)} f_{\{s,t\}}(s,w) = \sum_{w \in V(G)} f_{\{s,t\}}(w,t) = 1$$

$$\forall \{s,t\} \in E(G)$$

$$f_{\{s,t\}}(w,s) = f_{\{s,t\}}(t,w) = 0$$

$$\forall \{s,t\} \in E(G), w \in V(G)$$

$$x_{\{u,v\}} \in \{0, 1\} \quad \forall \{u,v\} \in E(G)$$

$$f_{\{s,t\}}(u,v) \in \{0, 1\} \quad \forall \{s,t\}, \{u,v\} \in E(G)$$

この定式化において, k を (整数に) 固定すると, 目的関数のない線形制約整数計画問題の実行可能解の

有無を問う問題になっている. k を最小化するには実行可能解の有無によるバイナリサーチを行う. 各制約式の説明を加える. 1,2 番目の制約式は全域木制約である. 3 番目の制約式は辺 $\text{cng}_{G,T}(\{u,v\}) \leq k$ を表す制約式である. ここでは k に $x_{\{u,v\}}$ をかけて条件を厳しくしている. 4 番目の制約式はあるソース s とシンク t の組を固定したとき, 辺 $\{u,v\}$ に流れる s, t 間のフローは $x_{\{u,v\}}$ 以下であることを表している. $x_{\{u,v\}} = 0$ のときは $\{u,v\}$ にはフローは流せないことが 3,4 番目の制約からわかる. 5 番目の制約式はフロー保存則を表している. 6 番目の制約式は各ソースから出るフローの合計は 1 であり, 各シンクに入るフローの合計も 1 であることを表している. 6 番目の制約式はソースに入るフロー, シンクから出るフローは 0 であることを表している. 最後の $x_{\{u,v\}}$ と $f_{\{s,t\}}(w,v)$ の整数条件を除くことで LP 緩和が得られる.

3 LP 緩和

この章では 2 章の (IP) を LP 緩和したときの k の下界について述べる. 今後 (IP) と表記したときは (IP) を LP 緩和したものを表すとする.

3.1 任意のグラフに対する下界

次の定理に対し, (IP) を使った別証明を与える.

定理 3. (大館 [4]) 任意のグラフ G に対して, $\text{stc}(G) \geq \frac{2m-(n-1)}{n-1}$.

証明. 任意の (IP) の実行可能解 k に対して, $k \geq \frac{2m-(n-1)}{n-1}$ となることを背理法で証明する. すなわち, $k < \frac{2m-(n-1)}{n-1}$ と仮定し, 矛盾を導く. より具体的には, (IP) の 1, 3 番目の制約式から導かれる不等式

$$\sum_{\{u,v\} \in E(G)} \sum_{\{s,t\} \in E(G)} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \leq k(n-1) \quad (1)$$

と $k < \frac{2m-(n-1)}{n-1}$ を用いて,

$$\begin{aligned} & \frac{2m-(n-1)}{n-1}(n-1) \\ & \leq \sum_{\{u,v\} \in E(G)} \sum_{\{s,t\} \in E(G)} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \\ & < \frac{2m-(n-1)}{n-1}(n-1) \quad (2) \end{aligned}$$

を示す.

$v \in V$ に対して, $N(v)$ を v の隣接頂点の集合とする. 各辺を流れる s, t 間のフローの総和は

$$\begin{aligned} & \sum_{\{u,v\} \in E(G)} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \\ & = \sum_{v \in N(s)} \{f_{\{s,t\}}(s,v) + f_{\{s,t\}}(v,s)\} \\ & \quad + \sum_{v \in N(t)} \{f_{\{s,t\}}(t,v) + f_{\{s,t\}}(v,t)\} \\ & \quad + \sum_{\substack{\{u,v\} \in E(G) \\ \{u,v\} \cap \{s\} = \emptyset \\ \{u,v\} \cap \{t\} = \emptyset}} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \\ & \quad - f_{\{s,t\}}(s,t) \end{aligned}$$

最後に $f_{\{s,t\}}(s,t)$ を引いているのは右辺の第 1, 2 項で $f_{\{s,t\}}(s,t)$ を 2 回足しているからである. 6 番目の制約式から, 右辺の第 1, 2 項の値は 1 である. よって,

$$\begin{aligned} & \sum_{\{u,v\} \in E(G)} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \\ & = 2 + \sum_{\substack{\{u,v\} \in E(G) \\ \{u,v\} \cap \{s\} = \emptyset \\ \{u,v\} \cap \{t\} = \emptyset}} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \\ & \quad - f_{\{s,t\}}(s,t) \\ & \geq 2 + \sum_{\substack{\{u,v\} \in E(G) \\ \{u,v\} \cap \{s\} = \emptyset \\ \{u,v\} \cap \{t\} = \emptyset}} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} - x_{\{s,t\}} \\ & \geq 2 - x_{\{s,t\}} \end{aligned}$$

(1) 式の左辺から,

$$\begin{aligned} & \sum_{\{u,v\} \in E(G)} \sum_{\{s,t\} \in E(G)} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \\ & = \sum_{\{s,t\} \in E(G)} \sum_{\{u,v\} \in E(G)} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \\ & \geq \sum_{\{s,t\} \in E(G)} \{2 - x_{\{s,t\}}\} = 2m - (n-1) \end{aligned}$$

以上の議論から (2) 式が導けた. \square

定理 3 から, 完全グラフに対する次の系を得る.

系 1. 任意の K_n に対して, k が (IP) の実行可能解ならば $k \geq n-1$.

3.2 サイクル

ここではサイクル C_n に対して議論を行う. C_n では定理 3 から得られる下界はタイトではないが, 更なる解析を行うことで, C_n に対してタイトな下界を得ることができる.

定理 4. 任意の C_n に対して, k が (IP) の実行可能解ならば $k \geq 2$.

証明. 定理 3 と同様に背理法で証明する. すなわち,

$$\begin{aligned} & 2(n-1) \\ & \leq \sum_{\{u,v\} \in E(C_n)} \sum_{\{s,t\} \in E(C_n)} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \\ & < 2(n-1) \quad (3) \end{aligned}$$

を示す.

定理 3 と同様に,

$$\begin{aligned} & \sum_{\{u,v\} \in E(C_n)} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \\ & \geq 2 + \sum_{\substack{\{u,v\} \in E(C_n) \\ \{u,v\} \cap \{s\} = \emptyset \\ \{u,v\} \cap \{t\} = \emptyset}} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} - x_{\{s,t\}} \end{aligned}$$

を得る. 6 番目の制約式と, フロー保存則から, $\{s,t\}$ に $x_{\{s,t\}}$ のフローを流すと, $\{s,t\}$ 以外の辺には $1 - x_{\{s,t\}}$ のフローが流れる (図 2). よって

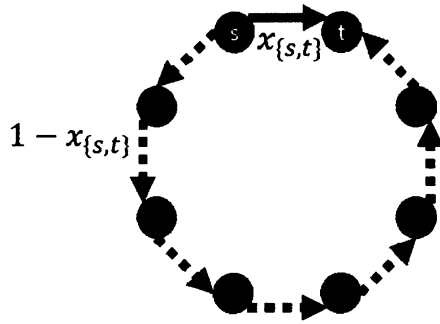


図 2: 実線が $x_{\{s,t\}}$ の大きさのフローの流れを, 点線が $1 - x_{\{s,t\}}$ の大きさのフローの流れを表す.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\{u,v\} \in E(C_n)} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \\
 & \geq 2 + \sum_{\substack{\{u,v\} \in E(C_n) \\ \{u,v\} \cap \{s\} = \emptyset \\ \{u,v\} \cap \{t\} = \emptyset}} \{1 - x_{\{s,t\}}\} - x_{\{s,t\}} \\
 & = m - 1 - (m - 2)x_{\{s,t\}} \quad (4)
 \end{aligned}$$

が成り立つ。(4)式から,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\{s,t\} \in E(C_n)} \sum_{\{u,v\} \in E(C_n)} \{f_{\{s,t\}}(u,v) + f_{\{s,t\}}(v,u)\} \\
 & \geq \sum_{\{s,t\} \in E(C_n)} \{m - 1 - (m - 2)x_{\{s,t\}}\} \\
 & = 2(n - 1)
 \end{aligned}$$

以上のことから (3) 式が導け, 矛盾を示すことができた. \square

4 おわりに

本稿では全域木混雑度問題に対して, 多品種フローの容量最大値最小化問題を使った定式化を行った. 次に LP 緩和を行い解析を行うことで, 任意のグラフに対して [4] で導出している下界を得ることができた. 下界がタイトでない場合も更なる解析を行うこ

とで, 新しい下界を得ることができた.

今後の課題として, 近似アルゴリズムの設計や, 区間グラフについて計算複雑性の解明などが挙げられる.

参考文献

- [1] H.L. Bodlaender, K. Kozawa, T. Matsushima, Y. Otachi, Spanning tree congestion of k -outerplanar graphs, *Discrete Mathematics*, 311 (2011), pp. 1040–1045
- [2] H.-F. Law, Spanning tree congestion of hypercube, *Discrete Mathematics*, 309 (2009), pp. 6644–6648
- [3] Y. Okamoto, Y. Otachi, R. Uehara, T. Uno, Hardness results and an exact exponential algorithm for the spanning tree congestion problem, *Lecture Notes in Computer Science*, 6648 (2011), pp. 452–462.
- [4] Y. Otachi, Designing low-congestion networks with structural graph theory, *Interdisciplinary Information Sciences Vol. 17, No. 3* (2011), pp. 197–216.
- [5] M. I. Ostrovskii, Minimal congestion trees, *Discrete Mathematics*, 285 (2004), pp. 219–226.
- [6] S. Simonson, A variation on the min cut linear arrangement problem, *Mathematical System Theory*, 20 (1987), pp. 235–252