

# 距離遺伝グラフのハミルトン閉路を見つける線形時間アルゴリズム

## A linear-time algorithm for finding a Hamiltonian cycle in distance-hereditary graphs.

神保孝則\*

平田富夫†

### 1. はじめに

無向グラフ  $G = (V, E)$  に対し,  $G$  のすべての頂点を丁度一度ずつ通る閉路をハミルトン閉路と呼び,  $G$  にハミルトン閉路が存在するか否かを判定する問題をハミルトン閉路問題と呼ぶ. この問題は一般的なグラフに対して NP 完全である [4]. 本研究ではグラフを距離遺伝グラフに制限することで線形時間でハミルトン閉路問題を解くアルゴリズムを提案する. 距離遺伝グラフに対しては文献 [2] で既に線形時間のアルゴリズムが提案されているが, 本研究ではそれとは異なるアプローチのアルゴリズムを提案する.

### 2. 準備

$G = (V, E)$  を無向グラフとする.  $G$  の頂点集合を  $V(G)$ , 辺集合を  $E(G)$  と表記する.  $G$  の 2 本のパス  $P$  と  $Q$  が点素であるとは,  $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$  となるときである. 頂点  $v \in V$  の隣接頂点の集合を  $N_G(v)$  と表す. つまり,  $N_G(v) = \{u \in V | (v, u) \in E\}$  である. 文脈から明らかなきは  $N(v)$  と表記することもある.  $X \subset V$  に対し,  $N(X) = \{u \in V | (u, v) \in E, v \in X\}$  と定義する. グラフ  $G$  の 2 頂点  $u, v$  間の距離を  $d_G(u, v)$  で表す.  $G$  の任意の 2 頂点  $u, v$  に対し,  $u, v$  を含む  $G$  の任意の連結誘導部分グラフ  $G'$  に

ついて  $d_{G'}(u, v) = d_G(u, v)$  であるとき  $G$  を距離遺伝グラフ (distance-hereditary graph) と呼ぶ.

距離遺伝グラフ  $G$  に対し次の性質 (1), (2), (3) が知られている [3].

性質 (1):  $G$  は  $K_1$  (1 個の頂点のみからなるグラフ) から始めて, 以下の 3 つの操作を繰り返し頂点を追加することで生成されたグラフである. 接続の対象となる頂点を接続頂点, 追加する頂点を追加頂点と呼び, それぞれ  $v, v^*$  と表す.

PV 操作: グラフ  $G$  から接続頂点  $v$  を選び,  $v$  と追加頂点  $v^*$  の間に辺を置いてグラフ  $G'$  を構成する操作を PV 操作と呼ぶ. PV 操作によって追加された頂点  $v^*$  をペンダント頂点 (pendant vertex) と呼ぶ.

FT 操作: グラフ  $G$  から接続頂点  $v$  を選び,  $v$  の各隣接頂点と追加頂点  $v^*$  の間に辺を置いてグラフ  $G'$  を構成する操作を FT 操作と呼ぶ. FT 操作によって追加された頂点  $v^*$  を不對頂点 (false twin vertex) と呼ぶ.

TT 操作: グラフ  $G$  から接続頂点  $v$  を選び,  $v$  と追加頂点  $v^*$  の間および  $v$  の各隣接頂点と  $v^*$  の間に辺を置いてグラフ  $G'$  を構成する操作を TT 操作と呼ぶ. TT 操作によって追加された頂点  $v^*$  を真対頂点 (true twin vertex) と呼ぶ.

性質 (2):  $G$  は (5, 2)-crossing-chordal グラフである. グラフ  $G$  が (5, 2)-crossing-chordal グラフであるとは, 長さが少なくとも 5 である任意のサイクルには, 交差する対角線が 2 本以上存在するときをいう.

\*名古屋大学大学院情報科学研究科  
†第 1 著者に同じ

性質 (3) :  $G$  は誘導部分グラフとして gem, house, domino をとらないグラフである. gem, house, domino は図 1 に示すグラフである.

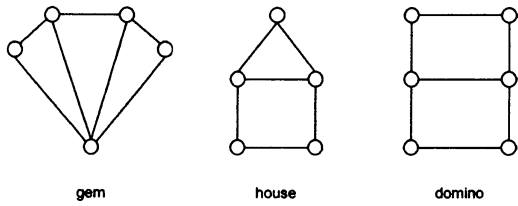


図 1: gem, house, domino

グラフ  $G = (V, E)$  の頂点集合  $M \subseteq V$  がモジュール (module) であるとは, 任意の 2 頂点  $u, v \in M$  に対し,  $N_G(u) - M = N_G(v) - M$  となるときである. つまり, モジュール  $M$  の任意の 2 頂点は隣接する  $V - M$  の頂点の集合が同じである. 1 頂点集合  $\{v\}$ , 全頂点集合  $V$ , 空集合  $\emptyset$  もまたそれぞれモジュールである. 距離遺伝グラフにおけるモジュールは cograph になることが知られている [8].

モジュール  $M$  が強モジュール (strong module) であるとは,  $G$  の任意のモジュール  $M'$  に対し, (a)  $M \cap M' = \emptyset$ , (b)  $M \subseteq M'$ , (c)  $M' \subseteq M$  のいずれかを満たすときである. つまり, 強モジュール  $M$  は他のモジュールと共通部分があるときは, 一方が他方を含む関係になっている. 強モジュール  $M$  が他の強モジュールに含まれないとき, 極大強モジュールと呼ぶ.  $G$  が完全集合  $K_n$  であるとき,  $G$  をモジュール (全頂点集合  $V$  は除く) に分解することを考える. すると,  $G$  の極大モジュールへの分解は一意に定まらない. なぜなら, 極大モジュールへの分解の場合  $K_n$  を  $K_{n-1}$  と  $K_1$  に分解する仕方は  $n$  通りあるからである.  $G$  が安定集合  $I_n$  のときも分解は一意に定まらない. これに対し, 極大強モジュールの場合は,  $K_n$  は  $n$  個の  $K_1$  に分解されるため, 一意に分解される.

定義より, グラフ  $G$  (の頂点集合  $V$ ) は, 幾つかの極大強モジュール  $M_1, M_2, \dots, M_k$  に一意的に分解される. これらの極大強モジュールはさらに再帰的に極大強モジュールに分解することができる. 全ての

極大強モジュールが 1 頂点集合となるまで分解を繰り返したときの分解操作を表した木はモジュール分解木 (modular-decomposition tree) と呼ばれる. 与えられたグラフ  $G$  のモジュール分解木を生成する処理をモジュール分解 (modular decomposition) という. モジュール分解は広く研究されており, 一般的なグラフに対して線形時間でモジュール分解木を計算するアルゴリズムが知られている [7].

“拡張モジュール” を次のように定義する. 頂点集合  $M_I \subset V$  と  $M_{I'} \subset M_I$  が次の 2 つの条件 (a), (b) を満たすとき,  $M_I, M_{I'}$  の対  $(M_I, M_{I'})$  を拡張モジュールと呼び,  $\mathcal{M} = (M_I, M_{I'})$  と表記する. ( $M_I$  と  $M_{I'}$  が必ずしも極大強モジュールであるわけではないことに注意されたい).  $M_{I'}$  を拡張モジュール  $\mathcal{M}$  の“出入口”と呼ぶ.

(a)  $u, v$  を  $M_{I'}$  の任意の 2 頂点とすると,  $N_G(u) - M_I = N_G(v) - M_I$  である.

(b)  $u$  を  $M_I - M_{I'}$  の任意の頂点とすると,  $N_G(u) - M_I = \emptyset$  である.

拡張モジュール  $\mathcal{M}_i = (M_{I_i}, M_{I'_i}), \mathcal{M}_j = (M_{I_j}, M_{I'_j}) (M_{I_i} \cap M_{I_j} = \emptyset)$  において,  $u \in M_{I_i}, v \in M_{I_j}$  とする.  $u, v$  が隣接しているとき,  $M_{I'_j} \times M_{I'_i} \subset E$  である. つまり,  $M_{I'_j}$  の各頂点から  $M_{I'_i}$  の各頂点へ辺が繋がれている. またそのとき,  $\mathcal{M}_i$  と  $\mathcal{M}_j$  は隣接しているという. 極大強モジュール  $M$  は拡張モジュールでもあり, その出入口は  $M$  自身である. 以下では, 文脈から明らかなき場合は  $\mathcal{M}$  と  $M_I$  を区別せずに用いる.

### 3. 距離遺伝グラフに対するハミルトン閉路アルゴリズム

#### 3.1. 拡張モジュールのパス被覆

$\mathcal{M} = (M_I, M_{I'})$  をグラフ  $G = (V, E)$  の拡張モジュールとする.  $M_I$  によって誘導される  $G$  の部分グラフを  $G_{\mathcal{M}} = (M_I, E_{\mathcal{M}})$  と表記する. ただし,  $E_{\mathcal{M}} = \{(u, v) \in E | u, v \in M_I\}$  である.  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  は, 各  $P_i$  が  $M_{I'}$  の点を両端点とする  $G_{\mathcal{M}}$  の互いに点素な  $k$  本のパスの集合と

する.  $V(P_1) \cup V(P_2) \cup \dots \cup V(P_k) = M_I$  であるとき,  $\mathcal{P}$  は  $G_M$  を被覆するという. このとき,  $\mathcal{P}$  を拡張モジュール  $M$  のパス被覆と呼ぶ. このパス被覆のサイズは  $k$  である.  $M$  の最小パス被覆のサイズを  $\pi(M)$  と表記し, 最大パス被覆のサイズを  $m(M)$  と表記する. 対  $(\pi(M), m(M))$  を  $M$  のパス被覆のサイズ範囲と呼び,  $\|M\|$  と表記する. 単一の極大強モジュール  $M$  からなる拡張モジュール  $\mathcal{M} = (M, M)$  の場合, 最大パス被覆のサイズ  $m(M)$  は頂点数  $|M|$  と等しい. なぜならこの拡張モジュールの出入り口は  $M$  自身であるため, 長さ 0 のパス (1 頂点のみからなるパス) の集合で  $M$  を被覆するときにパス被覆のサイズ  $k$  が最大となるからである. また,  $M$  がパス被覆のサイズ範囲  $(\pi(M), m(M))$  を持つとき,  $\pi(M) \leq a \leq m(M)$  を満たす任意の  $a$  本のパスの集合で  $M$  を被覆できる. なぜなら極大強モジュールの出入り口は  $M$  自身であるので, 最小パス被覆の  $\pi(M)$  本のパスから頂点を 1 つずつ外し, その頂点を 1 つのパスとすることで頂点数と等しい  $|M|$  本までパスを 1 本ずつ増やすことができるからである.

### 3. 2. 幅優先探索と拡張モジュール

ここでは, 幅優先探索を用いて, 距離遺伝グラフの拡張モジュールを見つける. 距離遺伝グラフ  $G = (V, E)$  に対して, 任意の頂点  $r \in V$  を根とする幅優先探索を実行し, 根からの距離によって頂点集合をレイヤーに分割する. これらのレイヤーを根から近い順に  $L_1, L_2, \dots, L_n$  とする. つまり,  $\cup_{i=1}^n L_i = V, L_1 = \{r\}, L_2 = N(r), L_i = N(L_{i-1}) - L_{i-1} - L_{i-2}$  である.  $v (\neq r)$  を任意の頂点とし,  $v$  のレイヤーを  $L_i$  とする.  $v$  の  $L_{i-1}$  内における隣接頂点集合を  $N'(v)$  と表記する. つまり,  $N'(v) = \{u | u \in N(v) \text{ かつ } u \in L_{i-1}\}$  である.  $X \subseteq L_i$  に対し,  $N'(X) = \{u | u \in N(X) \text{ かつ } u \in L_{i-1}\}$  と定義する.  $|N'(X)|$  を  $X$  の左次数と呼ぶ. 次の補題 1~4 が成立する [8].

**補題 1** :  $u, v$  を  $L_i (i \geq 2)$  の隣接する 2 頂点とすると,  $N'(u) = N'(v)$  である. また,  $L_n$  内の連結成分はモジュールである.

**証明.**  $N'(u) \neq N'(v)$  であると仮定する. 一般性を失うことなく,  $x \in N'(u), x \notin N'(v)$  である頂点  $x$  が存在する.  $G$  から  $N'(v)$  を削除したグラフ, つまり,  $V - N'(v)$  で誘導される誘導部分グラフを  $G'$  とすると, 根  $r$  から  $v$  までの距離は  $G$  上と  $G'$  上とで異なる. これは,  $G$  が距離遺伝グラフであることに反する. よって,  $N'(u) = N'(v)$  である.

$L_n$  内の連結成分は, そこに含まれるどの 2 頂点  $u, v$  についても  $N'(u) - L_n = N'(v) - L_n$  なのでモジュールである.  $\square$

**補題 2** :  $t$  を  $L_i$  の任意の頂点とし,  $u, v$  を  $L_{i-1}$  の  $t$  に隣接する 2 頂点とすると,  $N'(u) = N'(v)$  である.

**証明.**  $N'(u) \neq N'(v)$  であると仮定する. 一般性を失うことなく,  $x \in N'(u), x \notin N'(v)$  である頂点  $x$  が存在する.  $G$  から  $N'(v)$  を削除したグラフ, つまり,  $V - N'(v)$  で誘導される誘導部分グラフを  $G'$  とすると, 根  $r$  から  $v$  までの距離は  $G$  上と  $G'$  上とで異なる. これは,  $G$  が距離遺伝グラフであることに反する. よって,  $N'(u) = N'(v)$  である.  $\square$

**補題 3** :  $u, v$  を  $L_i$  の 2 頂点とすると, (1)  $N'(u) \subseteq N'(v)$ , (2)  $N'(v) \subseteq N'(u)$  または (3)  $N'(u) \cap N'(v) = \emptyset$  のいずれかが成立する.

**証明.**  $u, v$  が隣接しているとき, 補題 1 より  $N'(u) = N'(v)$  なので (1) と (2) が成立する.  $u$  と  $v$  に隣接する頂点  $s$  が  $L_i$  に存在するとき, 補題 1 より  $N'(u) = N'(s) = N'(v)$  なので (1) と (2) が成立する.  $u$  と  $v$  に隣接する頂点  $t$  が  $L_{i+1}$  に存在するとき, 補題 2 より  $N'(u) = N'(v)$  なので (1) と (2) が成立する. よって,  $u, v$  が隣接していない, かつ, 上のような  $s, t$  が存在しないとす. このとき, (1), (2), (3) のいずれも成立していないとする. すると  $N'(u) \cap N'(v) \neq \emptyset$  であるので,  $d_G(u, v) = 2$  である.  $G$  から  $N'(u) \cap N'(v)$  を削除したグラフ, つまり,  $V - (N'(u) \cap N'(v))$  で誘導される誘導部分グラフを  $G'$  とすると,  $d_{G'}(u, v) \geq 3$  となり  $u$  から  $v$  までの距離は  $G$  上と  $G'$  上とで異なる. これは,  $G$  が距離遺伝グラフであることに反する. よって, (1), (2), (3) のいずれかが成立する.  $\square$

$L_n$  のモジュールを左次数の小さい順に  $M_1, M_2, \dots, M_k$  とする. つまり,  $\cup_{i=1}^k M_i = L_n, |N'(M_1)| \leq |N'(M_2)| \leq \dots \leq |N'(M_k)|$  である.  $x$  を  $M_1$  の任意の頂点とする.  $N'(x) = N'(M_1)$  かつ  $|N'(M_1)| \leq |N'(M_2)| \leq \dots \leq |N'(M_k)|$  なので,  $L_n$  の任意の頂点  $z$  に対して  $|N'(x)| \leq |N'(z)|$  である. このとき, 次の補題が成立する.

**補題 4 :**  $N'(M_1)$  はモジュールである.

**証明.**  $N'(M_1)$  が 1 頂点からなるとき, 明らかに  $N'(M_1)$  はモジュールである.  $|N'(M_1)| \geq 2$  で, かつ,  $N'(M_1)$  はモジュールでないと仮定する. すると,  $N'(M_1)$  には  $N(u) - N'(M_1) \neq N(v) - N'(M_1)$  となるような 2 頂点  $u, v$  が存在し,  $u, v$  の一方のみに隣接する頂点  $y \notin N'(M_1)$  が存在する. 一般性を失うことなく,  $y \in N(u), y \notin N(v)$  とする.  $y$  は  $u$  の隣接点なので  $L_{n-2}, L_{n-1}, L_n$  のいずれかに属する.

$y \in L_n$  とする.  $y \in M_i$  とすると  $|N'(M_1)| \leq |N'(M_i)|$  なので,  $|N'(x)| \leq |N'(y)|$  となる.  $v \notin N'(y)$  なので,  $w \in N'(y), w \notin N'(x)$  である頂点  $w$  が存在する. これは, 補題 3 に反する.  $y \in L_{n-1}$  のときを考える.  $y$  と  $u$  は隣接しているので, 補題 1 より  $N'(y) = N'(u)$  である. また,  $u, v \in N'(x)$  なので, 補題 2 より  $N'(u) = N'(v)$  である. よって,  $t \in N'(y), t \in N'(u), t \in N'(v)$  である頂点  $t$  が存在する.  $d_G(x, y) = 2$  である.  $\{x, y, v, t\}$  で誘導される誘導部分グラフを  $G'$  とすると,  $d_{G'}(x, y) = 3$  となり  $x$  から  $y$  までの距離は  $G$  上と  $G'$  上で異なる. これは,  $G$  が距離遺伝グラフであることに反する.  $y \in L_{n-2}$  とすると, 補題 2 に反する. よって,  $N'(M_1)$  はモジュールである.  $\square$

出入り口が  $L_i$  に属している拡張モジュールを出入り口の左次数が小さい順に  $M_1, M_2, \dots, M_k (M_j = (M_{I_j}, M_{I'_j}))$  とする. つまり,  $\cup_{j=1}^k M_{I'_j} = L_i, |N'(M_{I'_1})| \leq |N'(M_{I'_2})| \leq \dots \leq |N'(M_{I'_k})|$  である.  $\cup_{j=1}^k M_{I_j} = \cup_{s=i}^n L_s$  とする. このとき, 次の補題が成り立つ.

**補題 5 :**  $N'(M_{I'_1})$  はモジュールである.

**証明.** 補題 4 と同様にして証明できる. なぜなら,

$G$  から  $\cup_{s=i+1}^n L_s$  を削除したグラフ, つまり,  $V - \cup_{s=i+1}^n L_s$  で誘導される誘導部分グラフを  $G'$  とすると,  $G'$  における  $M_{I'_1}$  は  $G$  における  $M_1$  と同じ性質を持つからである.  $\square$

**アルゴリズムの概要 :** 提案するアルゴリズムは, 最初  $G$  の小さな拡張モジュールに対し, パス被覆のサイズ範囲を求め, 拡張モジュール同士を合併 (マージ) してできる大きな拡張モジュールを捜し, それに対しパス被覆のサイズ範囲を求めることを繰り返す. 最後に,  $G$  が 2 つの拡張モジュールで表現可能な状態になったら  $G$  にハミルトン閉路が存在するかどうかを判定する.

拡張モジュールの合併は次の合併 (1), 合併 (2) により行う.

**合併 (1) :**  $M_i = (M_{I_i}, M_{I'_i})$  と  $M_j = (M_{I_j}, M_{I'_j})$  はそれぞれ拡張モジュールで,  $M_{I_i} \cap M_{I_j} = \emptyset$  で,  $M_i$  は  $M_j$  のみに隣接しているとする (図 2). このとき,  $M_{ji} = (M_{I_i} \cup M_{I_j}, M_{I'_j})$  は拡張モジュールである.

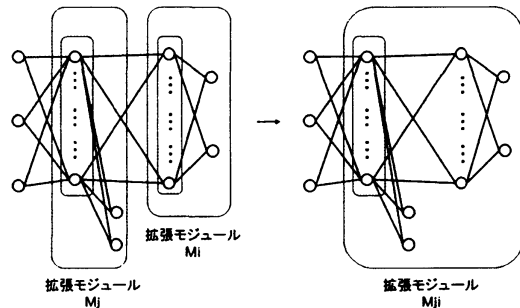


図 2: 合併 (1)

**合併 (2) :**  $M_1, M_2, \dots, M_k (M_i = (M_{I_i}, M_{I'_i}))$  はそれぞれ拡張モジュールで, それぞれの出入り口が頂点集合  $X \subseteq L_i$  に属しているとする. つまり,  $\cup_{i=1}^k M_{I'_i} \subseteq X$  である.  $X$  に含まれるどの 2 頂点  $u, v$  においても  $N(u) - (\cup_{i=1}^k M_{I_i} \cup X) = N(v) - (\cup_{i=1}^k M_{I_i} \cup X)$  であるとする (図 3). このとき,  $M = (\cup_{i=1}^k M_{I_i} \cup X, X)$  は拡張モジュールである.

補題 1~5 をもとに, 根から最も遠いレイヤー層に

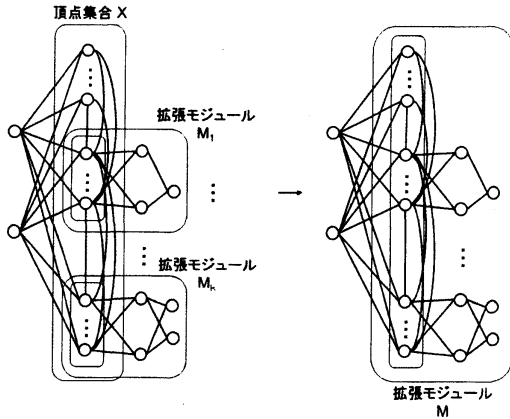


図 3: 合併 (2)

において合併 (1) により拡張モジュールを合併し、合併 (1) ができない場合は合併 (2) により合併する。最も右のレイヤー層から順に上記の操作を繰り返し実行し拡張モジュールを合併してゆく。これを繰り返すと、根  $r$  を除いた頂点集合  $V - r$  は 1 つの拡張モジュール  $M_f$  となり、その出入り口は  $N(r)$  である。つまり、 $M_f = (V - r, N(r))$  である。このとき、次の補題が成立する。

**補題 6** :  $M_f$  の最小パス被覆のサイズが 1 であるとき、そしてそのときのみ、 $G$  はハミルトン閉路を持つ。

**証明**. 証明は自明である。  $\square$

合併 (1) の  $M_{ji}$  に対し、次の補題 7 が成立する。

**補題 7** :  $M_{ji}$  を構成する  $M_i$  と  $M_j$  において、 $m(M_j) - \pi(M_i) \leq 0$  であるとき、 $M_{ji}$  のパス被覆は存在しない。 $m(M_j) - \pi(M_i) > 0$  であるとき、 $M_{ji}$  のパス被覆は存在し、最小パス被覆のサイズは  $\max(1, \pi(M_j) - m(M_i))$  であり、最大パス被覆のサイズは  $m(M_j) - \pi(M_i)$  である。

**証明**.  $m(M_j) - \pi(M_i) \leq 0$  であるとき、 $M_{ji}$  のパス被覆は存在しない。 $M_{ji}$  において、両端点が  $M_{rj}$  に属すパスの集合で  $M_i$  内の頂点を被覆するためには  $M_i$  のパス被覆の各パスを  $M_j$  のパス被覆の各パスと連結させる必要がある。 $\pi(M_i)$  本のパスを連結

するには  $M_j$  に  $\pi(M_i) + 1$  本以上のパスが必要である。 $M_j$  には多くとも  $m(M_j) (\leq \pi(M_i))$  本のパスしか存在しないため、 $M_{ji}$  のパス被覆は存在しない。

$m(M_j) - \pi(M_i) > 0$  であるとする。まず、 $M_{ji}$  の最小パス被覆を考える。 $\pi(M_j) - m(M_i) > 0$  の場合を考える。 $\{P_1, P_2, \dots, P_{\pi(M_j)}\}$  を  $M_j$  の最小パス被覆とする。 $(a_i, b_i)$  を  $P_i$  の両端点とする。 $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_{m(M_i)}\}$  を  $M_i$  の最大パス被覆とする。 $(c_i, d_i)$  を  $Q_i$  の両端点とする。 $b_i$  と  $c_i$ ,  $a_{i+1}$  と  $d_i$  をつなぐことにより、両端点が  $M_{rj}$  に存在するパスを生成していく。こうすることで、 $a_1$  と  $b_{m(M_i)}$  を端点とする 1 本のパスができる。生成された 1 本のパスと  $M_j$  の残りの  $\pi(M_j) - (m(M_i) + 1)$  本のパスとを合わせた  $\pi(M_j) - m(M_i)$  本のパスで  $M_{ji}$  を被覆することができる。このとき、最小パス被覆のサイズは  $\pi(M_j) - m(M_i)$  となる。次に、 $\pi(M_j) - m(M_i) \leq 0$  の場合を考える。 $\|M_j\|$  と  $\|M_i\|$  とには重なった部分が存在する。つまり、 $a - b = 1$  を満たす任意の 2 数  $a, b (\pi(M_j) \leq a \leq m(M_j), \pi(M_i) \leq b \leq m(M_i))$  が必ず存在する。このとき、 $M_j$  のパス被覆でパスの本数が  $a (= b + 1)$  本で、 $M_i$  のパス被覆でパスの本数が  $b$  本であるパス被覆を考える。このとき、 $M_j$  の ( $a$  本の) パスと  $M_i$  の ( $b$  本の) パスを交互につないで 1 本にすることができ、しかも、このパスの両端点は  $M_{rj}$  である。よって、最小パス被覆のサイズは 1 となる。以上より、 $M_{ji}$  の最小パス被覆のサイズは  $\max(1, \pi(M_j) - m(M_i))$  である。

次に、 $M_{ji}$  の最大パス被覆を考える。 $M_i$  を被覆するパスの集合のパスの本数を最小 ( $\pi(M_i)$ ) とし、 $M_j$  を被覆するパスの集合のパスの本数を最大 ( $m(M_j)$ ) と考えたとき、 $M_{ji}$  を被覆するパスの本数は最大となる。よって、 $M_{ji}$  の最大パス被覆のサイズは  $m(M_j) - \pi(M_i)$  である。  $\square$

合併 (2) の  $M$  に対し、次の補題 8 が成立する。

**補題 8** : 拡張モジュール  $M_1, M_2, \dots, M_k (M_i = (M_{I_i}, M_{r_i}))$  のそれぞれのパス被覆のサイズ範囲がわかっているとき、拡張モジュール  $M = (\cup_{i=1}^k M_{I_i} \cup X, X)$  の最小パス被覆のサイズは  $\text{cograph}$  の最小パス被覆を求めるアルゴリズムにより計算することが

できる. 最大パス被覆のサイズは  $m(M_1) + m(M_2) + \dots + m(M_k) + |X - \cup_{i=1}^k M_{I_i}|$  である.

**証明.** まず,  $M$  の最小パス被覆を考える. 各拡張モジュール  $M_i$  から出入り口  $M_{I_i}$  の任意の頂点  $v_i$  を選ぶ.  $M$  において, 各  $M_i$  を  $v_i$  に縮約したグラフを  $M'$  とする. つまり,  $V(M') = \cup_{i=1}^k v_i \cup (X - \cup_{i=1}^k M_{I_i})$  である. このとき,  $X$  で誘導される誘導部分グラフを  $G'$  とすると,  $G'$  は cograph (誘導部分グラフとして長さ 3 のパスをもたないグラフ) であることを示すことができる.  $G'$  が cograph でないとする. つまり,  $G'$  は誘導部分グラフとして長さ 3 のパスをもつとする.  $G$  には  $X$  のすべての頂点に隣接する頂点  $v \in L_{i-1}$  が必ず存在するので,  $X \cup v$  で誘導される誘導部分グラフを  $G''$  とすると,  $G''$  は誘導部分グラフとして gem (図 1) をもつことになる. つまり,  $G$  が誘導部分グラフとして gem をもつことになる. これは, 距離遺伝グラフの性質 (3) に反する. よって,  $G'$  は cograph である.  $M'$  は  $G'$  の誘導部分グラフなので  $M'$  もまた cograph である. なぜなら, cograph である  $G'$  は誘導部分グラフとして長さ 3 のパスをもたないグラフなので,  $G'$  の誘導部分グラフ  $M'$  もまた誘導部分グラフとして長さ 3 のパスをもたないからである. したがって,  $M'$  の最小パス被覆のサイズは cograph の最小パス被覆を求めるアルゴリズムにより計算できる [8]. 各拡張モジュール  $M_i$  のパス被覆のサイズ範囲を  $(a_i, b_i)$  とする.  $v_i$  にラベル  $(a_i, b_i)$  を付す.  $X - \cup_{i=1}^k M_{I_i}$  の各頂点に対し, ラベル  $(1, 1)$  を付す.  $M$  の最小パス被覆は  $M_1, M_2, \dots, M_k$  のパス被覆のパスの両端点と  $X - \cup_{i=1}^k M_{I_i}$  の頂点を次の joint 操作と union 操作を繰り返し結合したとき得られる.

**joint 操作:** 2 つのグラフを  $X, Y$  とする. joint 操作とは,  $X$  の各頂点から  $Y$  の各頂点へ辺をつなぎ, グラフ  $Z$  を生成する操作である. つまり,  $V(Z) = V(X) \cup V(Y), E(Z) = E(X) \cup E(Y) \cup (V(X) \times V(Y))$  である.

**union 操作:** 2 つのグラフを  $X, Y$  とする. union 操作とは,  $X$  と  $Y$  を  $X$  と  $Y$  の間に辺をつなぐことなく, グラフ  $Z$  を生成する操作である. つまり,

$V(Z) = V(X) \cup V(Y), E(Z) = E(X) \cup E(Y)$  である.

cograph の最小パス被覆を求めるアルゴリズムは, joint 操作と union 操作によって得られるグラフにおける最小パス被覆を求めるアルゴリズムである. よって,  $M'$  に対し, 各頂点が保持するサイズ範囲を用いて cograph の最小パス被覆を求めるアルゴリズムを適用すると  $M$  の最小パス被覆のサイズが求まる.

次に,  $M$  の最大パス被覆を考える.  $M_1, M_2, \dots, M_k$  の各最大パス被覆のパスと頂点集合  $X - \cup_{i=1}^k M_{I_i}$  の各頂点 (それぞれ長さ 0 のパス) を合併したものが,  $M$  の最大パス被覆となる. 最大パス被覆のサイズは  $m(M_1) + m(M_2) + \dots + m(M_k) + |X - \cup_{i=1}^k M_{I_i}|$  である.  $\square$

提案するアルゴリズムは, 最初  $G$  の単一のモジュールから出発し, 合併 (1) または合併 (2) を繰り返し実行し大きな拡張モジュールを見つける. つまり, 単一のモジュールからなる拡張モジュール, 合併 (1) により生じる拡張モジュール, 合併 (2) により生じる拡張モジュールのみを扱う. 提案アルゴリズムで用いる拡張モジュールに対し, 次の補題が成立する.

**補題 9 :**  $(\pi(M), m(M))$  を拡張モジュール  $M$  のパス被覆のサイズ範囲とする. このとき,  $\pi(M) \leq a \leq m(M)$  を満たす任意の  $a$  に対し, サイズ  $a$  のパス被覆が存在する.

**証明.** 拡張モジュール  $M$  の大きさに関する帰納法で示す. まず, 拡張モジュール  $M$  が単一のモジュールからなる場合を考える. モジュールの出入り口は自分自身であるので, 最小パス被覆の  $\pi(M)$  本のパスから頂点を 1 つずつ外し, その頂点を 1 つのパスとすることで頂点数と等しい  $|M| = m(M)$  本までパスを 1 本ずつ増やすことができる. よって,  $\pi(M) \leq a \leq m(M)$  を満たす任意の  $a$  に対し, サイズ  $a$  のパス被覆が存在する.

次に, 拡張モジュール  $M$  が合併 (1) により得られたとする. 合併 (1) により合併される 2 つの拡張モジュールを  $M_j, M_i$  とする.  $\|M_j\| =$

$(\pi(\mathcal{M}_j), m(\mathcal{M}_j), \|\mathcal{M}_i\|) = (\pi(\mathcal{M}_i), m(\mathcal{M}_i))$  とする。帰納法の仮定より、 $\mathcal{M}_j$  は  $\pi(\mathcal{M}_j) \leq k \leq m(\mathcal{M}_j)$  を満たす任意の  $k$  に対し、サイズ  $k$  のパス被覆が存在し、 $\mathcal{M}_i$  は  $\pi(\mathcal{M}_i) \leq k' \leq m(\mathcal{M}_i)$  を満たす任意の  $k'$  に対し、サイズ  $k'$  のパス被覆があるとす。  $\mathcal{M}$  の両端点が  $M_{I_j}$  に属すパス被覆は  $\mathcal{M}_j$  のパス被覆のパスで  $\mathcal{M}_i$  のパス被覆のパスを連結させることにより生成される。つまり、 $\mathcal{M}$  のパス被覆のサイズは  $\mathcal{M}_j$  のパス被覆のサイズから  $\mathcal{M}_i$  のパス被覆のサイズを引いた値 (つまり、 $k - k'$ ) である。  $k - k'$  の中で最小となる値が  $\mathcal{M}$  の最小パス被覆のサイズ  $\pi(\mathcal{M})$  であり、最大となる値が  $\mathcal{M}$  の最大パス被覆のサイズ  $m(\mathcal{M})$  である。  $\pi(\mathcal{M}) \leq a \leq m(\mathcal{M})$  を満たす任意の  $a$  に対し、 $a = k - k'$  とできるので、サイズ  $a$  の  $\mathcal{M}$  のパス被覆が存在する。

$\mathcal{M}$  が合併 (2) により得られたとする。合併される複数の拡張モジュールを  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$ , 頂点集合を  $X$  とする。  $\|\mathcal{M}_i\| = (\pi(\mathcal{M}_i), m(\mathcal{M}_i))$  とする。帰納法の仮定より、 $\mathcal{M}_i$  は  $\pi(\mathcal{M}_i) \leq k_i \leq m(\mathcal{M}_i)$  を満たす任意の  $k_i$  に対し、サイズ  $k_i$  のパス被覆が存在する。  $\mathcal{M}$  の最小パス被覆は拡張モジュール  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$  の各パス被覆のパスと頂点集合  $X - \cup_{i=1}^k M_{I_i}$  を  $X$  上に存在する辺でつなげることにより得られる。まず、最小パス被覆である  $\pi(\mathcal{M})$  本のパスから  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$  の各パス被覆のパスをつないでいる  $X$  上の辺を外しパスを分離することでパスを 1 本ずつ増やすことができる。次に、 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$  の各パス被覆のサイズをサイズ範囲内で 1 つずつ増やすことにより、 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$  の各パス被覆が最大パス被覆となる  $m(\mathcal{M})$  本までパスを 1 本ずつ増やすことができる。なぜなら、 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$  の出入り口は  $\mathcal{M}$  の出入り口の部分集合だからである。よって、 $\pi(\mathcal{M}) \leq a \leq m(\mathcal{M})$  を満たす任意の  $a$  に対し、サイズ  $a$  の  $\mathcal{M}$  のパス被覆が存在する。

□

次に、合併 (1) と (2) のみを実行することで根  $r$  以外の頂点  $V - r$  が 1 つの拡張モジュール  $\mathcal{M}_f = (V - r, N(r))$  となることを示す。

補題 5 より出入り口が  $L_i$  に属している拡張モジュール  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$  ( $\mathcal{M}_j = (M_{I_j}, M_{I_j'})$ ) において次のことがいえる。任意の  $j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) に対し、 $N'(M_{I_j'})$  に含まれるどの 2 頂点  $u, v$  も  $N(u) - (\cup_{s=1}^{j-1} (M_{I_s} \cup N'(M_{I_s'}))) = N(v) - (\cup_{s=1}^{j-1} (M_{I_s} \cup N'(M_{I_s'})))$  である。なぜなら、 $G$  から  $\cup_{s=1}^{j-1} M_{I_s}$  を削除したグラフ、つまり、 $G - \cup_{s=1}^{j-1} M_{I_s}$  で誘導される誘導部分グラフを  $G'$  とすると、 $G'$  において  $\mathcal{M}_j$  は左次数が一番小さい拡張モジュールであり、 $N'(M_{I_j'})$  は  $G'$  においてモジュールとなるからである。このことにより、次の補題が成立する。

補題 10 :  $j$  を  $1 \leq j \leq k$  の任意の値とする。  $N'(M_{I_j'}) \cap (N'(M_{I_1'}) \cup N'(M_{I_2'}) \cup \dots \cup N'(M_{I_{(j-1)}'})) = \emptyset$  であるとする。このとき、 $N'(M_{I_j'})$  と  $\mathcal{M}_j$  は合併 (1) により大きな拡張モジュールとなる。  $N'(M_{I_j'}) \cap (N'(M_{I_1'}) \cup N'(M_{I_2'}) \cup \dots \cup N'(M_{I_{(j-1)}'})) \neq \emptyset$  であるとする。このとき、 $N'(M_{I_j'})$  の部分集合を出入り口とする拡張モジュールが少なくとも 1 つ存在し、これらの拡張モジュールと  $N'(M_{I_j'})$  は合併 (2) により大きな拡張モジュールとなる。また、合併 (2) により生じた拡張モジュールと  $\mathcal{M}_j$  は合併 (1) により大きな拡張モジュールとなる。

証明。  $N'(M_{I_j'}) \cap (N'(M_{I_1'}) \cup N'(M_{I_2'}) \cup \dots \cup N'(M_{I_{(j-1)}'})) = \emptyset$  であるとする。すると、 $N'(M_{I_j'})$  はモジュールである。  $\mathcal{M}_j$  は  $N'(M_{I_j'})$  のみに隣接している。よって、 $N'(M_{I_j'})$  と  $\mathcal{M}_j$  は合併 (1) により大きな拡張モジュールとなる。

$N'(M_{I_j'}) \cap (N'(M_{I_1'}) \cup N'(M_{I_2'}) \cup \dots \cup N'(M_{I_{(j-1)}'})) \neq \emptyset$  であるとする。すると、 $N'(M_{I_j'})$  の部分集合を出入り口とする拡張モジュールが少なくとも 1 つ存在する。これは、次のように示すことができる。  $N'(M_{I_1'}), N'(M_{I_2'}), \dots, N'(M_{I_{(j-1)}'})$  において、 $N'(M_{I_j'})$  と重なりを持ち、かつ、頂点数が最小である頂点集合を  $N'(M_{I_t'})$  とする。このとき、 $N'(M_{I_t'})$  と  $\mathcal{M}_t$  は合併 (1) により拡張モジュールとなる。よって、 $N'(M_{I_j'})$  の部分集合を出入り口とする拡張モジュールが少なくとも 1 つ存在する。  $N'(M_{I_j'})$  に含まれるどの 2 頂点  $u, v$  も  $N(u) - (\cup_{s=1}^{j-1} (M_{I_s} \cup$

$N'(M_{I'_s})) = N(v) - (\cup_{s=1}^{j-1} (M_{I'_s} \cup N'(M_{I'_s})))$  である。したがって、 $N'(M_{I'_j})$  の部分集合を出入り口とする拡張モジュールと  $N'(M_{I'_j})$  は合併 (2) により大きな拡張モジュールとなる。また、 $M_j$  は合併 (2) により生じた拡張モジュールのみに隣接している。よって、合併 (2) により生じた拡張モジュールと  $M_j$  は合併 (1) により大きな拡張モジュールとなる。□

補題 10 を左次数が小さい拡張モジュールから順に繰り返し実行することにより頂点集合  $\cup_{j=i-1}^n L_j$  の頂点集合は出入り口が  $L_{i-1}$  に属している複数の拡張モジュールとなる。層ごとに再帰的に繰り返すことにより、 $\cup_{j=2}^n L_j$  の頂点集合は出入り口が  $L_2$  に属している複数の拡張モジュールとなる。出入り口が  $L_2$  に属している複数の拡張モジュールは合併 (2) により拡張モジュール  $M_f$  となる。よって、合併 (1) と (2) のみを実行することで根  $r$  以外の頂点  $V - r$  が 1 つの拡張モジュール  $M_f = (V - r, N(r))$  となる。

### 3.3. アルゴリズム

アルゴリズムで使用するものはパス被覆のサイズ範囲と隣接頂点集合である。よって、アルゴリズム上では拡張モジュールを出入り口の任意の 1 頂点でおきかえ、その頂点に拡張モジュールのパス被覆のサイズ範囲でラベル付けをする。

#### アルゴリズム

Step 1. 入力グラフ  $G$  の各頂点にパス被覆のサイズ範囲  $(1, 1)$  とラベル付けをする。

Step 2.  $G$  に任意の頂点  $r$  を根とする幅優先探索を実行し、根からの距離によって頂点集合をレイヤーに分割する。レイヤーを根から近い順に  $L_1, L_2, \dots, L_n$  とする。  $j = n$  とする。

Step 3.  $L_j$  のモジュール (連結成分)  $M_1, M_2, \dots, M_k$  内の頂点のラベルをもとに、 $M_1, M_2, \dots, M_k$  のパス被覆のサイズ範囲を求める (cograph のパス被覆を求めるアルゴリズムを用いる)。  $M_1, M_2, \dots, M_k$  において、それぞれ任意の 1 頂点を選び  $v_1, v_2, \dots, v_k$  とする。各  $M_i$  において  $v_i$  以外の頂点を削除する。

$v_1, v_2, \dots, v_k$  のそれぞれに対し、 $M_1, M_2, \dots, M_k$  のパス被覆のサイズ範囲でラベル付けをする。

Step 4.  $L_j$  の頂点で左次数が 1 番小さい頂点を  $v$  とし、 $N'(v)$  内の頂点のラベルをもとに、 $N'(v)$  のパス被覆のサイズ範囲を求める (cograph のパス被覆を求めるアルゴリズムを用いる)。  $N'(v)$  のパス被覆のサイズ範囲が  $(a, b)$ 、 $v$  のラベルの値が  $(c, d)$  であるとす。  $b - c \leq 0$  である時、*no* (ハミルトン閉路を持たない) と出力する。  $b - c > 0$  である時、 $N'(v) \cup v$  の、両端点が  $N'(v)$  に存在するパス被覆のサイズ範囲  $(\max(1, a - d), b - c)$  を求め、Step 5. へ。

Step 5.  $N'(v) \cup v$  において、 $N'(v)$  上の任意の 1 頂点を  $u$  とし、 $u$  以外の頂点を削除する。  $u$  のラベルを  $(\max(1, a - d), b - c)$  に変更する。  $L_j$  に頂点が存在するとき、Step 4. へ。  $L_j$  に頂点が存在しないとき、 $j \neq 3$  ならば  $j = j - 1$  とし、Step 3. へ。  $j = 3$  ならば Step 6. へ。

Step 6.  $L_2$  の頂点集合  $V(L_2)$  内の頂点のラベルをもとに、 $V(L_2)$  のパス被覆のサイズ範囲を求める (cograph のパス被覆を求めるアルゴリズムを用いる)。  $V(L_2)$  の最小パス被覆が 1 であるとき、*yes* (ハミルトン閉路を持つ) と出力し、1 でないとき *no* (ハミルトン閉路を持たない) と出力する。

Step 4. の頂点のソートは次のように行う。各頂点  $v$  において、(根から  $L_n$  に属している頂点への距離から、根から  $v$  への距離を引いた値) と ( $v$  の左次数) の対を辞書式順序に並べる。つまり、 $L_n$  に属している頂点が左次数の小さい順に並び、次に  $L_{n-1}$  に属している頂点が左次数の小さい順に並び、となり、最後に  $L_1$  の頂点 (つまり、根  $r$ ) が並ぶ。このソートは辞書式ソートにより  $O(|V|)$  で計算できる。

### 4. 結論

本研究では距離遺伝グラフにおいて従来とは異なるアプローチのアルゴリズムを提案した。文献 [2] のアルゴリズムでは、距離遺伝グラフのパーキング情報 (PV, FT, TT による構造解析) を用いているが、



本研究ではそれを陽には使用せず、拡張モジュールの導入により問題を解いた。課題は, cograph のパス被覆のサイズの計算である。なぜなら, cograph のパス被覆を計算するアルゴリズムは cograph のパーキング情報を用いているからである。

## 5. 参考文献

- [1]R. Hung, S. Wu and M. Chang, "Hamiltonian cycle problem on Distance-hereditary graphs," Journal of Information Science and Engineering 19, 2003, pp. 827-838.
- [2]R. Hung, S. Wu and M. Chang, "Linear-time algorithms for the Hamiltonian problems on distance-hereditary graphs," Theoretical Computer Science 341, 2005, pp. 411-440.
- [3]H. Bandelt and H. Mulder, "Distance-hereditary graphs," Journal of Combinatorial Theory, Series B 41, 1984, pp. 182-208.
- [4]M. Garey, D. Johnson and R. Tarjan, "The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete," SIAM Journal on Computing, Vol. 5, 1976, pp. 704-714.
- [5]M. Krishnamoorthy, "An NP-hard problem in bipartite graphs," SIGACT News, Vol. 7, 1976, pp. 26.
- [6]M. Takasuka and T. Hirata, "An algorithm for the Hamiltonian circuit problem on bipartite distance-hereditary graphs," 数理解析研究所講究録 1799, 163-166, 2012-06.
- [7]A. Cournier and M. Habib, "A new linear algorithm for modular decomposition," Lecture Notes in Computer Science, Vol. 787, 1994, pp. 68-82.
- [8]P. Hammer and F. Maffray, "Completely separable graphs," Discrete Applied Mathematics 27, 1990, pp. 85-99.